пластичным смазкам с весьма пологой вязко-температурной кривой (например, 1-13), а меньшие - ньютоновским индустриальным маслам. Для большинства смазочных сред ψ_b и ψ_m (1- 6) обычно одного и того же порядка и, как правило, оба эти фактора необходимо принимать во внимание.

Резюме. Получены расчетные формулы некоторых характеристик неизотермического ламинарного щелевого течения нелинейно-вязкопластичной жидкости и установлены особенности влияния диссипации и пьезо-температурного изменения реологических свойств.

Литература

1. Пикус Ю.М. Тепловой расчет течения реологически сложных жидкостей в щелевых каналах при постоянном расходе. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 4. Минск, 1977. 2. Пикус Ю.М. Некоторые вопросы расчета неизотермического ламинарного течения реологически сложных жидкостей в щелевых каналах . - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 2. Минск, 1975. 3. Пикус Ю.М. Ламинарное течение сжимаемой реологически сложной жидкости в щелевых каналах при одновременном влиянии давления и неизотермичности. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 3, Минск, 1976.

УДК 532.135:532.5

Б.И. Лапушина, канд.техн.наук

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В [1] рассмотрены случаи, когда свойства материала и характер граничных условий таковы, что при решении квазистатических задач линейной вязко-упругости возможно разделение переменных. Тогда часть решения, которая зависит от координат, получается из решения соответствующей задачи теории упругости, а часть решения, зависящая от времени, следует из зависимости, выражаемой интегралом свертки.

Покажем, что в тех случаях, когда задача линейной вязко-упругости формулируется как задача течения и возможно разделение переменных (квазистационарное течение), решение может быть получено из решения соответствующей задачи динамики вязкой жидкости.

Сформулируем задачу квазистационарного изотермического течения несжимаемой вязко-упругой жидкости наследственного типа, описываемой уравнением

$$S = 2\int_0^t \mu(t-\tau)\ \dot{e}(\tau)\ d\tau\ . \tag{1}$$

Уравнение (1) решается совместно с уравнением равновесия

$$\operatorname{div} S = 0 \tag{2}$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} v = 0\ . \tag{3}$$

В уравнении (2) массовые силы не учитываем, силами инерции также пренебрегаем.

Течение происходит в ограниченной области. Граничными условиями для скоростей являются условия прилипания среды к поверхностям на границах. Напряжения на свободных поверхностях равны нулю.

Начальные условия считаем нулевыми (в начальный момент тело не напряжено и находится в состоянии покоя).

Основные соотношения для соответствующей задачи течения вязкой жидкости запишутся в виде:

$$S = 2\eta\dot{e}; \tag{4}$$

$$\operatorname{div} S = 0; \tag{5}$$

$$\operatorname{div} v = 0\ . \tag{6}$$

Граничные и начальные условия формулируем в таком же виде, как для задачи течения вязко-упругой жидкости.

Условие разделения переменных позволяет записать:

$$\begin{aligned} v_i(x_i,t) &= v_i'(x_i)\cdot v(t);\\ \dot{e}_{ij}(x_i,t) &= \dot{e}_{ij}'(x_i)\cdot v(t);\\ \sigma_{ij}(x_i,t) &= \sigma_{ij}'(x_i)\cdot F(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где функция $v(t)$ задана и входит в выражения, которые задают граничные условия. Функция $F(t)$ подлежит определению. Сравнивая исходные соотношения, определяющие задачу течения вязко-упругой жидкости и соответствующую задачу динамики вязкой жидкости, видим, что уравнение (6) соответствует уравнению (3); уравнение (5) с учетом (7) можно считать соответствующим (2); уравнение (1) можно получить из уравнения (4), если в (4) заменить произведение ηe сверткой функций $\mu(t) * \dot{e}(t)$:

$$\mu(t) * \dot{e}(t) \equiv \int_0^t \mu(t-\tau)\,\dot{e}(\tau)\,d\tau .$$

Таким образом, имея (или получив) решение задачи динамики вязкой жидкости, можно перейти к решению соответствующей задачи течения вязко-упругой жидкости. При этом поле скоростей в обоих случаях будет определяться одинаковыми соотношениями. От $\sigma_{ij}^{в}$ можно перейти $\sigma_{ij}^{в-у}$, заменив постоянный коэффициент вязкости η соответствующей функцией релаксации $\mu(t)$ и осуществив переход от $\sigma_{ij}^{в}$ к $\sigma_{ij}^{в-у}$ с помощью интеграла свертки. Так, если

$$\sigma_{ij}^{в} = A\eta v(t),$$

то

$$\sigma_{ij}^{в-у} = A\int_0^t \mu(t-\tau)\cdot v(\tau)\,d\tau . \tag{8}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу квазистационарного течения несжимаемой вязко-упругой жидкости в зазоре между горизонтальными параллельными дисками.

Рассмотрим случай, когда нижний диск неподвижен, а верхний вращается с угловой скоростью $\omega_2 = \omega \cdot T(t)$. При этом угловая скорость вращения верхнего диска меняется медленно, что дает возможность не учитывать инерционные члены в уравнениях Коши. Основные уравнения задачи запишутся в виде: (1), (2), (3). Движение частиц предполагается круговым. Тогда течение в зазоре между дисками, аналогично вискозиметрическому течению – закручиванию, рассмотренному в [2], будет определяться в цилиндрических координатах полем скоростей:

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v_\varphi = r f(z,t), \tag{9}$$

где $f(z,t) = Z(z)\,T(t)$.

Граничные условия примут вид:

$$v_{\varphi}\big|_{z=0} ; \quad v_{\varphi}\big|_{z=b} = r\omega T(t), \tag{10}$$

или

$$Z(z)\big|_{z=0} = 0 \quad Z(z)\big|_{z=b} = \omega. \tag{10'}$$

Для напряжений на боковой поверхности граничные условия удовлетворяются тождественно. Начальные условия считаем нулевыми.

Решая соответствующую задачу динамики вязкой жидкости при граничных условиях (10) и нулевых начальных условиях, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} v_{\varphi}^{(в)} &= r\,\frac{\omega}{b}\cdot z\cdot T(t); \\ \sigma_{z\varphi}^{(в)} &= \eta\,\frac{r\omega}{b}\cdot T(t), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

что дает возможность записать решение задачи течения вязкоупругой жидкости следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v_{\varphi} &= r\frac{\omega}{b}\, z\,T(t); \\ \sigma_{z\varphi} &= \frac{r\omega}{b}\int_0^t \mu(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для вязко-упругих жидкостей наследственного типа с "затухающей памятью" функция релаксации – убывающая функция времени.

Конкретизируя вид функции $\mu(t)$, можно получить решение для различных моделей вязко-упругих жидкостей.

В частности, для модели Максвелла, подставляя

$$\mu(t) = G e^{-\frac{G}{\eta}t},$$

получим

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{r\omega}{b}\, G e^{-\frac{G}{\eta}t} \int_0^t T(t)\cdot e^{\frac{G}{\eta}t}\, dt.$$

Решение для n-звенной модели Максвелла получим, подставляя в выражение для $\sigma_{z\varphi}$ в (12)

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i e^{-\frac{G_i}{\eta_i}t}.$$

Поле скоростей в случае квазистационарного течения от вида функции релаксации не зависит.

Резюме. Показано, что решение квазистационарной задачи течения вязко-упругой среды наследственного типа, в которой возможно разделение переменных, может быть получено из решения соответствующей задачи динамики вязкой жидкости с помощью интеграла свертки. Приводится решение для случая квазистационарного течения между вращающимися дисками.

Литература

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.М., 1974. 2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975.

УДК 532.135.001.5

М.П. Козеев

ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Экспериментальное и теоретическое исследование вязко-пластичных материалов имеет большое практическое значение [1]. В настоящее время установлено, что вязко-пластичными свойствами обладают торфяная масса, глина строительная, консистентная смазка ЦИАТИМ-201, краски, различные белки, жиры и другие многочисленные продукты пищевой промышленности, почвы, клеи, смолы, растворы каучука, желатины и крахмалы, цементные и известковые растворы, расплавленные силикаты, разные волокнистые материалы (шелк, шерсть, искусственное волокно и т.д.), многие полимерные материалы , нефтепродукты и др. [1,2]. Этим и объясняется внимание, которое уделяется вопросу изучения реологических свойств различных материалов многими отечественными и зарубежными учеными [3].

В настоящей работе рассмотрено решение задачи движения пластины больших размеров по поверхности вязко-пластичной жидкости.

Допустим, что по поверхности горизонтального слоя вязко-пластичной жидкости движется пластина больших размеров. Будем полагать, что давление постоянно. Физически для пластинки больших размеров такое движение вполне может быть реализовано.