УДК 532. 135

А. Х. Ким, док. техн. наук
М.Б. Сугак, канд.техн. наук

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В РЕОДИНАМИКЕ

Проблема определения поля скоростей движущейся жидкости осложняется по мере отклонения уравнения состояния от ньютоновского и находится в прямой зависимости от геометрии канала.

При решении задач реодинамики традиционно используются методы гидродинамики, однако здесь сохраняются все известные трудности и, кроме того, возникают новые, связанные с особенностями реологических уравнений неньютоновских систем.

Решение задач реодинамики приводит к следующим этапам.

1. Определение реологической модели системы и постановке соответствующей краевой или начально-краевой задачи.

2. Выбор метода решения.

3. Реализация его для заданных условий.

В предлагаемой работе сделана попытка использовать для решения конкретной задачи вариационные методы. В случае достаточно простых линий тока и сравнительно несложных реологических систем удается решить соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа, чего не удается сделать для более сложных условий. В этих случаях целесообразно использовать прямые методы вариационного исчисления.

В этой связи в первую очередь возникает необходимость построения функционала, который бы отражал физическую сущность задачи и был достаточно простым по своей конструкции, что позволяло бы доводить решение задачи до практически применимых результатов.

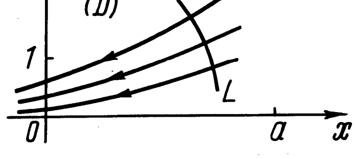

Рис. 1.

В случае использования метода Ритца весьма важной является и проблема построения системы корректирующих функций, их согласование с краевыми и начальными условиями решаемой задачи, с механическими характеристиками течения и т. д.

В качестве примера использования вариационных методов для решения конкретных задач реодинамики рассматривается плоская задача стационарного изотермического истечения неньютоновской жидкости через щель (рис. 1).

С учетом характера процесса в качестве линий тока могут быть выбраны, например, гиперболы

$$\frac{y^2}{1-\nu^2} - \frac{x^2}{\nu^2} = 1; \qquad 0 \leq \nu \leq 1; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0 . \tag{1}$$

(Рассматривалась также возможность использования для линий тока и других аналитических зависимостей).

Ширина щели принята равной двум единицам, что не нарушает общности. Для решения использовалась естественная для данной задачи система координат (x, ν). При этом с учетом (1)

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{\nu}\sqrt{(1-\nu^2)(\nu^2+x^2)}. \end{cases} \tag{1'}$$

Определению подлежит поле скоростей $V = V(x, \nu)$. В качестве характеристики процесса выбраны следующие условия:

I. Прилипание системы к стенкам канала

$$V\Big|_{\nu=0} = 0 .$$

II. Постоянство расхода через ортогонали L к линиям тока

$$\int_L VdL = \text{const}.$$

Для решения задачи могут использоваться и другие условия, например максимальность скорости на оси потока. Для реализации условий I и II найдены ортогонали к линиям тока. Для этой цели получено дифференциальное уравнение семейства линий типа (1)

$$xyy' + (x - y + a^2)y' - xy = 0.$$

Его общий интеграл

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c+a} = 1, \quad y \neq 0$$

при $c = -\nu^2$ и $a = 1$ дает (1), а при $c = a^2\nu^2$ – семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{a^2\nu^2} + \frac{y^2}{a^2\nu^2+1} = 1 \tag{2}$$

ортогональных к (1). В этом случае a – геометрическая характеристика течения – длина канала, в пределах которой определяется поле скоростей.

Дифференциал дуги (2)

$$dL = \frac{1}{a\nu}\sqrt{\frac{a^2\nu^4 + x^2}{a^2\nu^2 - x^2}}\, dx \approx \frac{x\,dx}{a\nu\sqrt{a^2\nu^2 - x^2}}\,.$$

Тогда условие II принимает вид

$$\int_0^a V \frac{x}{a\nu\sqrt{a^2\nu^2 - x^2}}\, dx = \mathrm{const}. \tag{3}$$

С учетом (3) для функции скорости может быть выбрано следующее аналитическое представление:

$$V = \nu\sqrt{a^2\nu^2 - x^2}\cdot\varphi(x)\,. \tag{4}$$

Для определения функции $\varphi(x)$ использован метод Ритца. В качестве функционала, минимальное значение которого соответствует действительному течению, можно выбрать в случае движения вязко-пластической системы (реологическое уравнение: $\tau_{max} = \tau_0 + \eta h$, где τ_0, η – реологические постоянные, h – интенсивность скоростей деформации, τ_{max} – максимальное напряжение) следующее выражение:

$$H = \iint\limits_{(D)} \left(\tau_0 h + \eta \frac{h^2}{2}\right) dS\,, \tag{5}$$

в котором подинтегральная функция выражает величину работы на перемещении h:

$$\int_0^h \tau_{max}\, dh = \int_0^h (\tau_0 + \eta h)\, dh = \tau_0 h + \eta \frac{h^2}{2}$$

(D – область, полученная в результате пересечения канала плоскостью $z=0$). В качестве функции $\varphi(x)$ в выражении (4) взят многочлен

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i,\ \alpha_i=\mathrm{const},\ i=0,1,2,\ldots n.$$

Тогда функция скорости представится в виде

$$V(x,\nu)=\nu\sqrt{a^2\nu^2-x^2}\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i, \tag{6}$$

что согласуется с условиями I и II.
В первом приближении

$$V(x,\nu)\approx\nu\sqrt{a^2\nu^2-x^2}\,(\alpha_o+\alpha_1 x). \tag{7}$$

Исходя из механического значения интенсивности скоростей деформации возможно представление

$$h\approx\left|\frac{\partial V}{\partial L}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial L}+\frac{\partial V}{\partial \nu}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial L}\right|.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка ν^4:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\approx\frac{-x\nu\alpha_o+\alpha_1(2x^2\nu-\alpha_1\nu^3a^2)}{\sqrt{a^2\nu^2-x^2}};$$

$$\frac{\partial x}{\partial L}\approx\frac{a\nu\sqrt{a^2\nu^2-x^2}}{x};$$

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}\approx\frac{(\alpha_o+\alpha_1 x)(a^2\nu^2-x^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2\nu^2-x^2}};$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial L}=\frac{\partial \nu}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial L}\approx\frac{a\nu^2}{x^2}(1+a^2\nu^2)\sqrt{a^2\nu^2-x^2};$$

$$h\approx a\nu^2/\alpha_o(x^2\nu-1)-3\alpha_1 x/;$$

$$h^2\approx a^2\nu^4(\alpha_o-3\alpha_1 x)^2.$$

Определить Якоби для $(1')$

$$J \approx \frac{x^2}{\nu^2\sqrt{(1-\nu^2)(\nu^2+x^2)}}$$

Функционал (5) принимает вид

$$H((\alpha_o,\alpha_1)=\frac{a}{2}\int_0^a\int_1^0 (2\tau_o/\alpha_o(x^2\nu-1)-3\alpha_1\bar{x}/ +$$

$$+a\eta\nu^2(\alpha_o-3\alpha_1 x^2))\frac{x^2}{\sqrt{(1-\nu^2)(\nu^2+x^2)}}\,dx\cdot d\nu \quad .$$

В результате вычислений получаем

$$H(\alpha_o,\alpha_1)=\frac{a}{2}\left\{\frac{\tau_o\alpha_o a^4}{6}\left[a^3-(a^2+1)^{3/2}\right]+\frac{3}{4}\tau_o\alpha_o a\left[\frac{a^5}{5}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(a^2+1)^{5/2}}{5}+\frac{(a^2+1)^{3/2}}{3}\right]+\frac{1}{2}(\tau_o\alpha_o a-2\tau_o\alpha_1 a^2)\times$$

$$\times\left[\sqrt{a^2+1}+\ln(1+\sqrt{a^2+1})\right]+\frac{\tau_o\alpha_o}{3}\ln 2a+2\tau_o\alpha_1+$$

$$+a^2\eta\left(\frac{1}{2}\alpha_o^2-2a\alpha_o\alpha_1+\frac{9}{4}\alpha_1^2\,a^2\right)\cdot\left[\frac{a^2}{8}\sqrt{a^2+1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a^4}{8}\ln a-\frac{1}{4}(a^2+1)^{3/2}+\frac{a^4}{8}\ln(1+\sqrt{a^2+1})\right]\right\}.$$

Коэффициенты α_o и α_1 находятся из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_o=A/B; \\ -\frac{9}{2}a\alpha_1+2\alpha_o=C/aB\,. \end{cases}$$

Постоянные A, B и C имеют значения:

$$A=\frac{1}{6}\tau_o a^4\left[a^3-(a^2+1)^{3/2}\right]+\frac{3}{4}\tau_o a\left[\frac{a^5}{5}-\frac{(a^2+1)^{5/2}}{5}+\right.$$

$$+\frac{(a^2+1)^{3/2}}{3}+\frac{1}{2}\tau_o a\left[\sqrt{a^2+1}+\ln(1+\sqrt{a^2+1})\right]+\frac{1}{3}\tau_o \ln 2a;$$

$$B=a^2\eta\left[\frac{a^2}{8}\sqrt{a^2+1}-\frac{a^2}{4}\ln a-\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^4}{8}\ln\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right];$$

$$C=\tau_o\left[1-a^2\left(\sqrt{a^2+1}+\ln(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right].$$

Из приведенной системы:

$$\alpha_o=\frac{4C+9Aa^2}{Ba(8-9a)};\quad \alpha_1=\frac{2(2aA+C)}{Ba(8-9a)}.$$

Резюме. Таким образом, в первом приближении функция скорости (7) найдена. Получение более точного решения (6) приводит к необходимости использования ЭВМ.

УДК 532.5:532.135

Е. Н. Ламбина, канд. физ.-мат. наук

ИМПУЛЬСНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНЫМ И ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКАМИ

Течение упруго-вязкой жидкости в зазоре между вращающимися дисками рассмотрено в работах [1,2] для модели, введенной авторами. В настоящей статье изучается течение вязко-упругой среды наследственного типа [3].

Постановка задач. В зазоре между параллельными дисками заключена покоящаяся недеформированная вязко-упругая среда, определяемая уравнениями

$$S=2\int_0^t\mu(t-\tau)\,d\,э(\tau);\qquad (1)$$

$$\sigma=\int_0^t V(t-\tau)\,d\theta(\tau),\qquad (2)$$

где $\mu(t)$ и $V(t)$ – функции релаксации и объемной релаксации соответственно; S – девиатор напряжений; $э$ – девиатор деформаций; θ – относительное изменение объема; σ – среднее нормальное напряжение.