В качестве примера рассмотрим стержни с одинаковой площадью поперечного сечения, для которых техническая теория дает одни и те же результаты.

Данная уточненная теория дает результаты, которые зависят от размеров поперечного сечения стержня. Эту зависимость можно проследить по табл. 1.

Резюме. В данной статье дано определение спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней прямоугольного сечения с помощью полиномов третьей степени при условии строгого выполнения отсутствия нагрузки на боковых гранях.

Литература

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 5. Минск, 1978. 3. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

А.З. Севенюк

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КВАДРАТНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ УСЛОВИИ ТОЧНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА БОКОВЫХ ГРАНЯХ

В [1] дана постановка задачи о нахождении спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его боковой поверхности.

В качестве примера были определены собственные частоты продольных колебаний упругого параллелепипеда с квадратным поперечным сечением. При этом аппроксимация деформированного состояния поперечного сечения стержня была выполнена с помощью полиномов третьей степени. Возникает вопрос, а какова точность полученного решения, т.е. какие частоты следует считать достаточно точными? Это важно для коротких стержней, так как техническая теория продольных колебаний для них непригодна.

Поэтому в данной статье дается второе приближение решения задачи при помощи полиномов четвертой степени. Искомые упругие перемещения представляем в виде следующих конечных рядов:

$$u = xU_{10} + xy^2U_{12} + x^3U_{30};$$

$$v = yV_{01} + x^2yV_{21} + y^3V_{03};$$

$$w = W_{00} + x^2W_{20} + y^2W_{02} + x^4W_{40} + x^2y^2W_{22} + y^4W_{04}.$$

Для квадратного сечения при симметричном закреплении и нагружении относительно плрскостей XOZ и YOZ следующие обобщенные перемещения равны между собой:

$$V_{01} = U_{10};\ U_{12} = V_{21};\ V_{03} = U_{30};\ W_{20} = W_{02};\ W_{40} = W_{04}.$$

Поэтому для нахождения 7 неизвестных независимых обобщенных перемещений строим 5 дифференциальных уравнений из условия отсутствия нагрузки на боковых гранях $x = y = \pm\frac{a}{2}$ и два вариационных уравнения на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя [2] .

Указанную систему дифференциальных уравнений можно привести к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений со следующей матрицей:

W_{00}	W_{20}	W_{40}	Правая часть
0	$\frac{a^2d_z^2}{3} - 40 + \rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{20}{d_z^2}\right)$	$\frac{a^4d_z^2}{14} - 16a^2 + \rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14} - \frac{10a^2}{d_z^2}\right)$	0
$\nu d^2 + \rho\frac{\omega^2}{G}$	$\frac{\nu a^2 d_z^2}{6} - 4\nu_2 + \rho\frac{\omega^2}{G}\frac{a^2}{6}$	$\frac{\nu a^4 d_z^2}{40} - 2\nu_2 a^2 + \rho\frac{\omega^2}{G}\frac{a^4}{40}$	0
$-\nu_2 d_z^2$	$\frac{1}{6}a^2d_z^2(4-\nu) + 4(\nu-1)$	$\frac{1}{40}a^4d_z^2(6-\nu) + 2a^2(\nu-1)$	0

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений запишем форму решения для W_{20} :

$$W_{20} = A\ \mathrm{sh}\ \alpha_1 z + B\ \mathrm{sh}\ \alpha_2 z + C\ \mathrm{sh}\ \alpha_3 z ,$$

где α_1, α_2, α_3 находятся из характеристического уравнения

$$\frac{\nu a^6}{105}\alpha^6 + \left[\frac{(52\nu - 32)a^4}{21} + \rho\frac{\omega^2}{G}\ \frac{(\nu+1)a^6}{105}\right]\alpha^4 +$$

$$+\left\{(64-48\nu)a^2 + \rho\frac{\omega^2}{G}\left[\frac{(20\nu-4)a^4}{7} + \rho\frac{\omega^2}{G}\ \frac{a^6}{105}\right]\right\}\alpha^2 +$$

$$+\rho\frac{\omega^2}{G}\left[(1-\nu)16a^2 + \rho\frac{\omega^2}{G}\ \frac{(8\nu+20)a^4}{21}\right] = 0 .$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C используем условия на свободном конце стержня при $z = h$

$$\tau_{xz} = x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)\left[G\frac{W_{20}''}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)W_{40}'' - 4W_{40}\right] = 0;$$

$$\int \sigma_z\, dF = \nu G a^2 W_{00}' + 4Ga^2\left(\frac{\nu a^2}{24} - \frac{\nu_2}{d_z^2}\right)W_{20}' +$$

$$+2Ga^4\left(\frac{\nu a^2}{80} - \frac{\nu_2}{d_z^2}\right)W_{40}' = 0 .$$

Фактически эти два условия сводятся к следующим трем:

$$W_{40}'' = 0;\quad -4W_{40} + \frac{1}{3}W_{20}'' = 0;\quad \nu W_{00}' + \left(\frac{\nu a^2}{6} - \frac{4\nu_2}{d_z^2}\right)W_{20}' +$$

$$+ 2a^2\left(\frac{\nu a^2}{80} - \frac{\nu_2}{d_z^2}\right)W_{40}' = 0 .$$

Введенные условия на верхнем конце стержня обращают в нуль касательные напряжения τ_{xy} и обобщенную силу

$$N = \int \sigma_z\, dF \qquad \text{при} \quad z = h .$$

На нижнем краю стержня обращаются в нуль продольные перемещения W и касательные напряжения τ_{xz}

$$W = 0 ; \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0 .$$

Используя указанные условия на верхнем конце стержня получаем следующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{vmatrix} = 0$$

где $B_1 = -\dfrac{\dfrac{a^2\alpha_1^2}{3} - 40 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{20}{\alpha_1^2}\right)}{\dfrac{a^4\alpha_1^2}{14} - 16a^2 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^4}{14} - \dfrac{10a^2}{\alpha_1^2}\right)}\alpha_1^2 \operatorname{sh}\alpha_1 h;$

$$B_2 = -\frac{\dfrac{a^2\alpha_2^2}{3} - 40 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{20}{\alpha_2^2}\right)}{\dfrac{a^4\alpha_2^2}{14} - 16a^2 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^4}{14} - \dfrac{10a^2}{\alpha_2^2}\right)}\alpha_2^2 \operatorname{sh}\alpha_2 h;$$

$$B_3 = -\frac{\dfrac{a^2\alpha_3^2}{3} - 40 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{20}{\alpha_3^2}\right)}{\dfrac{a^4\alpha_3^2}{14} - 16a^2 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^4}{14} - \dfrac{10a^2}{\alpha_3^2}\right)}\alpha_3^2 \operatorname{sh}\alpha_3 h;$$

$$B_4 = \frac{\dfrac{a^2\alpha_1^2}{3} - 40 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{20}{\alpha_1^2}\right)}{\dfrac{a^4\alpha_1^2}{14} - 16a^2 + \rho\dfrac{\omega^2}{G}\left(\dfrac{a^4}{14} - \dfrac{10a^2}{\alpha_1^2}\right)} 4 \operatorname{sh}\alpha_1 h + \frac{1}{3}\alpha_1^2 \operatorname{sh}\alpha_1 h;$$

$$B_5=\frac{\frac{a^2\alpha_2^2}{3}-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_2^2}\right)}{\frac{a^4\alpha_2^2}{14}-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_2^2}\right)}4\,\mathrm{sh}\,\alpha_2h+\frac{1}{3}\alpha_2^2\,\mathrm{sh}\,\alpha_2h;$$

$$B_6=\frac{\frac{a^2\alpha_3^2}{3}-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_3^2}\right)}{\frac{a^4\alpha_3^2}{14}-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_3^2}\right)}4\,\mathrm{sh}\,\alpha_3h+\frac{1}{3}\alpha_3^2\,\mathrm{sh}\,\alpha_3h;$$

$$B_7=\frac{\nu}{\nu_2\alpha_1}\left\{\left[\frac{1}{6}a^2\alpha_1^2(4-\nu)+4(\nu-1)\right]-\left[\frac{1}{40}a^4\alpha_1^2(6-\nu)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2a^2(\nu-1)\right]\frac{\frac{a^2\alpha_1^2}{3}-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_1^2}\right)}{\frac{a^4\alpha_1^2}{14}-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_1^2}\right)}\right\}\mathrm{ch}\,\alpha_1h+$$

$$+\left(\frac{\nu a^2}{6}-\frac{4\nu_2}{\alpha_1^2}\right)\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_1h-2a^2\left(\frac{\nu a^2}{80}-\frac{\nu_2}{\alpha_1^2}\right)\frac{\frac{a^2\alpha_1^2}{3}-40+}{\frac{a^4\alpha_1^2}{14}-16a^2+}\cdots\rightarrow$$

$$\frac{+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_1^2}\right)}{+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_1^2}\right)}\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_1h;$$

$$B_8=\frac{\nu}{\nu_2\alpha_2}\left\{\left[\frac{1}{6}a^2\alpha_2^2(4-\nu)+4(\nu-1)\right]-\left[\frac{1}{40}a^4\alpha_2^2(6-\nu)+2a^2(\nu-1)\right]\frac{\frac{a^2\alpha_2^2}{3}-40+\rho\frac{\omega_2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_2^2}\right)}{\frac{a^4\alpha_2^2}{14}-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_2^2}\right)}\right\}\operatorname{ch}\alpha_2 h+$$

$$+\left(\frac{\nu a^2}{6}-\frac{4\nu_2}{\alpha_2^2}\right)\alpha_2\operatorname{ch}\alpha_2 h-2a^2\left(\frac{\nu a^2}{80}-\frac{\nu_2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\frac{a^2\alpha_2^2}{3}-}{\frac{a^4\alpha_2^2}{14}-}\times$$

$$\times\frac{-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_2^2}\right)}{-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_2^2}\right)}\alpha_2\operatorname{ch}\alpha_2 h;$$

$$B_9=\frac{\nu}{\nu_2\alpha_3}\left\{\left[\frac{1}{6}a^2\alpha_3^2(4-\nu)+4(\nu-1)\right]-\left[\frac{1}{40}a^4\alpha_3^2(6-\nu)+2a^2(\nu-1)\right]\frac{\frac{a^2\alpha_3^2}{3}-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_3^2}\right)}{\frac{a^4\alpha_3^2}{14}-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_3^2}\right)}\right\}\operatorname{ch}\alpha_3 h+$$

$$+\left(\frac{\nu a^2}{6}-\frac{4\nu_2}{\alpha_3^2}\right)\alpha_3\operatorname{ch}\alpha_3 h-2a^2\left(\frac{\nu a^2}{80}-\frac{\nu_2}{\alpha_3^2}\right)\frac{\frac{a^2\alpha_3^2}{3}-}{\frac{a^4\alpha_3^2}{14}-}\cdots\rightarrow$$

$$\frac{-40+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{20}{\alpha_3^2}\right)}{-16a^2+\rho\frac{\omega^2}{G}\left(\frac{a^4}{14}-\frac{10a^2}{\alpha_3^2}\right)}\alpha_3\operatorname{ch}\alpha_3 h.$$

Таблица 1.

h,м	ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Техническая теория	7852	23556	39261	54965	70670	86374	102078	117783	133487	149191
	1-е приближение	7761	21274	37783	46400	62260	79076	96134	113288	130492	147725
	2-е приближение	7722	20012	24046	25286	33302	41704	43390	46736	55390	58210
10	Техническая теория	785	2356	3926	5496	7067	8637	10208	11778	13349	14919
	1-е приближение	785	2354	3917	5468	7003	8506	9046	10004	11428	12779
	2-е приближение	785	2352	3910	5452	6966	8440	9852	11180	12580	12856
20	Техническая теория	393	1178	1963	2748	3533	4319	5104	5889	6674	7459
	1-е приближение	393	1178	1962	2746	3527	4306	5082	5854	6622	7384
	2-е приближение	393	1178	1962	2744	3522	4298	5068	5834	6590	7338

В качестве числового примера рассмотрен стержень из стали со следующими механическими характеристиками и размерами:

$$G = 8 \cdot 10^9 \ \frac{\text{кгс}}{\text{м}^2} \ ; \quad \rho = 7{,}85 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \ ;$$

$$a = 1 \text{ м}; \ \nu = 3; \ h = 1 \text{ м}; \ 10 \text{ м}; \ 20 \text{ м}.$$

Для нахождения искомых частот ω составлена программа в комплексной области чисел применительно к машинам "Минск - 32" и "ЕС".

В итоге вычислений получаем результаты в сравнении с первым приближением и технической теорией (табл. 1).

Резюме. В статье дано определение спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней квадратного сечения при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на боковых гранях с помощью полиномов четвертой степени.

Литература

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 5. Минск, 1978. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

А.Е. Крушевский, канд. техн. наук,
О.Н. Скляр

ИЗГИБ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Литература, посвященная решению задачи изгиба, обширна. Достаточно указать на монографию В.Н. Ионова и П.М. Огибалова "Прочность пространственных элементов конструкций" [1], где на основе вариационного принципа Кастильяно рассмотрен изгиб упруго-пластической плиты при различных условиях на контуре (жесткое защемление, свободное опирание, свободный край).

В предлагаемой статье, к решению задачи изгиба прямоугольного параллелепипеда применяется вариационное уравнение