

Рассмотрим нестационарное движение гибкой нити при отсутствии проскальзывания по дуге обхвата ξ_k (рис. 1,а). Обозначим угол поворота шкива φ , а дуговую координату некоторой фиксированной точки нити — s . В данном случае $\varphi = \varphi(t)$, $s = s(t)$ или $s = s(\varphi)$. В некоторый момент времени, которому соответствует угол поворота шкива $\varphi - \xi$, в начале дуги обхвата при $\xi = 0$ точка на периферии шкива с деформацией, равной нулю, вступает в контакт с нерастяжимой нитью. К моменту, когда угол поворота шкива станет равным φ , основание сдвигового слоя переместится по дуге обхвата на $r\xi$, тогда как соответствующая точка на периферии ввиду отсутствия проскальзывания переместится вместе с нитью на величину $s(\varphi) - s(\varphi - \xi)$. Координата этой точки будет теперь равна ξ .

Деформация сдвига λ в точке с угловой координатой ξ равна

$$\lambda = r\xi - [s(\varphi) - s(\varphi - \xi)]. \quad (1)$$

Введем функцию псевдоскольжения (упругого скольжения) $u(\varphi) = s(\varphi) - r\varphi$.

Тогда
$$\lambda = - [u(\varphi) - u(\varphi - \xi)]. \quad (2)$$

Из рассмотрения равновесия элемента нити следует, что

$$dT = -\tau r d\xi, \quad (3)$$

где $\tau = c\lambda$ — касательное усилие на единицу длины, а c — сдвиговая жесткость деформируемого слоя. Отметим, что если и нить и шкив обладают сдвиговыми свойствами, это легко

учесть введением приведенной жесткости $c_{пр} = \frac{c_s c_w}{c_s + c_w}$, где

c_s и c_w — сдвиговые жесткости соответственно нити и шкива.

Интегрируя уравнение (3), получим с учетом (2) зависимость между усилиями в набегающей и сбегающей ветвях T_H и T_K

$$T_K = T_H + c r \int_0^{\xi_k} [u(\varphi) - u(\varphi - \xi)] d\xi. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь случай проскальзывания нити относительно шкива на дуге обхвата. Как известно, условие покоя нити имеет вид $|\tau| \leq \frac{fT}{r}$, где f — коэффициент трения по-

коя, а T - натяжение нити. Граница зоны проскальзывания определяется из уравнения

$$|\zeta(\xi_c)| = \frac{f T(\xi_c)}{r} \quad (5)$$

Остановимся на случае стационарного движения. Все величины, относящиеся к ведущему шкиву, обозначим индексом 1, а к ведомому - индексом 2.

Для ведущего шкива имеем $s_1 = \varphi_1 \cdot (r_1 - \Delta_1)$; $\lambda_1 = \xi_1 \Delta_1$, где $\Delta_1 = \text{const}$. Тогда из (3) найдем усилие в сечении нити в точке с координатой ξ_1

$$T_1 = T_{н1} - c_1 \Delta_1 r_1 \frac{\xi_1^2}{2} \quad (6)$$

Уравнение (5) примет вид $c_1 \xi_1 \Delta_1 = f_1 (T_{н1} - c_1 \Delta_1 r_1 \frac{\xi_{c1}^2}{2}) / r_1$.

Решение этого уравнения дает

$$\xi_{c1} = -\frac{1}{f_1} + \sqrt{\frac{1}{f_1^2} + \frac{2T_{н1}}{c_1 \Delta_1 r_1}} \quad (7)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{01} &= f_1 \xi_1 && - \text{приведённая угловая координата} \\ \xi_{c01} &= f_1 \xi_{c1} && - \text{приведенный граничный угол, определяющий границу зоны покоя} \\ \xi_{к01} &= f_1 \xi_{к1} && - \text{приведенный угол обхвата} \\ \theta_{01} &= f_1 (\xi_{к1} - \xi_{c1}) && - \text{приведенная длина зоны проскальзывания} \\ \delta_1 &= \frac{2T_{н1} f_1^2}{c_1 \Delta_1 r_1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда, преобразуя (7), получим

$$\xi_{c01} = -1 + \sqrt{1 + \delta_1} \quad (9)$$

Зависимости $\xi_{c01}(\delta_1)$ и $\theta_{01}(\delta_1)$, представленные на рис. 2, а позволяют определить наличие и длину зоны проскальзывания для конкретных условий.

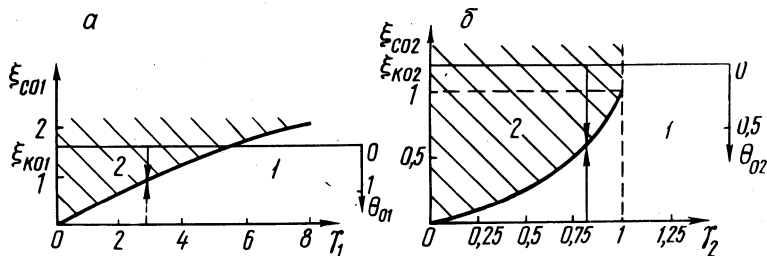


Рис. 2. Зависимость наличия и длины зон проскальзывания от δ для ведущего (а) и ведомого (б) шкивов: 1 – зона покоя, 2 – зона проскальзывания.

Таблица 1.

Натяжение нити	Шкив	
	ведущий	ведомый
В зоне покоя	$T_1 = T_{н1} \left(1 - \frac{\xi_{01}^2}{\delta_1}\right)$	$T_2 = T_{н2} \left(1 + \frac{\xi_{02}^2}{\delta_2}\right)$
На границе дуги обхвата при отсутствии зоны проскальзывания	$T_{к1} = T_{н1} \left(1 - \frac{\xi_{к01}^2}{\delta_1}\right)$	$T_{к2} = T_{н2} \left(1 + \frac{\xi_{к02}^2}{\delta_2}\right)$
На границе зон проскальзывания и покоя	$T_{с1} = T_{н1} \left(1 - \frac{\xi_{с01}^2}{\delta_1}\right)$	$T_{с2} = T_{н2} \left(1 + \frac{\xi_{с02}^2}{\delta_2}\right)$
В зоне проскальзывания	$T_1 = 2T_{н1} \frac{1}{2 + \xi_{с01}} \times$ $_{xe} - (\xi_{01} - \xi_{с01})$	$T_2 = 2T_{н2} \frac{1}{2 - \xi_{с02}} \times$ $_{xe} \xi_{02} - \xi_{с02}$
На границе дуги обхвата при наличии зоны проскальзывания	$T_{к1} = 2T_{н1} \frac{1}{2 + \xi_{с01}} \times$ $_{xe} - (\xi_{к01} - \xi_{с01})$	$T_{к2} = 2T_{н2} \frac{1}{2 - \xi_{с02}} \times$ $_{xe} \xi_{к02} - \xi_{с02}$

Легко показать, что в зоне проскальзывания

$$T_1 = T_{c1} e^{-f_1(\xi_1 - \xi_{c1})}, \quad \tau_1 = \frac{f_1}{r_1} T_{c1} e^{-f_1(\xi_1 - \xi_{c1})} \quad (10)$$

Здесь T_{c1} - натяжение нити на границе зон проскальзывания и покоя. Выражения для натяжения нити, преобразованные с учетом обозначений (8) и полученных выше формул, приведены в табл. 1.

Для ведомого шкива имеем $s_2 = \varphi_2 \cdot (r_2 + \Delta_2)$; $\lambda_2 = -\xi_2 \Delta_2$, где $\Delta_2 = \text{const}$. Аналогично рассмотренному случаю ведущего шкива получаем

$$T_2 = T_{n2} + c_2 \Delta_2 r_2 \frac{\xi_2^2}{2}; \quad \xi_{c2} = \frac{1}{f_2} - \sqrt{\frac{1}{f_2^2} - \frac{2T_{n2}}{c_2 \Delta_2 r_2}} \quad (11)$$

С использованием обозначений, аналогичных (8), имеем

$$\xi_{c02} = 1 - \sqrt{1 - \gamma_2} \quad (12)$$

Зависимости $\xi_{c02}(\gamma_2)$ и $\theta_{02}(\gamma_2)$ представлены на рис. 2, б. Окончательные выражения для натяжения нити приведены в табл. 1.

Рассмотрим далее передачу гибкой нитью (рис. 1, б). Пусть нам известны $r_1, r_2, c_1, c_2, f_1, f_2, \xi_{k1}, \xi_{k2}$, предварительное натяжение F , моменты на шкивах M_1 и M_2 , моменты инерции шкивов I_1 и I_2 , M_f - момент сопротивления холостого хода, приведенный к ведомому шкиву (момент M_f учитывает потери на трение в опорах, на сопротивление воздуха, а также на изгиб реальной нити). Обозначим натяжение рабочей ветви $T = T_{p1} = T_{k2}$, а холостой - $T_x = T_{k1} = T_{n2}$. Задача сводится к определению следующих неизвестных функций времени: $\varphi_1, \varphi_2, s_1, s_2, T_p, T_x$.

В общем случае можно составить систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$F = (T_p + T_x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \xi_{k1}\right); \quad (13)$$

$$M_1 = I_1 \ddot{\varphi}_1 + (T_p - T_x) r_1; \quad (14)$$

$$M_2 = -I_2 \ddot{\varphi}_2 + (T_p - T_x) r_2 - M_f; \quad (15)$$

$$T_x = T_p + c_1 r_1 \int_0^{\xi_{k1}} [u_1(\varphi_1) - u_1(\varphi_1 - \xi_1)] d\xi_1; \quad (16)$$

$$T_p = T_x + c_2 r_2 \int_0^{\xi_{k2}} [u_2(\varphi_2) - u_2(\varphi_2 - \xi_2)] d\xi_2; \quad (17)$$

$$s_1(\varphi_1) = s_2(\varphi_2). \quad (18)$$

В случае наличия зон проскальзывания вместо (16) и (17) имеем соответственно

$$T_x = \left\{ T_p + c_1 r_1 \int_0^{\xi_{c1}} [u_1(\varphi_1) - u_1(\varphi_1 - \xi_1)] d\xi_1 \right\} e^{-f_1(\xi_{k1} - \xi_{c1})}; \quad (16')$$

$$T_p = \left\{ T_x + c_2 r_2 \int_0^{\xi_{c2}} [u_2(\varphi_2) - u_2(\varphi_2 - \xi_2)] d\xi_2 \right\} e^{f_2(\xi_{k2} - \xi_{c2})}; \quad (17')$$

В стационарном режиме система принимает вид:

$$F = (T_p + T_x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \xi_{k1}\right); \quad (19)$$

$$M_1 (T_p - T_x) r_1; \quad (20)$$

$$M_2 = (T_p - T_x) r_2 - M_f; \quad (21)$$

$$T_x = 2T_p \left(1 - \frac{\xi_{k01}^2}{\delta_1}\right). \quad (22)$$

или
$$T_x = 2T_p \frac{1}{2 + \xi_{c01}} e^{-(\xi_{k01} - \xi_{c01})}; \quad (22')$$

$$T_p = 2T_x \left(1 + \frac{\xi_{k02}^2}{\delta_2}\right); \quad (23)$$

или
$$T_p = 2T_x \frac{1}{2 - \xi_{c02}} e^{\xi_{k02} - \xi_{c02}}; \quad (23')$$

$$\varphi_1(r_1 - \Delta_1) = \varphi_2(r_2 + \Delta_2). \quad (24)$$

Порядок решения этой системы следующий. Из (19) и (20) определяем Γ и Γ . Из (22) находим γ_1 , а затем из (9) — ξ_{c01} . Если $\xi_{c01}^p \geq \xi_{k01}$, и, следовательно, проскальзывания нет; то из (8) определяем Δ_1 . В противном случае находим ξ_{c01} из (22'). Аналогично определяем Δ_2 из (23) или (23'). Далее из (24) находим

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1 - \Delta_1}{r_2 + \Delta_2} = \frac{r_1}{r_2} (1 - \varepsilon). \quad (25)$$

Здесь
$$\varepsilon = \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} = \frac{\Delta_1/r_1 + \Delta_2/r_2}{1 + \Delta_2/r_2}. \quad (26)$$

Легко показать, что к.п.д. передачи равен

$$\eta = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1} = (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{M_f}{M_1} \frac{r_1}{r_2}\right). \quad (27)$$

Для наглядности остановимся на частном случае, когда проскальзывания нет и все параметры ведущего и ведомого шкивов одинаковы. Отметим, что на практике наибольший интерес представляет режим без проскальзывания.

После несложных преобразований получим из (26) и (27)

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{2} + cr \frac{3}{\xi_k} \frac{2}{4M_1}}; \quad \eta = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + cr \frac{3}{\xi_k} \frac{2}{4M_1}}\right) \left(1 - \frac{M_f}{M_1}\right).$$

Эти зависимости представлены графически на рис. 3 и весьма близки к экспериментальным [6].

В данной работе принято допущение о нерастяжимости нити. Очевидно, что полученные результаты справедливы и для растяжимой нити, если имеет место соотношение

$$\chi = \frac{\Delta l_{\max}}{\lambda_{\max}} \ll 1, \quad (28)$$

где Δl_{\max} - максимальное удлинение нити на дуге обхвата, вызванное только касательными усилиями τ и λ_{\max} - максимальный сдвиг футеровки на дуге обхвата. В худшем случае, когда проскальзывания нет, имеем

$$\Delta l_{\max} = \frac{c \Delta r}{E F} \int_0^{\xi_k} \int_0^{\psi} \xi d \xi d \psi = \frac{1}{6} \frac{c \Delta r^2 \xi_k^3}{E F},$$

где E - модуль упругости нити; F - площадь сечения нити.

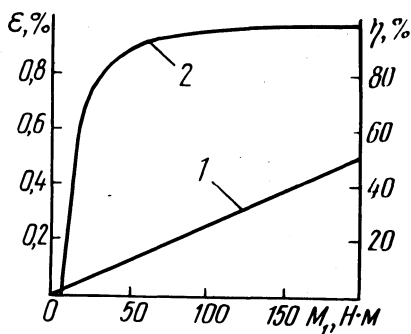


Рис. 3. Зависимость характеристик передачи от нагрузки: 1 - ε , 2 - η (при следующих значениях параметров: $c = 10^7$ Н/м², $M_f = 5$ Н·м, $r = 0,12$ м, $\xi_k = \pi$).

Легко показать, что сдвиговая жесткость c и модуль сдвига G связаны следующим образом: $c = G \frac{b}{h}$, где b и h - соответственно ширина и высота поперечного сечения футеровки. Если обозначить теперь длину дуги обхвата $l = r \xi_k$ и учесть, что $\lambda_{\max} = \xi_k \Delta$, то окончательно получим условие справедливости допущения о нерастяжимости нити в виде

$$\chi = \frac{1}{6} \frac{G l^2 b}{E F h} \ll 1. \quad (29)$$

В заключение отметим, что в случае растяжимой нити определяющее уравнение имеет вид

$$\left[\frac{r}{E F} T(\varphi, \xi) - \frac{\partial \lambda(\varphi, \xi)}{\partial \xi} \right] \Bigg|_{\varphi = \xi, 0}^{\varphi, \xi} = 0.$$

Резюме. В работе получены уравнения движения гибкой нити и на их основании предложен метод расчета передачи. Определен критерий оценки справедливости допущения о нерастяжимости нити.

Л и т е р а т у р а

1. Жуковский Н.Е. Скольжении ремня на шкивах.- Собр. соч., т.3. М.-Л., 1949. 2. Вирабов Р.П. Скольжение в плоскоремненной передаче. - "Машиноведение", 1967, №7. 3. Белостокский Б.Х., Очан М.Ю. Передача окружного усилия растяжимой нитью. - "Машиноведение", 1977, № 1. 4. Моссаковский В.И. и др. Исследование взаимодействия конвейерной ленты и упругой футеровки барабана. - "Изв. ДГИ. Горная механика и горное машиностроение", т. 48. М., 1967. 5. Левин М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении.- "ДАН БССР", т. 16, 1972, №5. 6. Решетов Д.Н. Детали машин. М., 1974.

УДК 532.783

В.Б. Немцов, канд. техн. наук

СМЕШАННОЕ ОПИСАНИЕ В ГИДРОДИНАМИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В настоящее время в гидродинамике жидких кристаллов используются эйлеровы [1, 2] и лагранжевы [3, 4] переменные. Эйлеровы (пространственные) координаты применяются при статическом обосновании гидродинамики жидких кристаллов как при строгом описании поворотов молекул с помощью ортогональных матриц поворота [5, 6], так и при упрощенном задании ориентации молекул посредством единичных векторов, направленных по их "длинным" осям [7, 8].

В данной работе предлагается смешанное описание ориентационной деформации с помощью тензора второго ранга, один индекс которого относится к материальным (лагранжевым) осям, а второй индекс - к пространственным (эйлеровым) осям. Движение жидкокристаллической среды изучается относительно пространственной системы координат (системы координат наблюдателя).

Будем обозначать индексы материальных координат заглавными, а индексы пространственных координат строчными буквами латинского алфавита.

В этих обозначениях тензор ориентационной деформации в лагранжевом описании представляется в виде [3, 4]

$$\gamma_{KL} = \frac{1}{2} \epsilon_{KNM} \alpha_{KM} (\partial \alpha_{KN} / \partial X_L), \quad (1)$$