

Л и т е р а т у р а

1. Жуковский Н.Е. Скольжении ремня на шкивах.- Собр. соч., т.3. М.-Л., 1949. 2. Вирабов Р.П. Скольжение в плоскоремненной передаче. - "Машиноведение", 1967, №7. 3. Белостокский Б.Х., Очан М.Ю. Передача окружного усилия растяжимой нитью. - "Машиноведение", 1977, № 1. 4. Моссаковский В.И. и др. Исследование взаимодействия конвейерной ленты и упругой футеровки барабана. - "Изв. ДГИ. Горная механика и горное машиностроение", т. 48. М., 1967. 5. Левин М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении.- "ДАН БССР", т. 16, 1972, №5. 6. Решетов Д.Н. Детали машин. М., 1974.

УДК 532.783

В.Б. Немцов, канд. техн. наук

СМЕШАННОЕ ОПИСАНИЕ В ГИДРОДИНАМИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В настоящее время в гидродинамике жидких кристаллов используются эйлеровы [1, 2] и лагранжевы [3, 4] переменные. Эйлеровы (пространственные) координаты применяются при статическом обосновании гидродинамики жидких кристаллов как при строгом описании поворотов молекул с помощью ортогональных матриц поворота [5, 6], так и при упрощенном задании ориентации молекул посредством единичных векторов, направленных по их "длинным" осям [7, 8].

В данной работе предлагается смешанное описание ориентационной деформации с помощью тензора второго ранга, один индекс которого относится к материальным (лагранжевым) осям, а второй индекс - к пространственным (эйлеровым) осям. Движение жидкокристаллической среды изучается относительно пространственной системы координат (системы координат наблюдателя).

Будем обозначать индексы материальных координат заглавными, а индексы пространственных координат строчными буквами латинского алфавита.

В этих обозначениях тензор ориентационной деформации в лагранжевом описании представляется в виде [3,4]

$$\gamma_{KL} = \frac{1}{2} \epsilon_{KNM} \alpha_{kM} (\partial \alpha_{kN} / \partial X_L), \quad (1)$$

где α_{KM} - поле ортогональной матрицы, описывающей средние конечные повороты молекул; ε_{KNM} - тензор Леви - Чивита; X_L - материальные координаты; $K, L, M, N = 1, 2, 3$; $\bar{k} = 1, 2, 3$.

В свою очередь эйлеров тензор ориентационной деформации определяется как [5, 6]

$$\delta_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} \alpha_{nK} (\partial \alpha_{mK} / \partial x_l), \quad (2)$$

где x_l - пространственные (эйлеровы координаты); $l, m, n = 1, 2, 3$.

В предлагаемом смешанном описании ориентационная деформация характеризуется тензором

$$\delta_{Kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{KNM} \alpha_{rM} (\partial \alpha_{rN} / \partial x_l). \quad (3)$$

Введенный тензор преобразуется как вектор при ортогональном преобразовании пространственных координат, если зафиксировать "материальный" индекс K. Указанное свойство справедливо и в случае фиксации "эйлерова" индекса l и преобразования материальных координат. Из сказанного следует, что тензор δ_{Kl} является объективной, не зависящей от выбора системы координат, мерой ориентационной деформации. Легко проверить, что лагранжев и эйлеров тензоры ориентационной деформации также являются объективными мерами деформации.

Не развивая статистической теории, можно отметить, что смешанный тензор ориентационной деформации представляется аналогично [5, 6] как результат усреднения динамической величины

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{Kl} = & \frac{1}{2} \varepsilon_{KNM} [- \Delta \hat{A}_{rM} (\partial \Delta \hat{A}_{rN} / \partial x_l) + \\ & + \langle \hat{A}_{rM} (\partial \hat{A}_{rN} / \partial x_l) \rangle] , \end{aligned} \quad (4)$$

где $\langle \dots \rangle$ - обозначение неравновесного усреднения, $\Delta \hat{A}_{rN} = \hat{A}_{rN} - \langle \hat{A}_{rN} \rangle$. Динамическая величина матрицы поворота записывается в виде

$$\hat{A}_{rN}(\vec{x}) = \sum_{\nu=1}^L \alpha_{rN}^{\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}^{\nu}), \quad (5)$$

причем α_{rN}^{ν} - матрица, характеризующая поворот молекулы с номером ν (число молекул равно L).

После усреднения (5) и (4) получим соответственно

$$n \alpha_{rN}(\vec{x}) = \langle \hat{A}_{rN} \rangle; \quad (6)$$

$$n^2 \gamma_{K1}(\vec{x}) = \langle \hat{T}_{K1} \rangle; \quad (7)$$

где n - плотность числа частиц.

Дифференцируя по времени (3) с учетом соотношений [5, 6]

$$d \alpha_{rN} / dt = \omega_{rk} \alpha_{kN}, \quad \omega_{rk} = -\varepsilon_{rkn} \omega_n \quad (\omega_n - \text{средняя} \\ \text{угловая скорость собственного вращения молекул),} \quad \text{установим} \\ \text{уравнение движения тензора ориентационной деформации в сме-} \\ \text{шанном описании}$$

$$d \gamma_{K1} / dt = \alpha_{nK} (\partial \omega_n / \partial x_1) - \gamma_{Kn} (\partial v_n / \partial \vec{x}_1). \quad (8)$$

Такое же уравнение получается с помощью дифференцирования по времени динамической величины \hat{T}_{K1} и последующего усреднения.

В связи с наличием члена $\partial v_n / \partial x_1$ производная $d \gamma_{K1} / dt$ неинвариантна относительно жесткого вращения пространственной системы координат. Для получения инвариантной в этом смысле скорости изменения тензора деформации перейдем во вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ систему координат. Переход осуществляется с помощью формулы

$$\overset{\infty}{d} A_i / dt = d A_i / dt - \varepsilon_{ikl} \omega_k A_l. \quad (9)$$

Здесь символом тильда отмечена производная по времени относительно вращающейся системы координат. Формула (9) получена ранее из первых принципов (статистическим [6, 7] методом) и является известной формулой дифференцирования векторного поля, отнесенного к вращающейся системе отсчета. Применяя формулу (9), нужно учесть, что при фиксированном индексе K тензор γ_{K1} является вектором. В итоге получим инвариантное относительно жесткого вращения пространственной системы координат выражение

$$\overset{\infty}{d} \gamma_{K1} / dt = \alpha_{nK} (\partial \omega_n / \partial x_1) - \gamma_{Kn} e_{n1}. \quad (10)$$

В этом соотношении тензор e_{n1} определен выражением

$$e_{n1} = \partial v_n / \partial x_1 - \varepsilon_{iln} \omega_i, \quad (11)$$

которое также инвариантно в отмеченном выше смысле.

Замкнутая система уравнений гидродинамики состоит из системы уравнений движений (законов сохранения) и материаль-

ных уравнений. Набор переменных состояния для холестериче-
ских и нематических жидких кристаллов остается тем же, как
в работе [6], причем γ_{kl} заменяется на γ_{Kl} . Справедливы
и все законы сохранения, рассмотренные в цитированной рабо-
те, с учетом замены уравнения движения для γ_{kl} на уравне-
ние (10) для смешанного тензора деформации γ_{Kl} .

Рассмотрим уравнение баланса энтропии. Уравнение это по-
лучается на основе локально-равновесного распределения (3.1)
из работы [6], где тензор $\hat{\Gamma}_{ik}$ нужно заменить на $\hat{\Gamma}_{Kl}$, а
величину g_{ik} - на g_{Kl} . Термодинамическая величина g_{Kl}
сопряжена $\langle \hat{\Gamma}_{Kl} \rangle$, подобно тому, как g_{ik} сопряжена
среднему значению динамической переменной $\hat{\Gamma}_{ik}$.

Повторяя вычисления работы [6], получим выражение для
вариации массовой плотности энтропии

$$\rho \delta s = \beta \rho \delta u - \rho \nu_{ik} \delta d_{ik} - n a_{iK} \delta \alpha_{iK} - \\ - n^2 g_{Kl} \delta \gamma_{Kl} - \beta \rho \omega_i \delta l_i + \beta \rho P \delta v. \quad (12)$$

Обозначения здесь, за исключением уже введенного обозначения
нового тензора деформации, полностью соответствуют обозначениям
работы [6].

Учитывая, что вариации в (12) определены в сопровождающей
вращающейся системе отсчета, получим

$$\rho (ds / dt) = \beta \rho (du / dt) - \rho \nu_{ik} (\tilde{d} d_{ik} / dt) - \\ - n a_{iK} (\tilde{d} \alpha_{iK} / dt) - n^2 g_{Kl} (\tilde{d} \gamma_{Kl} / dt) - \\ - \beta \rho \omega_i (dl_i / dt) + \beta \rho P (dv / dt). \quad (13)$$

Используя законы сохранения для массовых плотностей
энергии u , квадрупольного момента d_{ik} , собственного мо-
мента импульса l_i , удельного объема v [5, 6], принимая
во внимание уравнение $\tilde{d} \alpha_{iK} / dt = 0$ и уравнение (10), полу-
чим

$$\rho (ds / dt) = \beta (\tau_{ik} + P \delta_{ik} + n^2 \beta^{-1} g_{Kk} \gamma_{Ki}) e_{ik} + \\ + \beta (\pi_{ik} - n^2 \beta^{-1} g_{Kk} \alpha_{iK}) (\partial \omega_i / \partial x_k) - \beta (\partial q_i / \partial x_i) - \\ - \nu_{ik} J_{ik}^D + \nu_{ik} (\partial j_{ikl}^D / \partial x_l). \quad (14)$$

Из этого уравнения следует, что $\beta^{-1} n^2 g_{Kk} \alpha_{iK}$ является
недиссипативной частью тензора моментных напряжений

$$\pi_{ik}^0 = \beta^{-1} n^2 g_{Kk} \alpha_{iK}, \quad (15)$$

причем величина

$$\pi_{Kk}^0 = \beta^{-1} n^2 g_{Kk} \quad (16)$$

является тензором моментных напряжений в смешанном описании. Этот тензор термодинамически сопряжен тензору ориентационной деформации γ_{Kk}^0 . Учитывая (15) и (16), установим связь между обоими тензорами моментных напряжений

$$\pi_{ik}^0 = \pi_{Kk}^0 \alpha_{iK}. \quad (17)$$

Выражение для недиссипативной части тензора напряжений также следует из уравнения (14)

$$\tau_{ik}^0 = -P \delta_{ik} - \beta^{-1} n^2 g_{Kk} \gamma_{Ki}^0 = -P \delta_{ik} - \pi_{Kk}^0 \gamma_{Ki}^0 \quad (18)$$

На основе термодинамического соотношения (12) легко установить термодинамические соотношения для других термодинамических потенциалов. Так, тензор моментных напряжений смешанного описания выражается через массовую плотность свободной энергии f следующим образом:

$$\pi_{Kl}^0 = \rho \frac{\partial f}{\partial \gamma_{Kl}^0}. \quad (19)$$

Из уравнения (14) следует окончательная форма уравнения баланса энтропии

$$\rho (ds / dt) = - \partial j_i^S / \partial x_i + \sigma. \quad (20)$$

Поток энтропии определяется как

$$j_i^S = \beta q_i - \nu_{lk} j_{lki}^D. \quad (21)$$

В свою очередь локальное производство энтропии имеет вид

$$\sigma = q_i (\partial \beta / \partial x_i) - j_{ikl}^D (\partial \nu_{ik} / \partial x_l) + \beta (\tau_{ik} - \tau_{ik}^0) e_{ik} + \beta (\pi_{ik} - \pi_{ik}^0) (\partial \omega_i / \partial x_k) - \nu_{ik} j_{ik}^D. \quad (22)$$

Выражение для производства энтропии позволяет установить вид термодинамических сил, сопряженных необратимым потоком

$$q_i, \tau_{ik} - \tau_{ik}^0, \pi_{ik} - \pi_{ik}^0, j_{ikl}^D, j_{ik}^D. \quad (23)$$

Термодинамическими силами являются величины

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \partial \beta / \partial x_i; \quad X_2 = \beta e_{ik}; \quad X_3 = \beta (\partial \omega_i / \partial x_k); \\
 X_4 &= - \partial \nu_{ik} / \partial x_l, \quad X_5 = - \nu_{ik}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Материальные уравнения, связывающие необратимые потоки с термодинамическими силами, такие же, как в работе [6]. Материальные уравнения для недиссипативных частей потоков получаются на основе метода, предложенного ранее [5, 6]. Отметим только, что при смешанном описании материальное уравнение записывается непосредственно не для тензора π_{ik}^0 , а для тензора π_{Kk}^0 , а затем уже применяется соотношение (17).

В заключение отметим, что новое описание ориентационной деформации и введение нового тензора моментных напряжений несомненно найдет применение в решении задач гидродинамики жидких кристаллов, подобно тому, как в нелинейной теории упругости широко применяются различные меры деформации и соответствующие им тензоры напряжений [9].

Резюме. Построена гидродинамика жидких кристаллов на основе новой меры ориентационной деформации, определенной в смешанном базисе, сочетающем лагранжев и эйлеров базисы.

Л и т е р а т у р а

1. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов. - В. Сб.: Гидромеханика, т. 7. ВНИИТИ. М., 1973.
2. Stephen M.I., Straley I.P. Physics of liquid crystals. - Rev. Mod. Phys, 46, 1974, N4.
3. Lee I. D., Eringen A.C. Wave Propagation in Nematic Liquid crystals Journ. Chem. Phys., 54, 1971, N12.
4. Lee I.D. Eringen A.C. Continuum Theory of cholesteric liquid crystals. - Liquid Crystals and ordered Fluids, vol. 2, Plenum Press, New-york, 1973
5. Немцов В.Б. Статистическая теория гидродинамических и кинетических процессов в жидких кристаллах. - ТМФ. 25, 1975, № 1.
6. Nemtsov V.B. Statistical hydrodynamics of cholesteric liquid crystals. - Physica, 86A, 1977.
7. Немцов В.Б. К статистическому обоснованию уравнений гидродинамики жидких кристаллов. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 4. Минск, 1977.
8. Немцов В. Б. Материальные уравнения для нематических и холестерических жидких кристаллов. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 5. Минск, 1978.
9. Лурье А.И. Теория упругости. М., 1970.