

В качестве числового примера рассмотрен стержень из стали со следующими механическими характеристиками и размерами:

$$G = 8 \cdot 10^9 \frac{\text{кгс}}{\text{м}^2} ; \quad \rho = 7,85 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} ;$$

$$a = 1 \text{ м}; \quad \nu = 3; \quad h = 1 \text{ м}; \quad 10 \text{ м}; \quad 20 \text{ м}.$$

Для нахождения искомых частот ω составлена программа в комплексной области чисел применительно к машинам "Минск - 32" и "ЕС".

В итоге вычислений получаем результаты в сравнении с первым приближением и технической теорией (табл. 1).

Резюме. В статье дано определение спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней квадратного сечения при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на боковых гранях с помощью полиномов четвертой степени.

Л и т е р а т у р а

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 5. Минск, 1978. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

А.Е. Крушевский, канд. техн. наук,
О.Н. Скляр

ИЗГИБ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Литература, посвященная решению задачи изгиба, обширна. Достаточно указать на монографию В.Н. Ионова и П.М. Огибалова "Прочность пространственных элементов конструкций" [1], где на основе вариационного принципа Кастильяно рассмотрен изгиб упруго-пластической плиты при различных условиях на контуре (жесткое защемление, свободное опирание, свободный край).

В предлагаемой статье, к решению задачи изгиба прямоугольного параллелепипеда применяется вариационное уравнение

Лагранжа [2]. При этом точно выполняются все краевые условия на четырех боковых гранях, а на остальных двух – условия выполняются за счет решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим изгиб прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b (рис. 1).

Запишем ряды аппроксимирующих функций

$$U = xy U_{11} + x^3 y U_{31} + xy^3 U_{13} + x^3 y^3 U_{33} + xy^5 U_{15} + x^5 y U_{51};$$

$$V = V_{00} + x^2 V_{20} + y^2 V_{02} + x^2 y^2 V_{22} + x^4 V_{40} + y^4 V_{04};$$

$$W = y W_{01} + y^3 W_{03} + x^2 y W_{21} + x^4 y W_{41} + x^2 y^3 W_{23} + y^5 W_{05};$$

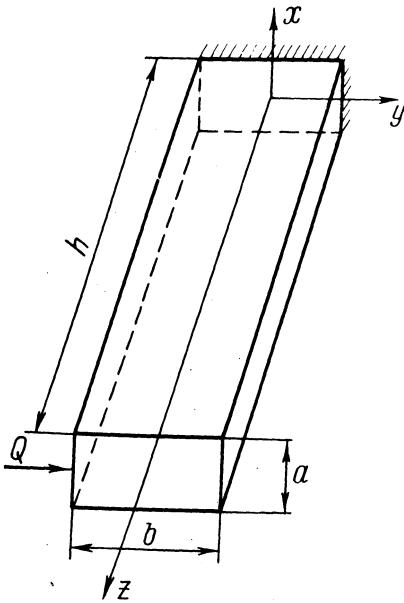


Рис. 1. Изгиб прямоугольного параллелепипеда поперечной силой.

принципа Лагранжа (вариационные уравнения).

Уравнения связей

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2};$$

$$\tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{b}{2};$$

В курсе "Сопротивления материалов" при решении задачи изгиба условие отсутствия нагрузки на боковой поверхности не выполняется. Поэтому имеет смысл построить решение задачи при тех же интегральных условиях равновесия, точно выполняя краевые условия на боковой поверхности тела, а затем сравнить его с элементарной теорией изгиба.

Для нахождения неизвестных коэффициентов рядов аппроксимирующих функций составим условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности тела (уравнения связей) и два интегральных условия равновесия внутри на основе вариационного принципа Лагранжа (вариационные уравнения).

$$\begin{aligned}
& \delta(U_{11} + \frac{3a^2}{4} U_{31} + \frac{5a^4}{16} U_{51}) + \delta_2(2V_{02} + \frac{a^2}{2} V_{22} + W'_{01} + \\
& + \frac{a^2}{4} W'_{21} + \frac{a^4}{16} W'_{41}) = 0; \delta(U_{13} + \frac{3a^2}{4} U_{33}) + \\
& + \delta_2(4V_{04} + W'_{03} + \frac{a^2}{4} W'_{23}) = 0; \delta U_{15} + \delta_2 W'_{05} = 0; \\
& \delta(2V_{02} + b^2 V_{04}) + \delta_2(W'_{01} + \frac{b^2}{4} W'_{03} + \frac{b^4}{16} W'_{05} + U_{11} + \\
& + \frac{b^2}{4} U_{13} + \frac{b^4}{16} U_{15}) = 0; 2\delta V_{22} + \delta_2(3U_{31} + \frac{3b^2}{4} U_{33} + W'_{21} + \\
& + \frac{b^2}{4} W'_{23}) = 0; 5U_{51} + W'_{41} = 0; U_{11} + 2V_{20} - \\
& - \frac{3a^2 b^2}{16} U_{33} = 0; 3U_{13} + \frac{3a^2}{4} + 2V_{22} = 0; U_{31} + \\
& + \frac{3b^2}{4} U_{33} + 4V_{04} = 0; U_{15} = 0; U_{51} = 0; U'_{11} + \\
& + \frac{a^2}{4} U'_{31} + \frac{a^4}{16} U'_{51} + 2W_{21} + a^2 W_{41} = 0; U'_{13} + \\
& + \frac{a^2}{4} U'_{33} + 2W_{23} = 0; V'_{01} + \frac{b^2}{4} V'_{02} + \frac{b^4}{16} V'_{04} + \\
& + W_{01} + \frac{3b^2}{4} W_{03} + \frac{5b^4}{16} W_{05} = 0; V'_{20} + \frac{b^2}{4} V'_{22} + \\
& + W_{21} + \frac{3b^2}{4} W_{23} = 0; V'_{40} + W_{41} = 0.
\end{aligned}$$

Вариационные уравнения

$$\frac{d}{dz} \int_F \tau_{yz} dF = 0; \quad \frac{d}{dz} \int_F y \sigma_z dF - \int_F \tau_{yz} dF = 0.$$

Исключим из уравнений связей все обобщенные перемещения, кроме U_{13} , U_{33} , W_{03} и V_{00} . Тогда вместо шестнад-

пяти уравнений связей получим лишь два уравнения неинтегрируемых (неголомомных) связей:

$$3\gamma U_{13} + \left(\frac{3\gamma a^2}{4} + \frac{3\gamma_2 b^2}{2}\right) U_{33} + \frac{\gamma_2 b^2}{4} (U_{13}'' + \frac{a^2}{3} U_{33}'') + 12\gamma_2 (C_1 z - C_3) = 0;$$

$$\begin{aligned} & V_{00}'' + \frac{b^4}{64} W_{03}''' + \frac{b^2}{2} W_{03}' - \frac{b^2}{64} \left[(5\gamma - 6)a^2 + \frac{(3\gamma - 8)b^2}{\gamma_2} \right] \times \\ & \times U_{13}'' - \frac{a^2 b^2}{256} \left[(5\gamma - 6)a^2 + 9\gamma b^2 \right] U_{33}'' + \frac{(2\gamma - 5)a^2 b^4}{512} \times \\ & \times (U_{13}^{IV} + \frac{a^2}{4} U_{33}^{IV}) + \frac{1}{4} \left[\frac{4(\gamma - 1)b^2}{\gamma_2} + \frac{3\gamma a^2}{6} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{\gamma b^2}{2} \right) \right] \times \\ & \times U_{33}'' - \frac{a^2}{2} (3\gamma + 2 + \frac{8}{\gamma_2}) C_1 = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; $\gamma_2 = \gamma - 2$; ν - коэффициент Пуассона.

Искомые напряжения в результате указанного исключения обобщенных перемещений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x = G\gamma \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) & \left[3\gamma_2 U_{13} + 3 \left(\frac{\gamma_2 a^2}{4} - \gamma y^2 + \frac{3\gamma b^2}{4} \right) U_{33} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_2}{2} \left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) \left(U_{13}'' + \frac{a^2}{4} U_{33}'' \right) - 12\gamma C_1 z + 12\gamma C_3 \right]; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 3G\alpha \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) U_{33}; \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = G\alpha y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left[\left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) U_{33} + 8C_1 \right]; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) & \left\{ 3x^2 \left(U_{13}' + \frac{a^2}{4} U_{33}' \right) - \left(\frac{b^2}{4} + y^2 \right) \times \right. \\ & \times \left[\frac{a^2}{32} \left(U_{13}''' + \frac{a^2}{4} U_{33}''' \right) - \frac{1}{4} W_{03}'' - \frac{\gamma}{4\gamma_2} \left(U_{13}' + \frac{3a^2}{4} U_{33}' \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{8} \left[\frac{(\gamma - 4)b^2}{\gamma_2} + \frac{3\gamma_2 a^2}{2} \right] U_{13}' + \frac{3a^2}{32} \left[\frac{\gamma_2 a^2}{2} + \frac{\gamma(\gamma - 3)}{\gamma_2} b^2 \right] \times \right\} \end{aligned}$$

$$x U'_{33} - \frac{(\delta-3)a^2 b^2}{64} (U'''_{13} + \frac{a^2}{4} U'''_{33}) - \frac{b^2}{8} W''_{03} - C_1 (3\delta-2) \frac{a^2}{4} - 5C_2 \left(\frac{b^2}{4} + y^2 \right) - 3W_{03} \} ; \quad (4)$$

$$\sigma_y = Gy \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left[\frac{4(\delta-1)}{\delta_2} U_{13} + \frac{3\delta^2 a^2}{4\delta_2} U_{33} + \left(\frac{\delta_2 x^2}{2} - \frac{\delta a^2}{8} \right) (U''_{13} + \frac{a^2}{4} U''_{33}) + 2W'_{03} \right] ; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = Gy \left\{ \left[\frac{3(\delta-1)a^2}{2} + \frac{(7\delta-10)b^2}{2\delta_2} - 3\delta_2 x^2 - 2y^2 \right] U_{13} + \right. \\ \left. + \left[\frac{3(\delta-1)a^4}{8} + \frac{3\delta(5\delta-6)a^2 b^2}{16\delta_2} - \frac{3\delta_2 a^2 x^2}{4} - \frac{9\delta_2 b^2 x^2}{4} - \frac{3\delta a^2 y^2}{4} - 3\delta_2 x^2 y^2 \right] U_{33} + \left[\frac{\delta_2 a^2 y^2}{8} - \frac{3\delta b^2 x^2}{8} - \frac{\delta x^2 y^2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(5\delta-6)a^2 b^2}{32} \right] (U''_{13} + \frac{a^2}{4} U''_{33}) + 2(y^2 - \frac{b^2}{4}) W'_{03} + \right. \\ \left. + \left[12\delta_2 x^2 - (3\delta^2 - 6\delta + 4) \frac{2a^2}{\delta_2} \right] C_1 z + \left[\frac{6\delta}{\delta_2} (\delta-1) a^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 12\delta_2 x^2 \right] C_3 + \frac{4(3\delta-4)}{\delta_2} C_4 \right\} , \quad (6) \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ - произвольные постоянные.

Как видим, напряжения выполняют условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности $x = \pm \frac{a}{2}$ и $y = \pm \frac{b}{2}$.

Полученные результаты показывают, что с математической точки зрения решение не очень усложнилось по сравнению с элементарной теорией изгиба.

С другой стороны, по мнению авторов статьи, данная теория изгиба прямоугольных стержней обладает целым рядом преимуществ по сравнению с элементарной. Во-первых, отсутствуют противоречия в построении, во-вторых, выполняются краевые как однородные, так и неоднородные условия на боковой поверхности, в-третьих, данная теория позволяет строить даль-

нейшие уточнения задачи на основе вариационного принципа Лагранжа за счет увеличения числа членов степенного ряда. Так, данная теория выполняет лишь два уравнения Коши в интегральной форме, а именно:

$$\int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dF = 0; \int \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) y dF = 0$$

и позволяет выполнить условия равенства нулю работы всех сил лишь на двух возможных перемещениях. При дальнейших уточнениях появляется возможность лучше выполнить условия Коши внутри.

Приведем конкретный пример расчета и дадим сравнение с результатами других теорий. Пусть дана консольная балка прямоугольного профиля 2×4 см, длиной $h = 10$ см и нагружена на конце поперечной силой $Q = 5$ кг. Тогда вследствие свободной деформации при $z = 0$ $V = 0, \sigma_z = 0$ имеем $C_3 = C_4 = C_6 = 0$. При $z = h$ $\int \tau_{yz} dF = Q; \frac{d}{dz} \int \sigma_z y dF = Q$.

Исследование вариационных уравнений показывает, что основное влияние оказывает частное решение неоднородных уравнений. Эти частные решения для U_{13}, U_{33} и W_{03} в случае консоли определяются линейными функциями вида:

$$U_{13} = A z; U_{33} = B z; W_{03} = C.$$

Постоянные A, B, C и C_1 определяются из двух вариационных уравнений, уравнения связи и условия равенства нулю обобщенной силы

$$P_{11} = \int \tau_{xz} x y dF = 0.$$

Постоянную C_2 для простоты обращаем в нуль. В данном примере эти постоянные равны:

$$A = 1,685 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}; B = 0,517 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}; C_1 = 2,04 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}; C = -160,46 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{G}.$$

Полученные значения постоянных позволяют вычислить напряжения и построить графики их изменения (рис. 2, а, б).

Сравнительная таблица значений τ_{yz} , вычисленных по различным теориям

Таблица 1.

Условие	Формула		
	(4)	(99)*	$\tau_{yz} = \frac{3Q}{2F}$ (по эл.теории сопротивления материалов)
$x = \frac{a}{2}; y = 0$	0,963391	1,303	0,9375
$x = y = 0$	0,950176	0,80785	0,9375

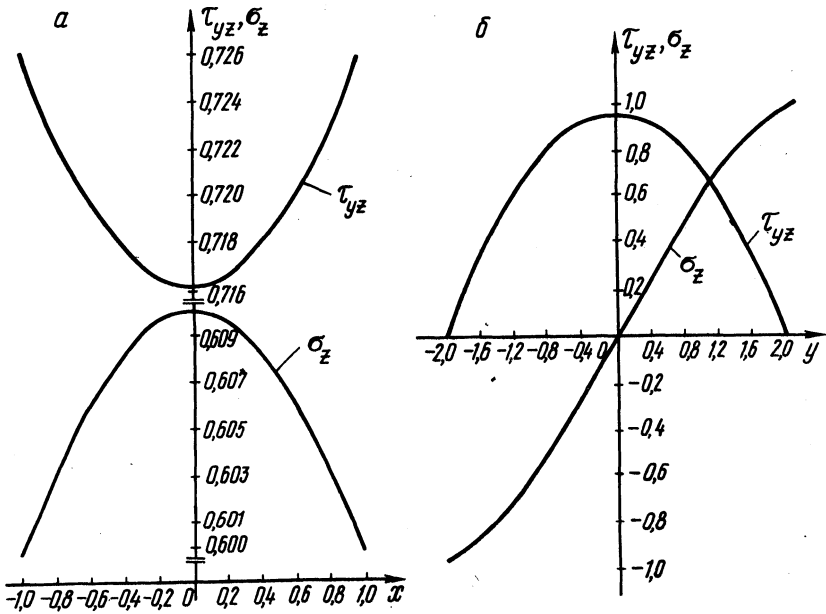


Рис. 2. Графики изменения напряжений: а - $\frac{\tau_{yz}(x)}{\sigma_z(x)}$ при $y=1$; б - $\frac{\tau_{yz}(y)}{\sigma_z(y)}$ при $x=0,5$.

Резюме. В статье рассмотрен изгиб прямоугольного параллелепипеда при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности с применением вариационного уравнения Лагранжа.

* См. учебник [3] стр. 146.

Л и т е р а т у р а

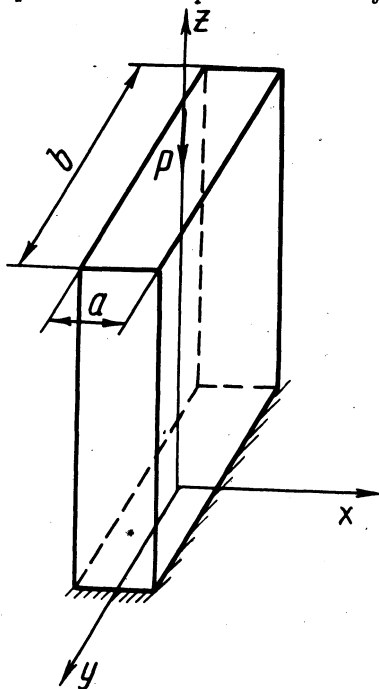
1. Ионов В.М., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967. 3. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев, 1972.

УДК 624.04

О.Н. Скляр

СЖАТИЕ (растяжение) УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Среди литературы, посвященной решению задачи о равновесии упругого параллелепипеда отметим [1], в которой дается применение вариационного уравнения Кастилиано.



В настоящей статье к решению задачи о равновесии упругого параллелепипеда применяется вариационное уравнение Лагранжа [2]. При этом заранее точно выполняются все краевые условия на четырех боковых гранях параллелепипеда, а на остальных двух условия выполняются за счет решения обыкновенного дифференциального уравнения, составленного на основе вариационного принципа Лагранжа.

Рассмотрим сжатие (растяжение) параллелепипеда продольной нагрузкой P . Стороны основания параллелепипеда равны a и b . Систему координат расположим, как указано на рис. 1.

Ряды аппроксимирующих функций для данного случая запишутся

Рис. 1. Сжатие прямоугольного параллелепипеда, закрепленного в основании продольной нагрузкой.