УДК 539.3

А.Е. Крушевский, А.З. Севенюк

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Как следует из [1, 2], точное определение спектра частот колебаний упругих стержней прямоугольного сечения затруднено. Поэтому на практике в технических расчетах для определения спектра частот продольных упругих колебаний пользуются формулами, которые позволяют решить эту задачу без учета формы поперечного сечения. Хотя площадь поперечного сечения и входит в уравнение продольных колебаний стержней [3]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu F G \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 , \qquad (1)$$

но для постоянного сечения эта площадь может быть сокращена (1). Поэтому техническая теория продольных колебаний упругих стержней постоянного сечения не учитывает геометрию поперечного сечения стержня даже с помощью такой обобщенной характеристики как площадь.

В [2] получена система динамических уравнений для исследования продольных колебаний стержней прямоугольного сечения при строгом выполнении краевых условий на боковых гранях. В качестве примера рассмотрена задача определения частот продольных колебаний упругих стержней с квадратным сечением и результаты расчета сравнены с технической теорией.

При этом оказалось, что для упругих стержней с квадратным сечением собственные частоты по уточненной теории с помощью полиномов третьей степени отличаются незначительно от технической. Рассмотрим, каково же расхождение между уточненной и технической теорией определения собственных частот продольных колебаний для стержней с прямоугольным сечением.

Запишем систему динамических уравнений:

W_{00}	W_{20}	W_{02}	Правая часть
$\nu d_z^2+\rho\frac{\omega^2}{G}$	$\frac{\nu a^2 d_z^2}{12}-2\nu_2+\frac{\rho a^2\omega^2}{12G}$	$\frac{\nu b^2 d_z^2}{12}-2\nu_2+\frac{\rho b^2\omega^2}{12G}$	0
$-\nu_2 d_z^2$	$\frac{(\nu+2)a^2 d_z^2}{12}+4(\nu-1)$	$-\frac{\nu_2 b^2 d_z^2}{4}$	0
$-\nu_2 d_z^2$	$-\frac{\nu_2 a^2 d_z^2}{4}$	$\frac{(\nu+2)b^2 d_z^2}{12}+4(\nu-1)$	0

здесь W_{00}, W_{20}, W_{02} – обобщенные перемещения в рядах аппроксимирующих функций, в которых исключены все другие обобщенные перемещения, кроме указанных:

$$U=x\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)-\frac{2}{d_z^2}\right]W'_{20}+x\left[y^2-\frac{b^2}{4}+\frac{\nu}{\nu_2}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{a^2}{4}\right)\right]C;$$

$$v=y\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right)-\frac{2}{d_z^2}\right]W'_{02}+y\left[\frac{a^2}{4}-x^2+\frac{\nu}{\nu_2}\left(\frac{b^2}{4}-\frac{y^2}{3}\right)\right]C;$$

$$W=W_{00}+x^2W_{20}+y^2W_{02}.$$

Построенные выражения для упругих перемещений точно выполняют условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности упругого стержня,т.е.

$$\sigma_x=\tau_{xy}=\tau_{xz}=0 \qquad \text{при } x=\frac{\pm a}{-2} \text{ и}$$

$$\sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0 \qquad \text{при } y=\frac{\pm b}{-2}.$$

Согласно закону Гука, получаем следующие формулы для упругих напряжений:

$$\tau_{xy}=0;$$

$$\tau_{xz}=x\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)W''_{20}\frac{G}{3};$$

$$\tau_{yz} = y\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) W''_{02}\frac{G}{3};$$

$$\sigma_x = \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) G\left[2W'_{20} - \frac{4(\nu-1)}{\nu_2} C\right];$$

$$\sigma_y = \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) G\left[2W'_{02} + \frac{4(\nu-1)}{\nu_2} C\right];$$

$$\sigma_z = \nu G W'_{00} + 2G\left(x^2 + \frac{\nu_2 a^2}{24} - \frac{\nu_2}{d_z^2}\right)W'_{20} +$$

$$+2G\left(y^2 + \frac{\nu_2 b^2}{24} - \frac{\nu_2}{d_z^2}\right)W'_{02} + 2G\left[x^2 - y^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right] C.$$

В дальнейшем для упрощения задачи полагаем C = 0.

В результате раскрытия определителя третьего порядка получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\nu a^2 b^2 d_z^6}{9} + \frac{d_z^4}{3}\left[8(\nu-1)(a^2+b^2) + \frac{a^2b^2\rho\omega^2}{3G}\right] +$$

$$+ d_z^2\left[16(3\nu-4) + \frac{2\rho\nu\omega^2(a^2+b^2)}{3G}\right] + \frac{16(\nu-1)\rho\omega^2}{G} = 0. \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) может быть относительно любой из трех функций: W_{00}, W_{20}, W_{02}. Сохраняя в качестве разрешающей функцию W_{20}, запишем решение, при условии $W = 0$ при $z = 0$:

$$W_{20} = A_1 \operatorname{sh}\alpha_1 z + A_2 \operatorname{sh}\alpha_2 z + A_3 \operatorname{sh}\alpha_3 z,$$

где α удовлетворяет кубическому характеристическому уравнению относительно α^2,

$$\frac{\nu a^2 b^2 \alpha^6}{9} + \frac{\alpha^4}{3}\left[8(\nu-1)(a^2+b^2) + \frac{a^2b^2\rho\omega^2}{3G}\right] +$$

$$+ \alpha^2\left[16(3\nu-4) + \frac{2\rho\nu\omega^2(a^2+b^2)}{3G}\right] + \frac{16(\nu-1)\rho\omega^2}{G} = 0.$$

Частотное уравнение получается в результате выполнения условий на свободном конце стержня, т.е. при $z = h$

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \quad \int \sigma_z \, dF = 0;$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{vmatrix} = 0,$$

где $B_1 = \alpha_1^2 \operatorname{sh} \alpha_1 h$; $B_2 = \alpha_2^2 \operatorname{sh} \alpha_2 h$; $B_3 = \alpha_3^2 \operatorname{sh} \alpha_3 h$;

$$B_4 = \left[\frac{12 + a^2\alpha_1^2}{12 + b^2\alpha_1^2}\right] \alpha_1^2 \operatorname{sh} \alpha_1 h; \quad B_5 = \left[\frac{12 + a^2\alpha_2^2}{12 + b^2\alpha_2^2}\right] \alpha_2^2 \operatorname{sh} \alpha_2 h$$

$$B_6 = \left[\frac{12 + a^2\alpha_3^2}{12 + b^2\alpha_3^2}\right] \alpha_3^2 \operatorname{sh} \alpha_3 h; \quad B_7 = \left\{\frac{\nu}{\nu_2 \alpha_1}\left[\frac{(\nu+2) a^2\alpha_1^2}{12} + \right.\right.$$

$$\left.+ 4(\nu - 1)\right] - \frac{b^2 \nu \alpha_1}{4}\left[\frac{12 + a^2\alpha_1^2}{12 + b^2\alpha_1^2}\right] + \alpha_1\left(\frac{\nu a^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_1^2}\right) +$$

$$\left. + \alpha_1\left(\frac{\nu b^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_1^2}\right)\left[\frac{12 + a^2\alpha_1^2}{12 + b^2\alpha_1^2}\right]\right\} \operatorname{ch} \alpha_1 h;$$

$$B_8 = \left\{\frac{\nu}{\nu_2 \alpha_2}\left[\frac{(\nu+2) a^2\alpha_2^2}{12} + 4(\nu - 1)\right] - \frac{b^2 \nu \alpha_2}{4}\left[\frac{12 + a^2\alpha_2^2}{12 + b^2\alpha_2^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \alpha_2\left(\frac{\nu a^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_2^2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\nu b^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_2^2}\right)\left[\frac{12 + a^2\alpha_2^2}{12 + b^2\alpha_2^2}\right]\right\} \operatorname{ch} \alpha_2 h;$$

$$B_9 = \left\{\frac{\nu}{\nu_2 \alpha_3}\left[\frac{(\nu+2) a^2\alpha_3^2}{12} + 4(\nu - 1)\right] - \frac{b^2 \nu \alpha_3}{4}\left[\frac{12 + a^2\alpha_3^2}{12 + b^2\alpha_3^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \alpha_3\left(\frac{\nu a^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_3^2}\right) + \alpha_3\left(\frac{\nu b^2}{12} - \frac{2\nu_2}{\alpha_3^2}\right)\left[\frac{12 + a^2\alpha_3^2}{12 + b^2\alpha_3^2}\right]\right\} \operatorname{ch} \alpha_3 h.$$

Таблица 1.

h,м	ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Техническая теория	785	2356	3926	5496	7067	8637	10208	11778	13349	14919
10	a=0,5 м b=2 м	785	2350	3900	5398	6336	6956	90908	13108	14208	15606
	a=0,25 м b=4 м	784	2324	3198	4508	7406	8930	10506	12092	13684	15276
	Техническая теория	393	1178	1963	2748	3533	4319	5104	5889	6674	7459
20	a=0,5 м b=2 м	393	1178	1960	2740	3516	4284	4520	5040	5772	6328
	a=0,25 м b=4 м	393	1176	1950	2700	3196	3486	4562	6644	7188	7898
	Техническая теория	261	784	1306	1829	2351	2874	3397	3919	4442	4964
30	a=0,5 м b=2 м	261	784	1306	1829	2351	2870	3388	3902	4412	4916
	a=0,25 м b=4 м	261	784	1306	1822	2332	2826	3194	3354	3728	3842

В качестве примера рассмотрим стержни с одинаковой площадью поперечного сечения, для которых техническая теория дает одни и те же результаты.

Данная уточненная теория дает результаты, которые зависят от размеров поперечного сечения стержня. Эту зависимость можно проследить по табл. 1.

Резюме. В данной статье дано определение спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней прямоугольного сечения с помощью полиномов третьей степени при условии строгого выполнения отсутствия нагрузки на боковых гранях.

Литература

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 5. Минск, 1978. 3. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

А.З. Севенюк

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КВАДРАТНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ УСЛОВИИ ТОЧНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА БОКОВЫХ ГРАНЯХ

В [1] дана постановка задачи о нахождении спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его боковой поверхности.

В качестве примера были определены собственные частоты продольных колебаний упругого параллелепипеда с квадратным поперечным сечением. При этом аппроксимация деформированного состояния поперечного сечения стержня была выполнена с помощью полиномов третьей степени. Возникает вопрос, а какова точность полученного решения, т.е. какие частоты следует считать достаточно точными? Это важно для коротких стержней, так как техническая теория продольных колебаний для них непригодна.