УДК 539.375

В.А. Ибрагимов, докт.физ.-мат.наук,профессор
(БПИ)

КОНЦЕПЦИЯ НЕИДЕАЛЬНО ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Принятый в линейной механике разрушения подход к определению несущей способности тела с магистральной трещиной состоит в отыскании энергетического баланса для концевой области трещины — равенства величины потока энергии I в кончик затратам I_* на образование новой поверхности трещины. Величина I_* интерпретируется при этом как удвоенная эффективная поверхностная энергия $2\gamma_*$, рассчитанная на единицу приращения длины трещины.

Следствием указанного условия является ограничение на порядок сингулярности тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} вблизи кончика трещины (r — полярный радиус, отнесенный к кончику)

$$\sigma_{ij}\ \varepsilon_{ij} \sim 1/r\ ;\quad r \to 0, \tag{1}$$

обеспечивающее конечность потока энергии I за счет ее высвобождения при продвижении трещины [1,2].

Применительно к средам, проявляющим при деформировании диссипативные свойства (упруго-пластическим, вязко-упругим и др.), основной подход линейной механики разрушения встречает затруднения [3], связанные с тем, что величина I, вычисленная для локальных полей σ_{ij}, ε_{ij}, оказывается равной нулю. Последнее с формальной точки зрения обусловлено более слабыми особенностями полей при $r \to 0$, чем в соотношении [1].

Одна из возможностей к преодолению этих затруднений в нелинейной теории трещин (обсуждавшихся, например, в [3,4] и цитированных в них работах) заключается в представлении о неидеально хрупком характере разрушения, связанном с введением в континуальных решениях зоны разрушения конечного размера впереди трещины. Последнее означает, что в отличие от решений классического типа, обладающих точечным энергостоком в кончике трещины, вводится некоторая область (с термомеханическими свойствами, отличными от основного материала среды), диссипация энергии внутри которой отождествляется с энергетическими затратами на продвижение трещины.

Имеются многочисленные физические аргументы в пользу такого представления [1], однако в силу аналитических трудностей соответствующие замкнутые решения задач о подрастании трещины с учетом нелинейных эффектов практически отсутствуют (исключением в определенной степени является известная ДБКС — модель трещины в идеально-пластическом теле, введенная из независимых соображений).

Рассмотрим задачи о квазистатическом стационарном росте трещины продольного сдвига, иллюстрирующие концепцию неидеального хрупкого

разрушения для общего случая упрочняющихся упруго-пластических сред. Показано, что при надлежащей интерпретации определяющих соотношений поток энергии в кончик остается конечным при отсутствии сингулярности (1) свертки напряжений и деформаций при $r \to 0$, что позволяет сохранить энергетический подход для нелинейных необратимых сред.

1. Предположим, что к кончику растущей трещины примыкает зона ослабленных связей, моделируемая отрезком OA ($0 \leqslant x \leqslant d$; $y=0$) (рис. 1,а). Антиплоское состояние тела отнесено к подвижной системе координат Oxy и характеризуется ненулевой компонентой перемещения $w(x, y)$ вдоль оси Oz, совпадающей с краем трещины.

Естественным следствием концепции неидеально хрупкого разрушения является ассоциированное с ней представление об ограниченной деформируемости среды в пластической области

$$\gamma \leqslant \gamma_c, \tag{2}$$

где $\gamma = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}$ – интенсивность деформаций сдвига $\gamma_x = \partial w/\partial x$; $\gamma_y = \partial w/\partial y$; индекс z для краткости опущен).

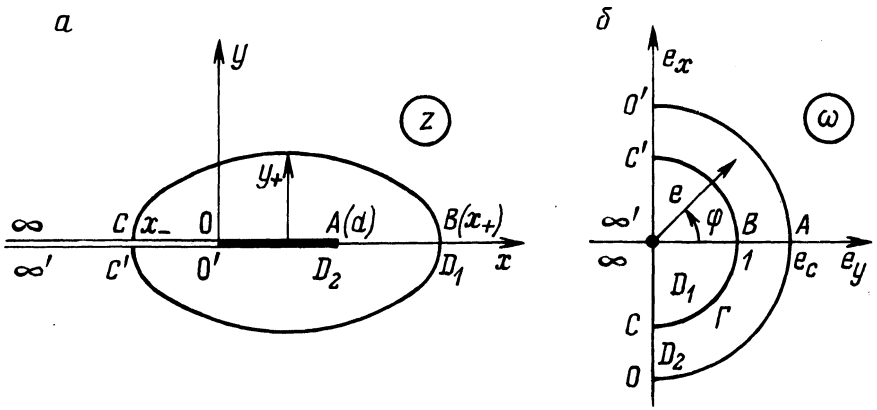

Рис. 1.

Ограничение (2) эквивалентно введению разрыва перемещений вдоль OA; при этом считаем, что на его берегах величина γ постоянна и равна предельному значению

$$\gamma = \gamma_c \quad (0 \leqslant x \leqslant d\ ;\ y = 0). \tag{3}$$

Отметим, что (3) является здесь единственным инвариантным условием при изотропном деформировании.

Указанная постановка является естественным обобщением ДБКС-модели на случай произвольной деформации γ_c и нелинейной связи напряжений и деформаций – с одной стороны (пластическая зона при этом не является во-

2 Зак. 5198

обще бесконечно узкой) и концепций классических теорий прочности — с другой .

Примем деформационную теорию пластичности (τ_o — начальный предел текучести при сдвиге) :

$$\tau_i = \frac{\tau(\gamma)}{\gamma}\gamma_i \ (i = x, y); \ \tau(\gamma) = \tau_o\gamma/\gamma_o \quad (\gamma \leqslant \gamma_o);$$
$$\tau = \tau_o(\gamma/\gamma_o)^{a} \ (\gamma_o \leqslant \gamma \leqslant \gamma_c; \ 0 \leqslant a \leqslant 1; \ \tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2). \tag{4}$$

Краевые условия задачи для полубесконечной трещины $x \leqslant 0$, $y=0$ имеют вид

$$\tau_y = 0 \ (x < 0, y = 0); \ \tau_y + i\tau_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi z}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right); \tag{5}$$

$$z = x + iy \to \infty.$$
$$(i^2 = -1)$$

Здесь через τ_x ; τ_y обозначены сдвиговые напряжения и предполагается, что $x,y \to \infty$ реализуется тонкая структура (упругое поле) с коэффициентом интенсивности напряжения K. К соотношениям (3) — (5) следует присоединить также уравнения равновесия $\partial\tau_x/\partial x + \partial\tau_y/\partial y = 0$ и совместности деформаций $\partial\gamma_y/\partial x - \partial\gamma_x/\partial y = 0$.

Следуя методу статьи [5],перейдем посредством преобразования

$$x = x\ (e_y, e_x); \ y = y\ (e_y, e_x) \ \ (e_i = \gamma_i/\gamma_o, \ i = x,y) \tag{6}$$

на плоскость годографа деформаций. Образ исходной области D_1+D_2 представлен на рис. 1,б; соответствие точек показано одноименными буквами, причем неизвестный упруго-пластический контур Г переходит в окружность $e = 1$, контур OAO' зоны разрушения — в окружность $e = e_c$ ($e = \gamma/\gamma_o$; $e_c = \gamma_c/\gamma_o$).

Согласно [5] существует потенциальная функция $\Psi(e, \varphi)$

$$z = x + iy = \frac{1}{\gamma_o}\left(i\frac{\partial\Psi}{\partial e} + \frac{1}{e}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\exp(-i\varphi)$$

$$(e_y + ie_x = e\cdot\exp(i\varphi)), \tag{7}$$

удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial e^2} + \frac{1}{e}\frac{\partial\Psi}{\partial e} + \frac{1}{e^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{8}$$

Значения параметра в (8) равны: $p = 1$ в упругой области D_1 ($0 \leqslant e \leqslant 1$), $p = a$ в пластической области D_2 ($1 < e \leqslant e_c$).

Краевые условия (5) с учетом (7) запишутся ($G = \tau_o/\gamma_o$)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0 \ (\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, 0 \leqslant e \leqslant e_c); \ \Psi \sim \frac{K^2}{2\pi G^2 \gamma_o} \cdot \frac{\sin\varphi}{e} \ (e \to 0). \quad (9)$$

Представление решения уравнения (8) в D_2 имеет вид

$$z = \varkappa^2 \sum_{\kappa=0}^{\infty} [L_\kappa(e)\sigma^{2\kappa} + N_\kappa(e)\sigma^{-2\kappa-2}]; \quad \left.\begin{matrix} L_\kappa \\ N_\kappa \end{matrix}\right\} = a_\kappa(\lambda_\kappa \pm$$

$$\pm\nu_\kappa) e^{\nu_\kappa - 1} + b_\kappa(\lambda_\kappa \pm \mu_\kappa) e^{\mu_\kappa - 1} \quad (\sigma = \exp(i\varphi); \varkappa^2 = K^2/2\pi G^2\gamma_o^2), \quad (10)$$

где значения ν_κ, μ_κ определяются зависимостями

$$\left.\begin{matrix} \nu_\kappa \\ \mu_\kappa \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[1 - a \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4\lambda_\kappa^2}]; \quad \lambda_\kappa = 2k + 1 \ (k = 0,1,2...).$$

Неизвестные коэффициенты a_κ, b_κ будут найдены из условия непрерывности физических координат $z = x + iy$ на Г

$$[z] = 0 \quad (e = 1). \quad (11)$$

Поскольку в D_1 уравнение (8) определяет гармоническую функцию $\Psi(e, \varphi)$, из (7), (9) следует, что $z(e, \varphi)$ аналитична в D_1 относительно комплексной переменной $\omega = e_y + ie_x$ и имеет полюс второго порядка при $e = |\omega| \to 0$

$$z = -\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 0\left(\frac{1}{\omega^2}\right).$$

Разложение $z(e, \varphi) = z(\omega)$ в степенной ряд при $|\omega| < 1$ не содержит отрицательных степеней ω, кроме ω^{-2}. Отсюда согласно (10), (11) находим

$$N_o(1) = 1; \quad N_m(1) = 0 \ (m = 1,2, ...). \quad (12)$$

Кроме того, при $e = e_c$ имеем $y = \operatorname{Im} z = 0$, поэтому в (10)

$$L_m(e_c) - N_{m-1}(e_c) = 0 \ (m = 1, 2,...). \quad (13)$$

Опуская преобразования, укажем явный вид решения бесконечной системы линейных уравнений (12), (13) относительно a_κ, b_κ:

$$a_\kappa = \frac{A_\kappa}{\lambda_\kappa + \nu_\kappa} e_c^{1-\nu_\kappa}; \ b_\kappa = \frac{B_\kappa}{\lambda_\kappa + \mu_\kappa} (\kappa = 0,1,2,...); \quad (14)$$

$$A_1 = e_c^{-a-1}\left(1 - \frac{(\lambda_1 - \nu_1)(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + \nu_1)(\lambda_1 - \mu_1)} \cdot e_c^{\mu_1 - \nu_1}\right);$$

$$A_n = A_1 \frac{1+\nu_n/\lambda_n}{1+\nu_1/\lambda_1} s_n ; \qquad B_o = \frac{1-a}{1+a};$$

$$B_n = -A_n \frac{(\lambda_n - \nu_n)(\lambda_n + \mu_n)}{(\lambda_n + \nu_n)(\lambda_n - \mu_n)} e_c^{1-\nu_n};$$

$$s_n = \prod_{m=1}^{n-1} \left\{ \frac{(1-\nu_m/\lambda_m)}{(1+\nu_{m+1}/\lambda_{m+1})} (1 - e_c^{\mu_m - \nu_m}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{(\lambda_{m+1} - \nu_{m+1})(\lambda_{m+1} + \mu_{m+1})}{(\lambda_{m+1} + \nu_{m+1})(\lambda_{m+1} - \mu_{m+1})} \cdot e_c^{\mu_{m+1} - \nu_{m+1}}\right)\right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Значение постоянной A_o в (14) отыскивается из условия примыкания зоны разрушения OA к кончику трещины $z(\pm ie_c) = 0$ и равно

$$A_o = -N_o(e_c) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa+1} [L_\kappa(e_c) + N_\kappa(e_c)], \tag{15}$$

где величины $L_\kappa(e_c)$; $N_\kappa(e_c)$ определяются по формулам (10), (14).

Длина зоны разрушения d зависит от величины предельной деформации e_c и параметров задачи K, a, G

$$d = z(1) = \varkappa^2 \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} L_\kappa(1) + 1\right). \tag{16}$$

Нетрудно показать, что абсолютная сходимость ряда (10) обеспечивается для значений $0 < a \leqslant 1$ показателя упрочнения в (4). Поэтому для любого уровня предельной деформации $e_c = \gamma_c/\gamma_o \geqslant 1$ формулы (10), (14) – (16) дают решение задачи с зоной разрушения длины d (e_c, K, a); его частными случаями являются известные результаты для идеальной пластичности Кострова, Никитина ($e_c = 1$) и Хюлта, Макклинтока ($e_c \to \infty$) (см.,напр., [2]).

На рис. 2 показаны зависимости отнесенных к $K^2/2\pi\tau_o^2$ длин отрезка d (e_c, a, K) (кривая 1), наибольшего $x_+ = x_+$ (e_c, a, K) (кривая 2) и наименьшего $x_- = x_-$ (e_c, a, K) (кривая 3) продольного и y_+ – поперечного (кривая 4) размеров пластической зоны (при $a = 0{,}2$).

Для вычисления удельной работы разрушения γ_* используем инвариантный I-интеграл [2]

$$I = \int_C (E n_1 - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j) ds = 2\gamma_* \tag{17}$$

для контура интегрирования C вдоль берегов трещины и зоны OAO' (n_j – компоненты нормали к контуру C; j = x, y). Используя (10), получим

$$2\gamma_* = -2\int_0^d \tau_y \frac{\partial w}{\partial x}\, dx = \frac{K^2}{2\pi G}\cdot e_c^{a+1}\int_{-\pi/2}^{0} \frac{x}{\partial e^2}\, d(\sin 2\varphi) = \frac{K^2}{2G}. \qquad (18)$$

Найденное значение оказывается конечным и не зависит от выбора уровня предельной деформации γ_c и степени упрочнения a, как и следовало ожидать при наличии тонкой структуры.

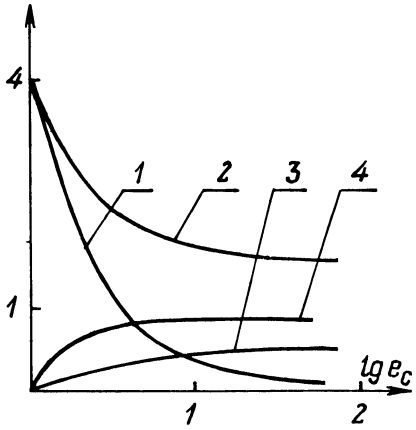

Рис. 2.

2. В рассмотренной выше задаче предполагалось, что среда является нелинейно-упругой. С целью учета остаточных деформаций в зоне разгрузки, возникающей за фронтом пластической области, рассмотрим эту же задачу для теории течения

$$\dot\gamma_i = \frac{\dot\tau_i}{G} + \delta\,\tau\dot\tau\tau_i \quad (\delta = \text{const при } \dot\tau > 0,\ \delta = 0 \text{ при } \dot\tau \leqslant 0,\quad i=x,y), \qquad (19)$$

где G — упругий модуль сдвига. Точкой обозначено дифференцирование по параметру нагружения, причем вследствие стационарности режима движения трещины в подвижной системе осей Oxy и однородности уравнений можно принять $\dot\gamma_x = -\partial\gamma_x/\partial x$; $\dot\gamma_y = -\partial\gamma_y/\partial x$ и т.д.

Укажем, что согласно определяющим уравнениям (19) пластические деформации накапливаются в течение всего активного процесса нагружения элемента среды (начальная поверхность нагружения соответствует при этом значению $\tau = 0$), что позволяет исключить из рассмотрения контур Г пластической области D_2.

Обозначим D_+, D_- области активного нагружения ($\dot\tau = -\partial\tau/\partial x > 0$) и разгрузки ($\partial\tau/\partial x > 0$), примыкающие к зоне OA и разделяемые неизвестной заранее линией BC (рис. 3, а).

Имея в виду метод малого параметра, будем считать пластические деформации в (19) малыми ($\varepsilon = \delta\tau_o^3/\gamma_o \ll 1$) и представим искомые поля в виде

$$\sigma_i = \overset{o}{\sigma}_i + \Delta\sigma_i;\ e_i = \overset{o}{e}_i + \Delta e_i\ (\sigma_i = \tau_i/\tau_o;\ e_i = \gamma_i/\gamma_o;\ i = x, y)\,. \qquad (20)$$

Функции, помеченные нулевым индексом, соответствуют вспомогательному линейно-упругому решению для диаграммы $\tau = \tau_o\gamma/\gamma_o$ (выбор постоянной $\tau_o = G\gamma_o$ будет указан ниже) ; $\Delta\sigma_i, \Delta e_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

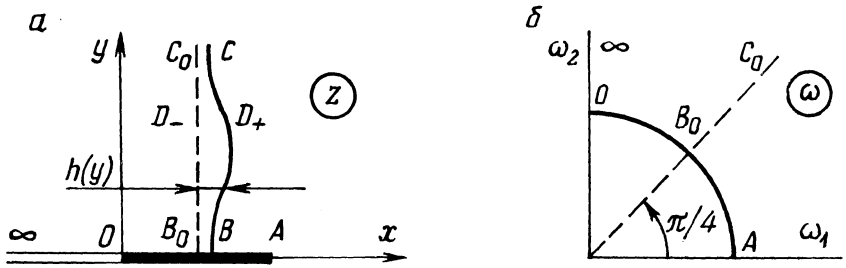

Рис. 3.

Линеаризация соотношений (19) дает

$$\frac{\partial \overset{o}{e}_i}{\partial x} = \frac{\partial \overset{o}{\sigma}_i}{\partial x};\quad \frac{\partial \Delta e_i}{\partial x} = \frac{\partial \Delta\sigma_i}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_o^2)\overset{o}{\sigma}_i$$

$$(\sigma_o^2 = \overset{o}{\sigma}{}_x^2 + \overset{o}{\sigma}{}_y^2)\,. \qquad (21)$$

Краевые условия (5) согласно (20) запишутся

$$\overset{o}{\sigma}_y = 0\ (x < 0,\ y = \pm 0);\ \overset{o}{\sigma}_y + i\overset{o}{\sigma}_x \sim \frac{K}{\tau_o\sqrt{2\pi z}}\ (z \to \infty); \qquad (22)$$

$$\Delta\sigma_y = 0\ (x < 0,\ y \pm 0);\ \Delta\sigma_y + i\Delta\sigma_x = 0\ \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\ (z \to \infty)\,.$$

Решение задачи для нулевого приближения $\overset{o}{\sigma}_i$, $\overset{o}{e}_i$ следует из п.1 и имеет вид

$$\overset{o}{\sigma}_y + i\overset{o}{\sigma}_x \leq \frac{2K}{\tau_o\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{z-d} + \sqrt{z})};\quad d = \frac{2K^2}{\pi\tau_o^2}, \qquad (23)$$

где постоянная $\tau_o = G\overset{o}{\gamma}_c$ определяется уровнем предельной деформации $\overset{o}{\gamma}_c$.

Дополнительные напряжения и деформации связаны линейными соотношениями, получаемыми при интегрировании второй группы уравнений в (21)

$$\Delta e_i = \Delta\sigma_i - a_i\ (D_+^o)\,; \qquad \Delta e_i = \Delta\sigma_i - a_i^*\ (D_-^o)\,;$$
$$a_i = \frac{\varepsilon}{2}\int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_o^2)\sigma_i^o\,dx\,;\ a_i^* = a_i/_{B_oC_o}\ (i = x,y)\,. \tag{24}$$

Здесь через D_+^o ($x \geqslant d/2$) ; D_-^o ($x < d/2$) обозначены соответственно области нагружения и разгрузки для решения (23) ; линия B_oC_o ($x = d/2$) соответствует условию $\partial\sigma_o/\partial x = 0$. Подчеркнем, что величины a_i^* совпадают со значениями $a_i(d/2, y)$ на B_oC_o при одинаковых значениях y, поэтому $a_i^* = a_i^*(y)$.

Как и в п. 1 предположим, что вдоль зоны разрушения OAO' реализуется условие $\tau = \tau_c$, принимающее после линеаризации вид

$$\sigma_y^o\Delta\sigma_y + \sigma_x^o\Delta\sigma_x = (\sigma_c^2 - 1)/2 \quad (0 \leqslant x \leqslant d,\ y = \pm 0)\,. \tag{25}$$

При формулировке условия (25) размер d зоны разрушения принят совпадающим с аналогичным для нулевого приближения (23) , поэтому величина $\sigma_c = \tau_c/\tau_o$ заранее не фиксирована.

Кроме того, для любых точек $M \in CB$, $M_o \in C_oB_o$ с совпадающими ординатами

$$\sigma_i(M) = \sigma_i^o(M) + \Delta\sigma_i(M) \approx \sigma_i^o(M_o) + \frac{\partial\sigma_i^o}{\partial x}(M_o)\,h(y) + \Delta\sigma_i(M_o)\,,$$

поэтому с учетом непрерывности функций σ_i^o , $\partial\sigma_i^o/\partial x$ получаем на B_oC_o

$$[\Delta\sigma_i] = 0 \quad (x = d/2)\,. \tag{26}$$

Снесенное на B_oC_o с помощью аналогичных преобразований условие нейтрального нагружения (25)

$$h(y)\frac{\partial^2\sigma_o}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x^o\Delta\sigma_x + \sigma_y^o\Delta\sigma_y) = 0 \ \left(x = \frac{d}{2}\right)$$

служит для определения расстояния h между BC и B_oC_o (и, следовательно, контура BC) .

Используя уравнения равновесия и совместности в комплексной форме

$$\mathrm{Im}\,\frac{\partial s}{\partial z} = 0;\ \mathrm{Re}\,\frac{\partial t}{\partial z} = 0\ (s = \Delta\sigma_y + i\,\Delta\sigma_x;\ t = \Delta e_y + i\Delta e_x)$$

и первую из формул (24) , в зоне нагружения D_+^o получим

$$2\frac{\partial s}{\partial\bar z} = \frac{\partial a}{\partial\bar z} + \frac{\partial\bar a}{\partial z}\ (a = a_y + i\,a_x)\,. \tag{27}$$

Представление решения для (27) имеет вид

$$s_1(z,\bar z) = F_1(z) + ia_x + \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial x}\,, \tag{28}$$

где $F_1(z)$ — произвольная аналитическая функция; $M(z,\bar{z})$ — любое частное решение уравнения

$$\partial M/\partial \bar{z} = \bar{a}. \tag{29}$$

Аналогично можно показать, что в зоне разгрузки D^o_- представление решения будет ($F_2(z)$ — аналитическая функция)

$$s_2(z,\bar{z}) = F_2(z) + i a^*_x . \tag{30}$$

Из (26) с учетом формул (28) — (30) следует

$$s_2 - s_1 = 0;\ F_2 - F_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial z} + \frac{1}{2}a^* - i a^*_x = \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial x}\ (x = \frac{d}{2}). \tag{31}$$

Для дальнейшего удобно использовать плоскость вспомогательного переменного $\omega = \omega_1 + i\,\omega_2$ посредством конформного отображения

$$z = \frac{d}{4}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2. \tag{32}$$

Области, отвечающие нагружению и разгрузке, показаны на рис. 3,б (вследствие симметрии показана верхняя половина полуплоскости).

Правая часть в (30) является граничным при $x = d/2$ или $\varphi = \arg\omega = \pi/4$ значением функции, определяемой согласно (29) уравнением

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x},$$

поэтому из (24), (32) имеем

$$\frac{1}{z'(\omega)}\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{f'}{z'}\bar{f} + f\frac{\bar{f}'}{\bar{z}'}\right)\bar{f}\ \left(f = \sigma^o_y + i\sigma^o_x;\right.$$

$$\left. f' = \frac{\partial f}{\partial \omega}\right). \tag{33}$$

Как видно из (23), (32) $f = 1/\omega$, тогда ограниченное при $\omega \to 1$ ($z \to d/2$) и удовлетворяющее условию на бесконечности (22) решение уравнения (33) имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{\omega}{\omega^4 - 1}\left[\ln\bar{\omega} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\bar{\omega}^4} - 1\right)\right] - \frac{1}{2\omega\bar{\omega}^2}\right\}. \tag{34}$$

Переходя к решению краевой задачи для $F_1(z)$, $F_2(z)$ (31) обозначим

$$H_1(\omega) = F_1(z(\omega))\,\omega;\ H_2(\omega) = \left[F_2(z(\omega)) - \frac{1}{2}q(\omega)\right]\omega, \tag{35}$$

где $$q(\omega) = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\omega}{\omega^4 - 1}\ln\frac{\omega}{i} + \frac{1}{4\omega^3}\right). \tag{36}$$

С помощью соотношений (31), (34); (35) находим

$$H_1 - H_2 = 0\ (\varphi = \pi/4),$$

поэтому функции (36) аналитически продолжают друг друга через луч B_oC_o.

Краевое условие на единичной окружности $|\omega|=1$ (25) запишется

$$\operatorname{Re} H_1 = \frac{1}{2}(\sigma_c^2 - 1) - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\theta\frac{\partial M}{\partial x}\right) \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4);$$
$$\operatorname{Re} H_2 = \frac{1}{2}(\sigma_c^2 - 1) - \operatorname{Re}(q\theta^2/2) \quad (\pi/4 < \varphi \leqslant \pi/2;\ \theta = \exp(i\varphi)). \tag{37}$$

В соотношениях (37) учтено, что $a_x = a_x^* = 0$ при $|\omega|=1$.

Вычисление правых частей (37) согласно (34), (35) дает

$$\operatorname{Re} H_1 = \frac{1}{2}(\sigma_c^2 - 1) - \frac{\varepsilon}{8}\left\{\frac{2\theta^2 \ln\theta}{\theta^4 - 1} + \frac{1}{4}\left(\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}\right)\right\} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4);$$
$$\operatorname{Re} H_2 = \frac{1}{2}(\sigma_c^2 - 1) + \frac{\varepsilon}{8}\left\{\frac{2\theta^2 \ln(\theta/i)}{\theta^4 - 1} + \frac{1}{4}\left(\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}\right)\right\} \tag{38}$$
$$(\pi/4 < \varphi \leqslant \pi/2).$$

Вторая группа условий (22) переходит в

$$\operatorname{Im} H_2 = 0 \ \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right);\ H_1, H_2 = O(1),\ \omega \to \infty. \tag{39}$$

Решение краевой задачи (38), (39) без труда отыскивается в квадратурах посредством ее сведения к задаче сопряжения, однако, учитывая специфику последующих вычислений, построим решение в виде ряда

$$H(\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa \omega^{-2\kappa} \quad (\operatorname{Im} a_\kappa = 0;\ \kappa = 1,2,\ldots);$$
$$H = H_1 \ (D_0^+),\ H = H_2 \ (D_-^0). \tag{40}$$

Обычная процедура отыскания коэффициентов приводит к значениям

$$a_0 = \sigma_c^2 - 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + 2\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi\, d\varphi}{\sin 2\varphi}\right),\ a_{2n-1} = 0; \tag{41}$$

$$a_{2n} = \frac{\varepsilon}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{4(4n^2-1)} - \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi \cos 4n\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi\right\} \ (n = 1,2,\ldots).$$

Первое из соотношений (39) выполняется при этом тождественно; второе удовлетворяется, если

$$a_0 = 0,\ \sigma_c^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(1 + \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi}\right). \tag{42}$$

Значение предельного напряжения σ_c (42) соответствует длине d отрезка OA из (23).

Для отыскания удельной работы разрушения следует вычислить I-интеграл (17) вдоль контура OAO'. Опуская члены второго порядка малости, имеем

$$2\gamma_* = -2\tau_o\gamma_o \int_0^d [\sigma_y^o e_x^o + (\sigma_y^o \Delta e_x + \sigma_x^o \Delta e_y)]\,dx,$$

откуда с учетом формул (23), (28), (30) следует

$$2\gamma_* = \frac{\pi}{4}\tau_o\gamma_o d\left(1 + \frac{2\varepsilon}{3\pi}\right) = \frac{K^2}{2G}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{3\pi}\right). \qquad (43)$$

Формула (43), основанная на представлении о ненулевой длине зоны разрушения внутри пластической области, определяет, как и в п. 1, конечное значение работы разрушения. Отклонение значения (43) от аналогичного для обратимых сред (равного $K^2/2G$) имеет тот же знак, что и наблюдаемое в эксперименте. Поэтому можно полагать, что привлечение концепции неидеально хрупкого разрушения окажется полезным для определения законов роста трещины (условий предельного равновесия, докритических диаграмм разрушения) и в общем случае, когда остаточные пластические деформации в определяющих соотношениях типа (19) не являются малыми.

Литература

1. Сборник "Разрушение"/Под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1973, т. 1, с. 615. 2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974, с. 500. 3. Ибрагимов В.А., Клюшников В.Д. О некоторых характерных особенностях упругопластических решений в теории трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 122–131. 4. Кфури А., Райс Д. Скорость высвобождения энергии деформации при увеличении размера трещины на конечную величину в упругопластической среде. — В сб.: Механика разрушения (разрушение материалов). М.: Мир, 1979, № 17, с. 19–39. 5. Ибрагимов В.А. Антиплоская деформация около выреза в упрочняющемся упругопластическом материале. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1, с. 135–144.

УДК 539.311

А.Е. Крушевский, канд.техн.наук,доцент,
В.А. Акимов, ассистент
(БПИ)

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛИТЫ В ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье [1], на основе решении задачи о равновесии плиты в точной постановке вариационным методом приведен конкретный пример осесимметричного равновесия круглой пластинки, в котором указан способ нахождения неизвестных постоянных, входящих в выражение для перемещений и напряжений, из граничных условий при помощи дифференциальных операторов. В данной работе делается попытка найти коэффициенты B_n и оценить сходимость получающихся для перемещений и напряжений рядов. Принимая