

возможность выбора не только необходимого размера выпускного отверстия, но и конструкции бункера в целом, которая обеспечит равномерное истечение материала с заданными физико-механическими свойствами.

Резюме. Использование зависимости (9) позволяет свести расчеты сводообразований в бункерах до практического и инженерного применения.

УДК 621.928.6

Н.И. Горбач, канд. техн. наук,
В.В. Невеличук

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В СВОБОДНОЙ ВОЗДУШНОЙ СТРУЕ

Одной из технологических операций производства гравия и гравийного щебня является разделение (сепарация) песчано-гравийной смеси на фракции размером до 5 мм – песок и более крупные фракции – гравий и щебень. В последнее время для этих целей применяются самоходные обогатительные установки, которые позволяют производить отсев песка непосредственно в карьере путем сепарации песчано-гравийной смеси в свободной воздушной струе [1].

С целью обоснования параметров сепарационной камеры установки, установления зоны сепарации и влияния на эффективность сепарации аэродинамических характеристик сепарируемого материала, скорости и толщины воздушного потока, а также угла встречи материала с воздушным потоком требуется проведение как экспериментальных, так и теоретических исследований.

В упрощенной модели теоретические исследования можно свести к определению траекторий и дальности полета частиц разного размера под воздействием воздушного потока, в котором на частицу действуют сила тяжести G и сила аэродинамического давления F_a воздуха.

Направление вектора силы \bar{F}_a противоположно направлению вектора относительной скорости \bar{v}_r движения частицы по отношению к воздушному потоку, а ее модуль определяется формулой

$$F_a = \psi S \frac{\rho v_r^2}{2}, \quad (1)$$

где ψ - коэффициент сопротивления движению частицы; S - площадь миделева сечения; ρ - плотность воздуха.

Поместив начало координат XOY в верхней кромке воздушного патрубка и направив ось OY вдоль потока воздуха, а ось OX перпендикулярно к потоку (рис. 1), составим дифференциальные уравнения движения частицы в указанных осях

$$m \dot{v}_x = G \cos \alpha - F_a \sin \theta; \quad (2)$$

$$m \dot{v}_y = -G \sin \alpha + F_a \cos \theta, \quad (3)$$

где α - угол наклона патрубка к горизонту, а

$$\sin \theta = \frac{|v_{rx}|}{v_r}; \quad \cos \theta = \frac{|v_{ry}|}{v_r}. \quad (4)$$

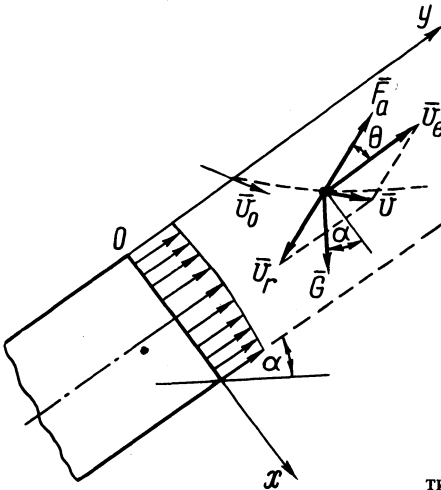


Рис. 1. Схема сил, действующих на частицу в воздушном потоке.

Так как абсолютная скорость частицы $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, то проекции относительной скорости \vec{v}_r на оси координат

$$|v_{rx}| = v_x; \quad |v_{ry}| = |v_e - v_y|. \quad (5)$$

Используя (1), (4) и (5), уравнения (2) и (3) примут вид

$$\dot{v}_x = g \cos \alpha - \frac{\psi S \rho}{2m} v_x \sqrt{v_x^2 + (v_e - v_y)^2}; \quad (6)$$

$$\dot{v}_y = -g \sin \alpha + \frac{\psi S \rho}{2m} (v_e - v_y) \sqrt{v_x^2 + (v_e - v_y)^2}. \quad (7)$$

Решение этих уравнений в таком виде возможно только численным методом, который не дает общих теоретических представлений о факторах, влияющих на характер движения частиц.

Чтобы получить их аналитическое решение и сделать некоторые теоретические выводы, введем следующие допущения.

1. Средняя скорость воздуха в струе по высоте патрубка в пределах длины начального участка [2] отличается незначительно от средней скорости при выходе из патрубка, т. е. на расстоянии от патрубка до 1,0 м $v_e = \text{const}$.

2. Величина коэффициента ψ для данной частицы остается все время одинаковой и равной коэффициенту сопротивления для случая ее витания в вертикальном потоке. Так как в случае витания сила аэродинамического давления $F_a =$

$= \psi S \frac{\rho v_s^2}{2}$ и сила тяжести частицы $G = mg$ уравновешены, то

$$\frac{\psi S \rho}{2m} = \frac{g}{v_s^2} = k_{\Pi}, \quad (8)$$

где k_{Π} - коэффициент парусности частицы, который является обобщенным параметром, характеризующим ее аэродинамические свойства; v_s - скорость витания частицы.

3. Проекция относительной скорости \bar{v}_r частицы на ось Y значительно больше проекции этой скорости на ось X . Поэтому

$$v_r = \sqrt{v_x^2 + (v_e - v_y)^2} \cong v_e - v_y. \quad (9)$$

Преобразуем уравнения (6.) и (7) с учетом принятых допущений

$$\dot{v}_x = k_{\Pi} \left[v_s^2 \cos \alpha - v_x (v_e - v_y) \right]. \quad (10)$$

$$\dot{v}_y = k_{\Pi} \left[(v_e - v_y)^2 - v_s^2 \sin \alpha \right]. \quad (11)$$

Проинтегрировав уравнение (11) при начальных условиях движения $v_y = v_{y0}$ и $Y = Y_0$, получим соответственно аналитические выражения скорости v_y и закона движения час-

тицы по оси Y в зависимости от угла наклона потока, аэродинамических свойств частицы и времени ее пребывания в потоке

$$v_y = v_e - \frac{v_s \sqrt{\sin \alpha} [v_s \sqrt{\sin \alpha} \operatorname{sh} kt + (v_e - v_{oy}) \operatorname{ch} kt]}{v_s \sqrt{\sin \alpha} \operatorname{ch} kt + (v_e - v_{oy}) \operatorname{sh} kt}; \quad (12)$$

$$y = y_o + v_e t - \frac{1}{k_{\Pi}} \ln \left(\operatorname{ch} kt + \frac{v_e - v_{oy}}{v_s \sqrt{\sin \alpha}} \operatorname{sh} kt \right), \quad (13)$$

где $k = v_s \sqrt{\sin \alpha} k_{\Pi}$.

Из выражения (12) следует, что при $t=0$ $v_y = v_{oy}$. С увеличением времени t скорость v_y возрастает и в пределе при $t = \infty$ частица будет иметь максимальную скорость движения в воздушном потоке

$$v_{y \max} = v_e - v_s \sqrt{\sin \alpha}. \quad (14)$$

Так как с увеличением диаметра частиц их скорость витания увеличивается, а максимальная скорость движения в потоке уменьшается, то они быстрее будут выпадать из потока по сравнению с более мелкими частицами. Для весьма мелких частиц (песчинок) максимальная скорость движения является близкой к скорости воздуха и они практически будут двигаться до тех пор, пока скорость в свободной воздушной струе на некотором расстоянии от патрубка не станет равной нулю.

Формулы (12) и (13) позволяют при известном времени пребывания частицы в потоке определить скорость ее движения в момент выхода из потока и дальность полета. Однако в случае горизонтального расположения патрубка, когда $\alpha = 0$, в таком виде эти формулы не применимы для указанных целей. Чтобы получить выражения v_y и y для горизонтального потока, разложим в (12) и (13) $\operatorname{sh} kt$ и $\operatorname{ch} kt$ в ряд Тейлора и положим в этом разложении $\alpha = 0$.

Так, если ограничиться первыми двумя членами разложения, то выражение для v_y и y будут соответственно иметь вид

$$v_y = v_e - \frac{v_s^2 \sin \alpha (k_{\Pi}^2 t + \frac{1}{6} v_s^2 \sin \alpha k_{\Pi}^3 t^3) +}{1 + \frac{1}{2} v_s^2 \sin \alpha k_{\Pi}^2 t^2 + (v_e - v_{oy}) (k_{\Pi} t +$$

$$\frac{+(v_e - v_{oy})(1 + \frac{1}{2}v_s^2 \sin^2 \alpha k_n^2 t^2)}{+ \frac{1}{6}v_s^2 \sin^2 \alpha k_n^3 t^3} ; \quad (15)$$

$$y = y_o + v_e t - \frac{1}{k_n} \ln \left[1 + (v_e - v_{oy})k_n t + \frac{1}{2}v_s^2 \sin^2 \alpha k_n^2 t^2 + \frac{1}{6}v_s^2 (v_e - v_{oy}) \sin^2 \alpha k_n^3 t^3 \right] . \quad (16)$$

Тогда для горизонтального потока при $\alpha=0$

$$v_y = v_e - \frac{(v_e - v_{oy})}{1 + (v_e - v_{oy})k_n t} ; \quad (17)$$

$$y = y_o + v_e t - \frac{1}{k_n} \ln \left[1 + (v_e - v_{oy})k_n t \right] . \quad (18)$$

Точно такой же результат получается, если дифференциальное уравнение (11) решить, приняв в нем $\alpha=0$.

Интегрирование дифференциального уравнения (10) также не представляет больших математических трудностей. Для этого подставим в (10) вместо v_y выражение (12) и применим метод подстановки, заменив v_x произведением некоторых двух переменных z и p , т.е. $v_x = z \cdot p$. Затем после интегрирования при начальной скорости $v_x = v_{ox}$ и соответствующих преобразований получим аналитическое выражение скорости движения частицы вдоль оси X

$$v_x = \frac{v_s \cos \alpha \left[v_s \sqrt{\sin^2 \alpha} \operatorname{sh} kt + (v_e - v_{oy}) \operatorname{ch} kt \right]}{\sqrt{\sin^2 \alpha} \left[v_s \sqrt{\sin^2 \alpha} \operatorname{ch} kt + (v_e - v_{oy}) \operatorname{sh} kt \right]} + \frac{v_s \sqrt{\sin^2 \alpha} \left[v_{ox} - (v_e - v_{oy}) \operatorname{ctg} \alpha \right]}{v_s \sqrt{\sin^2 \alpha} \operatorname{ch} kt + (v_e - v_{oy}) \operatorname{sh} kt} . \quad (19)$$

Так как $v_x = \frac{dx}{dt}$, то повторным интегрированием уравнения (19) найдем закон движения частицы вдоль оси X

$$x = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{k_n} \ln \left(\operatorname{ch} kt + \frac{v_e - v_{oy}}{v_s \sqrt{\sin^2 \alpha}} \operatorname{sh} kt \right) -$$

$$- \frac{[v_{ox} - (v_e - v_{oy}) \operatorname{ctg} \alpha]}{k_n \sqrt{(v_e - v_{oy})^2 - v_s^2 \sin^2 \alpha}} \ln \frac{(e^{kt} + u)(1-u)}{(e^{kt} - u)(1+u)}, \quad (20)$$

где
$$u = \sqrt{\frac{v_e - v_{oy} - v_s \sqrt{\sin \alpha}}{v_e - v_{oy} + v_s \sqrt{\sin \alpha}}}$$
.

Выражения (19) и (20) могут быть преобразованы для горизонтального потока, т.е. для случая $\alpha = 0$, тем же самым методом, который был применен для преобразования выражений (12) и (13).

Опуская промежуточные математические преобразования, приведем соответственно выражения v_x и x для случая горизонтального потока

$$v_x = \frac{v_{ox}}{1 + k_n (v_e - v_{oy})t} + \frac{gt [2 + k_n (v_e - v_{oy})t]}{2 [1 + k_n (v_e - v_{oy})t]}; \quad (21)$$

$$x = \frac{gt [2 + k_n (v_e - v_{oy})t]}{4k_n (v_e - v_{oy})} + \frac{[2v_{ox}(v_e - v_{oy}) - v_s^2] \ln [1 + k_n (v_e - v_{oy})t]}{2k_n (v_e - v_{oy})^2}. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) также можно получить, если проинтегрировать дифференциальное уравнение (10), приняв в нем $\alpha = 0$.

В качестве числового примера рассмотрено движение частицы гравия размером порядка 5 мм в воздушном потоке при следующих исходных данных скорость воздуха $v_e = 35$ м/с, скорость витания частицы $v_s = 19,6$ м/с и углах наклона воздушного патрубка $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$. Частица вводилась в готок с высоты 0,75 м и 1,05 м и имела горизонтальную скорость 1 м/с. При этих исходных данных по формулам (18) и (20) были определены координаты x и y . Все вычисления производились на ЭВМ "Минск-22М". Затем для сравнения при всех тех же исходных данных были решены на ЭВМ дифференциальные уравнения (6) и (7) усовершенствованным методом ломаных, который является модификацией метода Эй-

лера [3]. Некоторые результаты этих вычислений при падении частицы с высоты 0,75 м приведены в табл. 1, из которой видно практически полное совпадение значений x и y вычисленных по аналитическим зависимостям (13) и (20), с данными более точного численного метода решения дифференциальных уравнений (6) и (7). Это свидетельствует о правильности выбранных нами допущений при решении дифференциальных уравнений и позволяет рекомендовать формулы (12), (13), (19) и (20) для практического пользования при вычислении скорости движения, дальности полета и построении траекторий движения частиц гравия в воздушном потоке.

Анализ всех расчетных данных показывает, что наибольшая дальность полета частицы в воздушном потоке имеет место при горизонтальном расположении патрубка. При увеличении высоты падения, что приводит к увеличению вертикальной составляющей скорости ввода частицы в воздушный поток, дальность полета уменьшается. Увеличение горизонтальной сос-

Таблица 1

Угол α°	Время пребывания частицы в потоке, с	Решение уравнений (6) и (7) численным методом				Вычисления по формулам (13) и (20)	
		координаты, м		скорость, м/с		x	y
		x	y	v_x	v_y		
5°	0	0	0,3897	3,822	0,669	0	0,3837
	0,01	0,0385	0,3918	3,886	0,961	0,0385	0,3918
	0,02	0,0777	0,4029	3,950	1,247	0,0777	0,4028
	0,03	0,1175	0,4168	4,013	1,529	0,1175	0,4167
	0,04	0,1580	0,4334	4,076	1,805	0,1580	0,4333
	0,05	0,1990	0,4528	4,138	2,077	0,1991	0,4526
	0,06	0,2407	0,4750	4,201	2,345	0,2408	0,4746
	0,07	0,2831	0,4997	4,263	2,609	0,2831	0,4993
	0,08	0,3260	0,5271	4,325	2,868	0,3261	0,5265
10°	0	0	0,3792	3,782	0,349	0	0,3792
	0,01	0,0381	0,3842	3,844	0,637	0,0381	0,3841
	0,02	0,0769	0,3920	3,907	0,921	0,0769	0,3919
	0,03	0,1163	0,4026	3,969	1,199	0,1163	0,4025
	0,04	0,1563	0,4159	4,031	1,473	0,1563	0,4158
	0,05	0,1969	0,4320	4,092	1,743	0,1969	0,4318
	0,06	0,2381	0,4508	4,154	2,007	0,2382	0,4504
	0,07	0,2800	0,4721	4,215	2,268	0,2800	0,4717
	0,08	0,322	0,4961	4,276	2,524	0,3225	0,4955

тавляющей скорости ввода способствует увеличению дальности полета частицы. К такому выводу также можно придти при тщательном анализе формул (12), (13) и (17) — (22).

Резюме. Получены аналитические выражения для проекций скоростей и уравнений движения частицы в свободной воздушной струе.

Произведена оценка результатов вычислений по этим формулам путем их сравнения с данными решения на ЭВМ "Минск-22М" точной системы дифференциальных уравнений движения частицы.

Л и т е р а т у р а

1. Невеличук В.В. и др. Опыт работы Минского карьероуправления по отсеву песка в карьере и некоторые результаты исследований процесса пневматической сепарации гравийно-песчаной смеси в установке конструкции института "Гипронефть". — В сб.: Основные направления совершенствования технологии переработки нерудных строительных материалов. 1973.
2. Абрамович Г.Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. М.-Л., 1948.
3. Демидович Э.З. Численные методы анализа. М., 1962.

УДК 531.355+531.391.1

Н.И. Горбач, канд. техн. наук

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Пусть тело переменной массы, представляющее собой тяжелую однородную нерастяжимую нить с некоторым конечным постоянным массой, движется прямолинейно в вязкой среде, причем сама нить при движении соприкасается с шероховатой горизонтальной поверхностью. В этом случае масса тела будет изменяться за счет увеличения длины движущегося участка нити, а силами, действующими на него будут являться постоянная по модулю сила тяги P , сила сопротивления R среды, сила трения F_T нити о шероховатую плоскость, силы тяжести G конечника и γx участка нити, а также выталкивающая сила F и нормальная реакция N плоскости (рис. 1).