Литература

1. Ионов В.М., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967. 3. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев, 1972.

УДК 624.04

О.Н. Скляр

СЖАТИЕ (растяжение) УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Среди литературы, посвященной решению задачи о равновесии упругого параллелепипеда отметим [1], в которой дается применение вариационного уравнения Кастилиано.

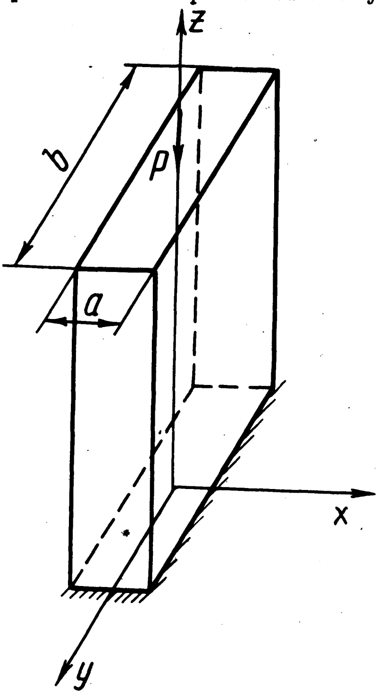

Рис. 1. Сжатие прямоугольного параллелепипеда, закрепленного в основании продольной нагрузкой.

В настоящей статье к решению задачи о равновесии упругого параллелепипеда применяется вариационное уравнение Лагранжа [2]. При этом заранее точно выполняются все краевые условия на четырех боковых гранях параллелепипеда, а на остальных двух условия выполняются за счет решения обыкновенного дифференциального уравнения, составленного на основе вариационного принципа Лагранжа.

Рассмотрим сжатие (растяжение) параллелепипеда продольной нагрузкой P. Стороны основания параллелепипеда равны a и b. Систему координат расположим, как указано на рис. 1.

Ряды аппроксимирующих функций для данного случая запишутся

$$U = xU_{10} + xy^2U_{12} + x^3U_{30};$$

$$V = yV_{01} + x^2yV_{21} + y^3V_{03};$$

$$W = W_{00} + x^2W_{20} + y^2W_{02}.$$

Условия отсутствия нагрузки на боковых гранях

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad \text{при } x = \pm\frac{a}{2};$$

$$\sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } y = \pm\frac{b}{2};$$

Исходя из этих условий запишем уравнения, в которые будут входить компоненты рядов аппроксимирующих функций

$$\sigma_x = \gamma G\frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \gamma G(U_{10} + y^2U_{12} + 3x^2U_{30}) + \gamma_2 G(V_{01} + x^2V_{21} + 3y^2V_{03} + W'_{00} + x^2W'_{20} + y^2W'_{02});$$

$x = \pm\frac{a}{2}$

при y^0: $\gamma\left(U_{10} + \frac{3}{4}a^2U_{30}\right) + \gamma_2\left(V_{01} + \frac{a^2}{4}V_{21} + W'_{00} + \frac{a^2}{4}W'_{20}\right) = 0;$

при y^2: $\gamma U_{12} + \gamma_2(3V_{03} + W'_{02}) = 0;$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = G(2xyU_{12} + 2xyV_{21});$$

$$U_{12} + V_{21} = 0 \quad \text{т.е.} \quad U_{12} = -V_{21};$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) = G(xU'_{10} + xy^2U'_{12} + x^3U'_{30} + 2xW_{20}).$$

$x = \pm\frac{a}{2}$

при y^0: $U'_{10} + \frac{a^2}{4}U'_{30} + 2W_{20} = 0;$

при y^2: $U'_{12} = 0$, т.е. $U_{12} = C;$

$$\sigma_y = \gamma G \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \gamma G(V_{01} + x^2 V_{21} + 3y^2 V_{03}) + \gamma_2 G(U_{10} + y^2 U_{12} + 3x^2 U_{30} + W'_{00} + x^2 W'_{20} + y^2 W'_{02}).$$

$y = \pm\frac{b}{2}$

при x^0 $\left|\ \gamma V_{01} + \frac{3}{4}\gamma b^2 V_{03} + \gamma_2 \left(U_{10} + \frac{b^2}{4} U_{12} + W'_{00} + \frac{b^2}{4} W'_{02}\right) = 0;\right.$

при x^2 $\left|\ \gamma V_{21} + 3\gamma_2 U_{30} + \gamma_2 W'_{00} = 0;\right.$

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) = G(yV'_{01} + x^2 y V'_{21} + y^3 V'_{03} + 2y W_{02}).$$

$y = \pm\frac{b}{2}$

при x^0 $\left|\ V'_{01} + \frac{b^2}{4} V'_{03} + 2W_{02} = 0;\right.$

при x^2 $\left|\ V'_{21} = 0,\right.$ т.е. $V_{21} = -C.$

Для замкнутости системы шести уравнений с семью неизвестными составим вариационное уравнение, которое выражает равенство нулю работы всех действующих на данное тело сил на возможных перемещениях: $\delta U = 0$; $\delta V = 0$; $\delta W = 1$.

В общем случае вариационное уравнение имеет вид [2]

$$\iiint_V \left(K - \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right) \delta \bar{u}\, dV - \iiint_V T \cdot\cdot\, \delta E\, dV + \iint_S \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u}\, dS = 0.$$

Для данного случая $\delta w = 1$

$$\frac{d}{dz} \int_F \sigma_z \, dF = 0$$

Подставим в это уравнение σ_z по формуле

$$\sigma_z = \gamma G \frac{\partial W}{\partial z} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

тогда после преобразований получим

$$\gamma\left(W''_{00}+\frac{a^2}{12}W''_{20}+\frac{b^2}{12}W''_{02}\right)+\gamma_2\left(U'_{10}+\frac{a^2}{4}U'_{30}+V'_{01}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{4}V'_{03}\right)=0\ .$$

Учитывая, что $U_{12}=-V_{21}=C$, все предыдущие уравнения перепишутся следующим образом:

$$\gamma\left(U_{10}+\frac{3}{4}a^2U_{30}\right)+\gamma_2\left(V_{01}-\frac{a^2}{4}C+W'_{00}+\frac{a^2}{4}W'_{20}\right)=0;$$

$$\gamma C+\gamma_2\left(3V_{03}+W'_{02}\right)=0\ ;$$

$$U'_{10}+\frac{a^2}{4}U'_{30}+2W_{20}=0\ ;$$

$$\gamma\left(V_{01}+\frac{3}{4}b^2V_{03}\right)+\gamma_2\left(U_{10}+\frac{b^2}{4}C+W'_{00}+\frac{b^2}{4}W'_{02}\right)=0;$$

$$-\gamma C+\gamma_2\left(3U_{30}+W'_{20}\right)=0\ ;$$

$$V'_{01}+\frac{b^2}{4}V'_{03}+2W_{02}=0\ ;$$

$$\gamma\left(W''_{00}+\frac{a^2}{12}W''_{20}+\frac{b^2}{12}W''_{02}\right)+\gamma_2\left(U'_{10}+\frac{a^2}{4}U'_{30}+V'_{01}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{4}V'_{03}\right)=0\ .$$

Определение компонентов перемещения сводится к решению полученной системы. Решая данную систему методом подстановки, получим три уравнения, записанные операторным методом:

$$\begin{cases}\gamma\left(d_z^2W_{00}+\dfrac{a^2}{12}d_z^2W_{20}+\dfrac{b^2}{12}d_z^2W_{02}\right)-2\gamma_2\left(W_{20}+W_{02}\right)=0;\\ \left[\dfrac{(\gamma-6)a^2}{12}d_z^2-2\gamma\right]W_{20}+\gamma_2\left(\dfrac{b^2}{12}d_z^2-2\right)W_{02}=-\gamma_2d_z^2W_{00};\\ \gamma_2\left(\dfrac{a^2}{12}d_z^2-2\right)W_{20}+\left[\dfrac{(\gamma-6)b^2}{12}d_z^2-2\gamma\right]W_{02}=-\gamma_2d_z^2W_{00}\ .\end{cases}$$

Из двух последних уравнений системы выразим W_{20} и W_{02}

$$W_{20}=\frac{6\gamma_2(b^2d_z^4+12\,d_z^2)\,W_{00}}{-(\gamma-4)a^2b^2\,d_z^4+6(\gamma+2)(a^2+b^2)\,d_z^2+288(\gamma-1)};$$

$$W_{02}=\frac{6\gamma_2(a^2d_z^4+12d_z^2)\,W_{00}}{-(\gamma-4)a^2b^2d_z^4+6(\gamma+2)(a^2+b^2)\,d_z^2+288(\gamma-1)}.$$

Подставляем выражения W_{20} и W_{02} в первое уравнение системы

$$d_z^2\left[d_z^4+\frac{24(\gamma-1)(a^2+b^2)}{\gamma a^2\,b^2}d_z^2+\frac{144(3\gamma-4)}{\gamma a^2\,b^2}\right]W_{00}=0\,.$$

Характеристическое уравнение последнего выражения

$$\alpha^4-\frac{24(\gamma-1)\,(a^2+b^2)}{\gamma a^2\,b^2}\,\alpha^2+\frac{144\,(3\gamma-4)}{\gamma a^2\,b^2}=0\,.$$

Корни уравнения

$$\alpha_{1,2}^2=\frac{12\,(\gamma-1)\,(a^2+b^2)}{\gamma a^2\,b^2}\pm\frac{12}{\gamma a^2b^2}\sqrt{(\gamma-1)^2(a^2+b^2)^2-(3\gamma-4)\,\gamma\,a^2\,b^2}\,.$$

В результате нахождения корней характеристического уравнения перемещения запишутся следующим образом:

$$W_{00}=A+Bz+C_1\sin\alpha_1z+C_2\cos\alpha_1z+C_3\sin\alpha_2z+$$
$$+C_4\cos\alpha_2z\;;$$

$$W_{20}=\frac{6\gamma_2\alpha_1^2B_1}{A_1}(C_1\sin\alpha_1z+C_2\cos\alpha_1z)+$$
$$+\frac{6\gamma_2\alpha_2^2B_2}{A_2}(C_3\sin\alpha_2z+C_4\cos\alpha_2z)\,;$$

$$W_{02}=\frac{6\gamma_2\alpha_1^2A'}{A_1}(C_1\sin\alpha_1z+C_2\cos\alpha_1z)+\frac{6\gamma_2\alpha_2^2A''}{A_2}\times$$
$$\times(C_3\sin\alpha_2z+C_4\cos\alpha_2z)\,;$$

$$V_{01}=\frac{1}{4(\gamma-1)}\left\{\frac{(\gamma-1)}{\gamma_2}\left[(b^2-a^2)+(\gamma-1)(a^2+b^2)\right]C+\right.$$

$$+\frac{6\gamma_2\alpha_1^3\left[6\gamma(a^2-b^2)+a^2B_1\right]}{A_1}(C_1\cos\alpha_1 z-C_2\sin\alpha_1 z)+$$

$$+\frac{6\gamma_2\alpha_2^3\left[6\gamma(a^2-b^2)+a^2B_2\right]}{A_2}(C_3\cos\alpha_2 z-C_4\sin\alpha_2 z)-$$

$$-2\gamma_2(B+\alpha_1C_1\cos\alpha_1 z-\alpha_1C_2\sin\alpha_1 z+\alpha_2C_3\cos\alpha_2 z-$$

$$\left.-\alpha_2C_4\sin\alpha_2 z)\right\};$$

$$U_{10}=\frac{1}{4(\gamma-1)}\left\{\frac{(\gamma-1)}{\gamma_2}\left[(b^2-a^2)-(\gamma-1)(a^2+b^2)\right]C+\right.$$

$$+\frac{6\gamma_2\alpha_1^3\left[6\gamma(b^2-a^2)+b^2A'\right]}{A_1}(C_1\cos\alpha_1 z-C_2\sin\alpha_1 z)+$$

$$+\frac{6\gamma_2\alpha_2^3\left[6\gamma(b^2-a^2)+b^2A''\right]}{A_2}(C_3\cos\alpha_2 z-C_4\sin\alpha_2 z)-$$

$$-2\gamma_2(B+\alpha_1C_1\cos\alpha_1 z-\alpha_1C_2\sin\alpha_1 z+\alpha_2C_3\cos\alpha_2 z-$$

$$\left.-\alpha_2C_4\sin\alpha_2 z)\right\};$$

$$V_{03}=-\frac{\gamma}{3\gamma_2}C-\frac{2\gamma_2\alpha_1^3A'}{A_1}(C_1\cos\alpha_1 z-C_2\sin\alpha_1 z)-$$

$$-\frac{2\gamma_2\alpha_2^3A''}{A_2}(C_3\cos\alpha_2 z-C_4\sin\alpha_2 z);$$

$$U_{30}=\frac{\gamma}{3\gamma_2}C-\frac{2\gamma_2\alpha_1^3B_1}{A_1}(C_1\cos\alpha_1 z-C_2\sin\alpha_1 z)-$$

$$-\frac{2\gamma_2\alpha_2^3 B_2}{A_2}(C_3\cos\alpha_2 z - C_4\sin\alpha_2 z),$$

где $A_1 = -(\gamma-4)a^2b^2\alpha_1^4 - 6(\gamma+2)(a^2+b^2)\alpha_1^2 + 288(\gamma-1)$;

$A_2 = -(\gamma-4)a^2b^2\alpha_2^4 - 6(\gamma+2)(a^2+b^2)\alpha_2^2 + 288(\gamma-1)$;

$A' = a^2\alpha_1^2 - 12$; $A'' = a^2\alpha_2^2 - 12$; $B_1 = b^2\alpha_1^2 - 12$; $B_2 = b^2\alpha_2^2 - 12$.

Пример 1. Определить компоненты напряженного состояния прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого a и b и высота h при условии, что $\sigma_z = -p$ при $z = h$.

Решение. При $z = 0$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Так как $W_{00} = W_{20} = W_{02} = 0$, то нетрудно заметить, что $A = C = C_2 = C_4 = 0$.

Далее $\sigma_z = \gamma G\frac{\partial W}{\partial z} + \gamma_2 G\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \gamma G(W'_{00} + x^2W'_{20} + y^2W'_{02}) + \gamma_2 G(U_{10} + y^2U_{12} + 3x^2U_{30} + V_{01} + x^2V_{21} + 3y^2V_{03})$;

$$z = h\quad\begin{array}{l|l}
\text{при } x^0 & \gamma W'_{00} + \gamma_2(U_{10} + V_{01}) = -\frac{p}{G}; \\
\text{при } x^2 & \gamma W'_{20} + \gamma_2(U_{30} + V_{21}) = 0; \\
\text{при } y^2 & \gamma W'_{02} + \gamma_2(V_{03} + U_{12}) = 0.
\end{array}$$

Эти уравнения, используя значения для U_{10}, U_{30}, U_{12}, V_{01}, V_{03}, V_{21}, W'_{00}, W'_{20} и W'_{02}, перепишутся так:

$$\gamma(B + \alpha_1 C_1\cos\alpha_1 h + \alpha_2 C_3\cos\alpha_2 h) + \gamma_2\frac{1}{(\gamma-1)}\times$$

$$\times\left[\frac{3\gamma_2\alpha_1^3(a^2b^2\alpha_1^2 - 6a^2 - 6b^2)}{A_1}C_1\cos\alpha_1 h +\right.$$

$$+\frac{3\gamma_2\alpha_2^3(a^2b^2\alpha_2^2-6a^2-6b^2)}{A_2}C_3\cos\alpha_2 h-$$

$$\left.-\gamma_2(B+\alpha_1C_1\cos\alpha_1 h+\alpha_2C_3\cos\alpha_2 h)\right]=-\frac{p}{G}; \qquad (1)$$

$$\frac{12\gamma_2\alpha_1^3B_1}{A_1}C_1\cos\alpha_1 h+\frac{12\gamma_2\alpha_2^3B_2}{A_2}C_3\cos\alpha_2 h=0;(2)$$

$$\frac{12\gamma_2\alpha_1^3A'}{A_1}C_1\cos\alpha_1 h+\frac{12\gamma_2\alpha_2^3A''}{A_2}C_3\cos\alpha_2 h=0. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $C_1=C_3=0$, из уравнения (1) находим B

$$B=-\frac{p}{G}\frac{(\gamma-1)}{(3\gamma-4)}.$$

В итоге имеем $\sigma_x=\sigma_y=0$; $\sigma_z=-p$; $\tau_{xz}=\tau_{yz}=\tau_{xy}=0$.

Пример 2. Условие примера 1, но $\sigma_z=-p-p_1x^2-p_2y^2$ при $z=h$.

Решаем аналогично предыдущему.

$A=C=C_2=C_4=0$ (см. пример 1). Далее имеем

$z=h$

при x^0 $\qquad \gamma W'_{00}+\gamma_2(U_{10}+V_{01})=-\frac{p}{G};$

при x^2 $\qquad \gamma W'_{20}+\gamma_2(3U_{30}+V_{21})=-\frac{p_1}{G};$

при y^2 $\qquad \gamma W'_{02}+\gamma_2(3V_{03}+U_{12})=-\frac{p_2}{G}$

или $\gamma(B+\alpha_1C_1\cos\alpha_1 h+\alpha_2C_3\cos\alpha_2 h)+\gamma_2\frac{1}{(\gamma-1)}\times$

$$\times\left[\frac{3\gamma_2\alpha_1^3(a^2b^2\alpha_1^2-6a^2-6b^2)}{A_1}C_1\cos\alpha_1 h+\right.$$

$$+\frac{3\gamma_2\alpha_2^3(a^2b^2\alpha_2^2-6a^2-6b^2)}{A_2}C_3\cos\alpha_2 h-$$

$$-\gamma_2 (B + \alpha_1 C_1 \cos \alpha_1 h + \alpha_2 C_3 \cos \alpha_2 h)\Big] = -\frac{p}{G}; \qquad (1')$$

$$\frac{12\gamma_2 \alpha_1^3 B_1}{A_1} C_1 \cos \alpha_1 h + \frac{12\gamma_2 \alpha_2^3 B_2}{A_2} C_3 \cos \alpha_2 h = -\frac{p_1}{G}; \qquad (2')$$

$$\frac{12\gamma_2 \alpha_1^3 A'}{A_1} C_1 \cos \alpha_1 h + \frac{12\gamma_2 \alpha_2^3 A''}{A_2} C_3 \cos \alpha_2 h = -\frac{p_1}{G}. \qquad (3')$$

Из уравнений $(2')$ и $(3')$ находим C_1 и C_3, а затем из уравнения $(1')$ – B:

$$C_1 = \frac{A_1(-p_1 A'' + p_2 B_2)}{144\gamma_2 \alpha_1^3 \cos \alpha_1 h (a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) G};$$

$$C_3 = \frac{A_2(p_1 A' - p^2 B_1)}{144\gamma_2 \alpha_2^3 \cos \alpha_2 h (a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) G};$$

$$B = -\frac{p(\gamma - 1)}{6(3\gamma - 4)} - \frac{(p_1 A'' + p_2 B_2)\left[3\gamma_2^2 \alpha_1^2 (a^2 b^2 \alpha_1^2 - 6a^2 - 6b^2) + \right.}{144\gamma_2 (3\gamma - 4)\alpha_1^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \times$$

$$\times \frac{\left. + (3\gamma - 4) A_1\right]}{(a^2 - b^2) G} + \frac{(p_1 A' - p_2 B_1)\left[3\gamma_2^2 \alpha_2^2 (a^2 b^2 \alpha_2^2 - 6a^2 - 6b^2) + \right.}{144\gamma_2 (3\gamma - 4)\alpha_2^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \times$$

$$\times \frac{\left. + (3\gamma - 4) A_1\right]}{(a^2 - b^2) G}.$$

Значения σ_x, σ_y, τ_{xz} и τ_{yz} после очевидных преобразований следующие:

$$\sigma_x = \left\{ -p_1 \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} + \frac{B_1(-p_1 A'' + p_2 B_2)}{12(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \left(\frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1 h} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2 h} \right) \right\} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right);$$

$$\sigma_y = \left\{ -p_2 \frac{\cos\alpha_1 z}{\cos\alpha_1 h} + \frac{A''(p_1 A' - p_2 B_1)}{12(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \left(\frac{\cos\alpha_2 z}{\cos\alpha_2 h} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\cos\alpha_1 z}{\cos\alpha_1 h} \right) \right\} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) ;$$

$$\tau_{xz} = \left\{ \frac{(-p_1 A'' + p_2 B_2)\, B_1}{288(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\, a^2} \left(\frac{\alpha_1 \sin\alpha_1 z}{\cos\alpha_1 h} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha_2 \sin\alpha_2 z}{\cos\alpha_2 h} \right) - \frac{p_1 \alpha_2 \sin\alpha_2 z}{24 a^2 \cos\alpha_2 h} \right\} \left(\frac{4x^3}{a^2} - x \right) ;$$

$$\tau_{yz} = \left\{ \frac{(p_1 A' - p_2 B_1)\, A''}{288(a^2 - b^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\, b^2} \left(\alpha_2 \frac{\sin\alpha_2 z}{\cos\alpha_2 h} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \alpha_1 \frac{\sin\alpha_1 z}{\cos\alpha_1 h} \right) - \frac{p_2 \alpha_1}{24 b^2} \frac{\sin\alpha_1 z}{\cos\alpha_1 h} \right\} \left(\frac{4y^3}{b^2} - y \right) .$$

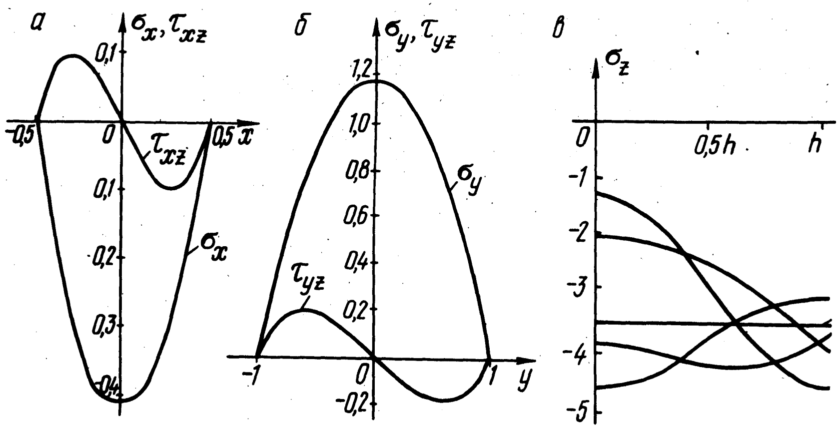

Рис. 2. Графики изменения напряжений: а – $\sigma_x(x)$ и $\tau_{xz}(x)$; б – $\sigma_y(y)$ и $\tau_{yz}(y)$; в – $\sigma_z(z)$; 0 – $\sigma_z = \frac{-P}{f} = -3{,}5$ (вычислено по элементарной теории сопротивления материалов); I – $x = y = 0$; II – $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = 0$; III – $x = 0$, $y = \pm \frac{b}{2}$; IV – $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$.

Графики изменения $\sigma_x(x)$ и $\tau_{xz}(x)$; $\sigma_y(y)$ и $\tau_{yz}(y)$ при $p=3, p_1=2, p_2=1, a=1, b=2, z=0{,}5\,h, \gamma=3$, изображены на рис. 2, а, б соответственно. Графики изменения $\sigma_z(z)$ при $p=3, p_1=2, p_2=1, a=1, b=2, \gamma=3$ изображены на рис. 2, в.

Как частный случай рассмотрим растяжение (сжатие) прямоугольного параллелепипеда продольной нагрузкой P, в основании которого лежит квадрат со стороной а.

Для квадратного сечения

$$U_{10}=V_{01};\ U_{12}=V_{21}=C=0;\ U_{30}=V_{03},\ W_{20}=W_{02}.$$

Учитывая последнее, ряды аппроксимирующих функций значительно упрощаются, т.е.

$$U=x\,U_{10}+x^3U_{30};\ V=y\,U_{10}+y^3U_{30};\ W=W_{00}+x^2W_{20}+$$
$$+y^2W_{20}.$$

Условия отсутствия нагрузки на боковых гранях следующие:

$$\sigma_x=\tau_{xy}=\tau_{xz}=0 \qquad \text{при } x=\pm\frac{a}{2}$$

Для того чтобы найти значения U_{10}, U_{30}, W_{00} и W_{20}, необходимо найти значение α^2, используя корни характеристического уравнения, где вместо b надо подставить а, тогда получим

$$\alpha^2=\frac{12(3\gamma-4)}{a^2\gamma},$$

затем упрощаем выражение для W_{00}

$$W_{00}=A+Bz+C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z.$$

Далее в формулах для U_{10}, U_{30} и W_{20} надо заменить b на а и вместо α^2 подставить значение.

В итоге получим

$$W_{00}=A+Bz+C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z;$$

$$W_{20}=-\frac{6(3\gamma-4)}{a^2(5\gamma-8)}(C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z);$$

$$U_{10}=-\frac{\gamma_2}{2(\gamma+1)}B-\frac{(3\gamma-4)}{2(5\gamma-8)}\sqrt{\frac{12(3\gamma-4)}{a^2\gamma}}(C_1\cos\alpha z-$$

$$- C_2 \sin\alpha z);$$

$$U_{30} = \frac{2(3\gamma - 4)}{a^2(5\gamma - 8)} \sqrt{\frac{12(3\gamma - 4)}{a^2\gamma}} (C_1 \cos\alpha z - C_2 \sin\alpha z).$$

Резюме. В предлагаемой статье дается приближенное решение задачи о сжатии прямоугольного параллелепипеда продольной нагрузкой с использованием вариационного уравнения Лагранжа при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на его четырех боковых гранях.

Литература

1. Ионов В.М., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

В.А. Акимов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Как известно, напряженное состояние плоской задачи теории упругости может быть выражено через две функции комплексного переменного при помощи соотношений Колосова-Мусхелишвили. В случае действия в некоторой области сосредоточенной силы в точке z_0, относительно выбранной системы координат, эти функции имеют вид

$$\varphi = \frac{x + iy}{2\pi(1+\text{æ})} \ln (z - z_0); \tag{1}$$

$$\psi = \frac{\text{æ}(X - iY)}{2\pi(1+\text{æ})} \ln (z - z_0) + \frac{\bar{z}_0 (X + iY)}{2\pi(1+\text{æ})} \frac{1}{z - z_0}, \tag{2}$$

где X и У – проекции сил на координатные оси; $\text{æ} = 3 - 4\nu$; ν – коэффициент Пуассона.

Получим вид функций φ и ψ в случае действия в фиксированной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области центра расширения. Для этого опишем вокруг этой точки окружность малого радиуса ε. Проведем через z_0 две взаимно перпендикулярные прямые. В точках z_{01}, z_{02}, z_{03} и z_{04} пересечения этих прямых с