где $\alpha_2^2 = 4E_1/3\rho R^2$; $\beta_2 = (\sigma_\theta^* - 4E_1\varepsilon_\theta^*/3)/\rho R$.

Оболочка II при разгрузке движется по закону

$$u_2 = u_1^* - K\ (f_{max} - f). \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в условие совместности движения (3.4), получаем линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода для определения контактного давления при разгрузке.

Методы решений уравнений подобного типа хорошо известны [6].

Литература

1. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Нестационарное взаимодействие двух цилиндрических коаксиальных оболочек. — Проблемы машиностроения, 1976, вып. 3, с. 50—55. 2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с. 3. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. — Киев: Наукова думка, 1978. — 182 с. 5. Тимошенко С.П., Гудьер Д.Я. Теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 575 с. 6. Краснов Л.М. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

УДК 539.3:534.1

М.Д. Мартыненко, докт.физ.-мат.наук, профессор,
Фам Дык Тинь, студент
(БГУ)

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО КОНТУРУ

Расчет круглых пластин линейно-переменной толщины с начальной погибью срединной поверхности часто осуществляется на основании введения гипотезы о незначительном влиянии погиби на напряженное состояние, причем погрешность такой гипотезы не оценивается. В настоящей работе методом малого параметра получено приближенное выражение для собственных колебаний круглых защемленных пластин линейно-переменной толщины, срединная поверхность которых является прямым круговым конусом раствора $\pi - 2\varphi_0$, где $\varphi_0 \ll 1$.

Рассматриваются тонкие пластины, одна из ограничивающих поверхностей которых является плоскостью, а вторая — конической поверхностью. Предполагается, что толщина пластины меняется по закону

$$h(x) = h_0[1 + \lambda\ (2\frac{x}{a} - 1)], \tag{1}$$

где a — радиус пластины; x — координата, отсчитываемая от ее центра по направлению образующей срединной поверхности, $h_0 = h(\frac{a}{2})$ $|\lambda| \ll 1$ (рис. 1).

Задача о свободных осесимметричных колебаниях круглых пластин переменной толщины сводится к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений равновесия [1]:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xN_x) - \frac{1}{x}N_\varphi + \rho h \omega^2 v = 0; \\ \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xQ_x) - \frac{1}{x}\operatorname{tg}\varphi_0 N_\varphi + \rho h \omega^2 w = 0; \\ Q_x = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xM_x) - \frac{1}{x}M_\varphi, \end{cases} \tag{2}$$

где $N_x, N_\varphi, Q_x, M_x, M_\varphi$ – обобщенные силы и изгибающие моменты; v, w – компоненты вектора перемещения в направлениях образующей срединной поверхности и нормали к этой поверхности; ρ – плотность; ω – частота колебаний, при следующих граничных условиях:

$$v(a) = w(a) = w'(a) = 0. \tag{3}$$

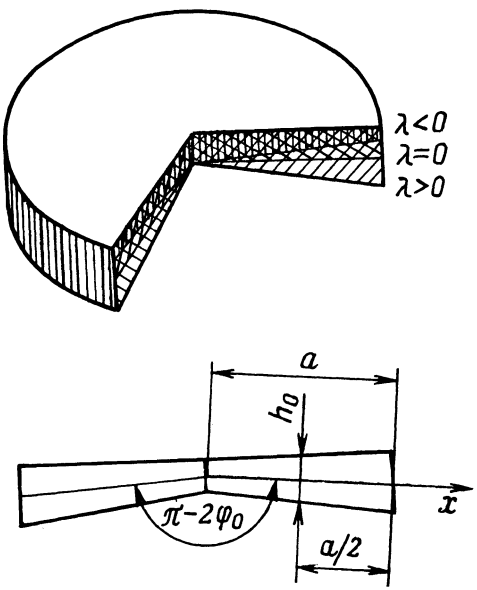

Рис. 1. Круглая пластина линейно-переменной толщины с начальной кривизной срединной поверхности.

Предположим, что пластинка односвязна. Тогда в ее центре должны быть выполнены такие условия:

$$w'(0) = v(0) - \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot w(0) = Q_x(0) - \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot N_x(0) = 0. \tag{4}$$

Эти условия означают, что угол раствора срединной поверхности пластины не меняется в процессе колебаний, перемещение центра пластины в горизонтальном направлении отсутствует, а перерезывающая сила равна нулю.

Введем безразмерные переменные:

$$
\begin{cases}
\tilde{v} = \dfrac{v}{a}\ ;\ \tilde{w} = \dfrac{w}{a};\ r = \dfrac{x}{a};\ \tilde{h}_o = \dfrac{h_o}{a}\ ;\ \tilde{\omega}^2 = \omega^2 \cdot \dfrac{12(1-\nu^2)a^4\rho}{Eh_o^2}\ ; \\[2ex]
\tilde{h} = \dfrac{h}{h_o}\ /\tilde{D} = \dfrac{12(1-\nu^2)}{Eh_o^3}\ \ D = \tilde{h}^3;\ \tilde{A} = \dfrac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh_o^3} \cdot A = \dfrac{12\tilde{h}}{\tilde{h}_o^2}\ ; \\[2ex]
\tilde{N}_r = \dfrac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh_o^3}\ N_x = \tilde{A}\left[\dfrac{d\tilde{v}}{dr} + \dfrac{\nu}{r}(\tilde{v} + \mathrm{tg}\,\varphi_o\,\tilde{w})\right]; \\[2ex]
\tilde{N}_\varphi = \dfrac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh_o^3}\ N_\varphi = \tilde{A}\left[\dfrac{1}{r}(\tilde{v} + \mathrm{tg}\,\varphi_o \cdot \tilde{w}) + \nu \cdot \dfrac{d\tilde{v}}{dr}\right]; \\[2ex]
\tilde{M}_r = \dfrac{12(1-\nu^2)}{Eh_o^3}\ M_{\tilde{x}} = \tilde{D}\left[-\dfrac{d^2\tilde{w}}{dr^2} - \dfrac{\nu}{r}\dfrac{d\tilde{w}}{dr}\right); \\[2ex]
\tilde{M}_\varphi = \dfrac{12(1-\nu^2)}{Eh_o^3}\ M_\varphi = \tilde{D}\left[-\dfrac{1}{r}\dfrac{d\tilde{w}}{dr} - \nu\dfrac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right]; \\[2ex]
\tilde{Q}_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\tilde{M}_r) - \dfrac{1}{r}\tilde{M}_\varphi .
\end{cases}
\tag{5}
$$

Тогда для определения $\tilde{w}$, $\tilde{v}$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left\{-\dfrac{d}{dr}\left[r\tilde{D}\left(\dfrac{d^2\tilde{w}}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{d\tilde{w}}{dr}\right)\right] + \tilde{D}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\tilde{w}}{dr} + \right.\right. \\[2ex]
\left.\left. + \nu \cdot \dfrac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right)\right\} - \tilde{A} \cdot \dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi_o}{r}\left(\dfrac{\tilde{v} + \mathrm{tg}\varphi_o\tilde{w}}{r} + \nu \cdot \dfrac{dv}{dr}\right) + \tilde{\omega}^2\tilde{h}\tilde{w} = 0; \\[2ex]
\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}\left\{\tilde{A} \cdot r\left[\dfrac{d\tilde{v}}{dr} + \dfrac{\nu}{r}(\tilde{v} + \mathrm{tg}\,\varphi_o \cdot \tilde{w})\right]\right\} - \dfrac{\tilde{A}}{r}\left(\dfrac{\tilde{v} + \mathrm{tg}\varphi_o\tilde{w}}{r} + \right. \\[2ex]
\left. + \nu \cdot \dfrac{d\tilde{v}}{dr}\right) + \tilde{\omega}^2\tilde{h}\tilde{v} = 0.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Граничные условия (3) — (4) принимают следующий вид:

$$
\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1) = \tilde{w}'(1) = \tilde{w}'(0) = \tilde{v}(0) - \mathrm{tg}\varphi_o \cdot \tilde{w}(0) = \tilde{Q}_r(0) - \mathrm{tg}\varphi_o \cdot \tilde{N}_r(0) = 0. \tag{7}
$$

Интегрирование системы (6) – (7) проведем по методу малого параметра. Поскольку

$$\operatorname{tg}\varphi_o = \lambda\tilde{h}_o + 0(\lambda^3);\ \tilde{h}=1+\lambda(2r-1);\ \tilde{A}=\frac{12}{\tilde{h}_o^2}\,[\,1+\lambda(2r-1)\,];$$

$$\tilde{D} = 1 + 3\lambda(2r-1) + O\,(\lambda^2),$$

то, полагая

$$\begin{cases} \tilde{w} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{w}_i\lambda^i;\ \tilde{v} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{v}_i\lambda^i; \\ \tilde{\omega} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{\omega}_i\,\lambda^i, \end{cases} \tag{8}$$

получим для определения $\tilde{w}_i$, $\tilde{v}_i$, $\tilde{\omega}_i$ следующую систему дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr}\right)^2 \tilde{w}_o + \tilde{\omega}_o^2\,\tilde{w}_o = 0; \\ \dfrac{12}{\tilde{h}_o^2}\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr} - \dfrac{1}{r^2}\right)\tilde{v}_o + \tilde{\omega}_o^2\,\tilde{v}_o = 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_o(1) = \tilde{v}_o(0) = \tilde{w}_o(1) = \tilde{w}_o'(1) = \tilde{w}_o'(0) = 0; \\ \left(-\tilde{w}_o''' - \dfrac{1}{r}\,\tilde{w}_o'' + \dfrac{1}{r^2}\,\tilde{w}_o'\right)_{r\to 0} = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr}\right)^2\tilde{w}_1 + \tilde{\omega}_o^2\,\tilde{w}_1 + 2\tilde{\omega}_o\,\tilde{\omega}_1\tilde{w}_o = 12\cdot\dfrac{d^3\tilde{w}_o}{dr^3} + \\ + \dfrac{12+6\nu}{r}\,\dfrac{d^2\tilde{w}_o}{dr^2} - \dfrac{6}{r^2}\,\dfrac{d\tilde{w}_o}{dr} + (4r-2)\,\tilde{w}_o + \dfrac{12}{\tilde{h}_o r}\left(\dfrac{\tilde{v}_o}{r} + \right. \\ \left. +\nu\,\dfrac{d\tilde{v}_o}{dr}\right); \\ \dfrac{12}{\tilde{h}_o^2}\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr} - \dfrac{1}{r^2}\right)\tilde{u}_1 + \tilde{\omega}^2\,\tilde{v}_1 + 2\tilde{\omega}_o\,\tilde{\omega}_1\tilde{v}_o = \\ = -\dfrac{24}{\tilde{h}_o^2}\left(\dfrac{d\tilde{v}_o}{dr} + \dfrac{\nu}{r}\,\tilde{v}_o\right) - \dfrac{12}{\tilde{h}_o r}\left(\nu\,\dfrac{d\tilde{w}_o}{dr} - \dfrac{\tilde{w}_o}{r}\right); \end{cases} \tag{11}$$

$$\tilde{v}_1(1) = \tilde{w}_1(1) = \tilde{w}_1'(1) = \tilde{w}_1'(0); \quad \tilde{v}_1(0) = \tilde{h}_o \tilde{w}_o(0);$$

$$\left(-\tilde{w}_1''' - \frac{1}{r}\tilde{w}_1'' + \frac{1}{r^2}\tilde{w}_1'\right)_{r\to 0} = \left[6\left(\tilde{w}_o'' + \frac{\nu}{r}\tilde{w}_o'\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{\tilde{h}_o}\left(\tilde{v}_o' + \frac{\nu}{r}\tilde{v}_o\right)\right]_{r\to 0}. \qquad (12)$$

Граничные задачи (9), (10) представляют собой две независимые системы уравнений для определения $\tilde{w}_o$ и $\tilde{v}_o$, так что в нулевом приближении (т.е. при $\lambda = 0$) получим следующие собственные вектор-функции и собственные частоты: $(\tilde{w}_{on}^{I})_{n=1}^{\infty}$, $(\tilde{\omega}_{on}^{I})_{n=1}^{\infty}$, которые описывают задачу об изгибных колебаниях пластин постоянной толщины; $(\tilde{v}_{on}^{II})_{n=1}^{\infty}$, $(\tilde{\omega}_{on}^{II})_{n=1}^{\infty}$ представляют собой собственные функции и собственные частоты задачи о радиальных колебаниях пластин постоянной толщины. Они являются решениями таких задач:

$$-\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \tilde{w}_{on}^{I} + (\tilde{\omega}_{on}^{I})^2 \tilde{w}_{on}^{I} = 0; \quad \tilde{v}_{on}^{I} \equiv 0; \qquad (13)$$

$$\tilde{w}_{on}^{I}(1) = (\tilde{w}_{on}^{I})'(1) = (\tilde{w}_{on}^{I})'(0) = \left[-(\tilde{w}_{on}^{I})''' - \frac{1}{r}(\tilde{w}_{on}^{I})'' + \right. \qquad (14)$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}(w_{on}^{I})'\right]_{r\to 0} = 0.$$

Ортонормированные собственные функции-решения (13) – (14) имеют вид

$$\tilde{w}_{on}^{I}(r) = \frac{I_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}}\, r)}{I_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})} - \frac{J_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}}\, r)}{J_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})}; \quad \int_0^1 \tilde{w}_{ok}^{I}\, \tilde{w}_{on}^{I}\, r dr =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ 1, & k = n, \end{cases} \qquad (15)$$

причем $\tilde{\omega}_{on}^{I}$ есть решение уравнения:

$$\frac{I_1(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})}{I_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})} + \frac{J_1(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})}{J_o(\sqrt{\tilde{\omega}_{on}^{I}})} = 0; \qquad (16)$$

$$\frac{12}{\tilde{h}_o^2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{v}_{on}^{II} + (\tilde{\omega}_{on}^{II})^2 \tilde{v}_{on}^{II} = 0; \quad \tilde{w}_{on}^{II} \equiv 0; \qquad (17)$$

$$\tilde{v}_{on}^{II}(1) = \tilde{v}_{on}^{II}(0) = 0. \qquad (18)$$

Ортонормированные собственные функции-решения (17) – (18) имеют вид

$$\tilde{v}^{II}_{on} = \frac{\sqrt{2}}{J_2\left(\frac{\tilde{h}}{\sqrt{12}}\tilde{\omega}^{II}_{on}\right)} J_1\left(\frac{\tilde{h}_o}{\sqrt{12}}\tilde{\omega}^{II}_{on} r\right); \int_0^1 \tilde{v}^{II}_{on}\tilde{v}^{II}_{ok}\, rdr =$$

$$= \begin{cases} 0\ ;\ k \neq n; \\ 1\ ;\ k = n, \end{cases} \tag{19}$$

причем $\tilde{\omega}^{II}_{on}$ есть решение уравнения

$$J_1\left(\frac{h_o}{\sqrt{12}}\tilde{\omega}^{II}_{on}\right) = 0. \tag{20}$$

В первом приближении получим две системы возмущающих вектор-функций и собственных частот, учитывая результаты нулевого приближения:

изгибные колебания $\begin{pmatrix} \tilde{w}^{I}_{ok} + \lambda\tilde{w}^{I}_{1k} \\ \lambda\tilde{v}^{I}_{1k} \end{pmatrix}_{k=1}^{\infty}$; $(\tilde{\omega}^{I}_{ok} + \lambda\tilde{\omega}^{I}_{1k})_{k=1}^{\infty}$; (21)

радиальные колебания $\begin{pmatrix} \lambda\tilde{w}^{II}_{1k} \\ \tilde{v}^{II}_{ok} + \lambda\tilde{v}^{II}_{1k} \end{pmatrix}_{k=1}^{\infty}$; $(\tilde{\omega}^{II}_{ok} + \lambda\tilde{\omega}^{II}_{1k})_{k=1}^{\infty}$ (22)

Изучим сначала (21). Из (11) и (12) имеем:

$$-\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \tilde{w}^{I}_{1k} + (\tilde{\omega}^{I}_{ok})^2 \tilde{w}^{I}_{1k} + 2\tilde{\omega}^{I}_{ok}\tilde{\omega}^{I}_{1k} =$$
$$= 12\frac{d^3\tilde{w}^{I}_{ok}}{dr^3} + \frac{12+6\nu}{r}\frac{d^2\tilde{w}^{I}_{ok}}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\tilde{w}^{I}_{ok} + (4r-2)(\tilde{\omega}^{I}_{ok})^2\tilde{w}^{I}_{ok}. \tag{23}$$

$$\begin{cases} \tilde{w}^{I}_{1k}(1) = (\tilde{w}^{I}_{1k})'(1) = (\tilde{w}^{I}_{1k})'(0) = 0; \\ \left[-(\tilde{w}^{I}_{1k})''' - \frac{1}{r}(\tilde{w}^{I}_{1k})'' + \frac{1}{r^2}(\tilde{w}^{I}_{1k})'\right]_{r\to 0} = 3(1+\nu)\tilde{\omega}^{I}_{ok}\left(\frac{1}{I_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ok}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{J_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ok}}}\right). \end{cases} \tag{24}$$

Для устранения неоднородности граничных условий в (24) сделаем замену функций

$$\tilde{w}^{I}_{1к} = w^{I}_{1к} + \frac{r^2(r-1)^2}{6}(1+\nu)\,\tilde{\omega}^{I}_{ок}\left(\frac{1}{I_0(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} + \frac{1}{J_0(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}\right).$$

Тогда вместо (23), (24) получим:

$$-\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 w^{I}_{1к} + (\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2 w^{I}_{1к} + 2\tilde{\omega}^{I}_{ок}\,\tilde{\omega}^{I}_{1к} - \tilde{w}^{I}_{ок} =$$

$$= 12\frac{d^3\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr^3} + \frac{12+6\nu}{r}\frac{d^2\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\frac{d\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr} + (4r-2)(\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2\tilde{w}^{I}_{ок} +$$

$$+ [64 - \frac{18}{r}(\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2(r^4-2r^3+r^2)]\frac{1+\nu}{6}\left(\frac{1}{I_0(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} + \right. \tag{25}$$

$$\left. + \frac{1}{J_0(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}\right) = F(\tilde{w}^{I}_{ок}); \tag{26}$$

$$w^{I}_{1к}(1) = (w^{I}_{1к})'(1) = (w^{I}_{1к})'(0) = \left[-(w^{I}_{1к})''' - \frac{1}{r}(w^{I}_{1к})'' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}(w^{I}_{1к})'\right]_{r\to 0} = 0.$$

Умножим (25) на $\tilde{w}^{I}_{on}\,r$, (13) на $w^{I}_{1к}\,r$ и проинтегрируем по r от 0 до 1. Тогда, учитывая формулу Грина, получим

$$[(\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2 - (\tilde{\omega}^{I}_{on})^2]\cdot\int_0^1 w^{I}_{1к}\cdot\tilde{w}^{I}_{on}\,rdr + 2\tilde{\omega}^{I}_{ок}\,\tilde{\omega}^{I}_{1к}\int_0^1 \tilde{w}^{I}_{ок}\cdot\tilde{w}^{I}_{on}\,rdr =$$

$$= \int_0^1 F(\tilde{w}^{I}_{ок})\,\tilde{w}^{I}_{on}\,rdr.$$

При к = n из последнего равенства имеем

$$\tilde{\omega}^{I}_{1к} = \frac{1}{2\tilde{\omega}^{I}_{ок}}\int_0^1\left\{12\frac{d^3\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr^3} + \frac{12+6\nu}{r}\frac{d^2\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr^2} - \right.$$

$$- \frac{6}{r^2}\frac{d\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr} + (4r-2)(\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2\tilde{w}^{I}_{ок} + [64 - \frac{18}{r} - (\tilde{\omega}^{I}_{ок})^2 \times$$

$$\times(r^4-2r^3+r^2)]\left(\frac{1}{J_0\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}}} + \frac{1}{I_0(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}\right)\left.\frac{1+\nu}{6}\right\}\tilde{w}^{I}_{ок}\,rdr. \tag{27}$$

Упростим (27) с помощью известных формул вычисления интегралов от функций Бесселя [2] и интегрирования по частям. Учитывая (14), (15), (16), получим

$$\tilde{\omega}^{I}_{1к} = \frac{3(1-\nu)}{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} \int_0^1 \left(\frac{d\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr} \right)^2 dr - \frac{3}{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} \int_0^1 \frac{d\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr} \tilde{w}^{I}_{ок} \frac{dr}{r} +$$

$$+2\tilde{\omega}^{I}_{ок} \int_0^1 (\tilde{w}^{I}_{ок})^2 dr - \tilde{\omega}^{I}_{ок}. \qquad (28)$$

Рассмотрим теперь (22). Из (11) и (12) имеем:

$$\frac{12}{\tilde{h}_o^2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{v}^{II}_{1к} + (\tilde{\omega}^{II}_{ок})^2 \tilde{v}^{II}_{1к} + 2\tilde{\omega}^{II}_{ок} \tilde{\omega}^{II}_{1к} \tilde{v}^{II}_{ок} =$$

$$= -\frac{24}{\tilde{h}_o^2} \left(\frac{d\tilde{v}^{II}_{ок}}{dr} + \frac{\nu}{r} \tilde{v}^{II}_{ок} \right); \qquad (29)$$

$$\tilde{v}^{II}_{1к}(1) = \tilde{v}^{II}_{1к}(0) = 0. \qquad (30)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\tilde{\omega}^{II}_{1к} = \frac{(1-2\nu)\cdot 6}{\tilde{\omega}^{II}_{ок} \cdot \tilde{h}_o^2} \int_0^1 (\tilde{v}^{II}_{ок})^2 dr. \qquad (31)$$

Обратимся к вычислению $\tilde{\omega}^{I}_{1к}$ по формуле (28). Воспользовавшись известными формулами теории Бесселевых функций [2] и соотношениями (15), (16), имеем

$$-\frac{3}{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} \int_0^1 \frac{d\tilde{w}^{I}_{ок}}{dr} \tilde{w}^{I}_{ок} \frac{dr}{r} = 6 \cdot \frac{I_1^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}{I_o^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} -$$

$$-6 \cdot \int_0^1 \frac{J_1(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} r)\, I_1(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} r)}{J_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})\, I_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} dr. \qquad (32)$$

С помощью (15), (32) и разложений произведений $J_\mu(z)\, J_\nu(z)$ и $J_\mu(z)\, I_\mu(z)$ из [2], представим (28) в виде

$$\frac{\tilde{\omega}^{I}_{1к}}{\tilde{\omega}^{I}_{ок}} = -1 + \frac{6}{\omega^{I}_{ок}} \frac{I_1^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}{I_o^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} - \frac{1}{I_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})\, J_o(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})} \times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{\sqrt{\tilde{\omega}_{ок}}}{2}\right)^{4m}}{(m!)^2(2m)!(4m+3)}\cdot\left[4+\frac{3\nu}{2(m+1)(2m+1)}\right]+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{I_0^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}+\frac{(-1)^m}{J_0^2(\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}})}\right]\frac{(2m)!\left(\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^{I}_{ок}}}{2}\right)^{2m}}{(m!)^4(2m+3)}\times \tag{33}$$

$$\times\left[2+\frac{3(1-\nu)(2m+1)}{2(m+1)^2(m+2)}\right].$$

Совершенно аналогично имеем

$$\frac{\tilde{\omega}^{II}_{1к}}{\tilde{\omega}^{II}_{ок}}=\frac{1-2\nu}{4J_2^2\left(\frac{h_0}{\sqrt{12}}\tilde{\omega}^{II}_{ок}\right)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+2)!\left(\frac{\tilde{h}_0}{2\sqrt{12}}\tilde{\omega}^{II}_{ок}\right)^{2m}}{((m+1)!)^2(m+2)!m!(2m+3)} \tag{34}$$

Из [1] известно следующее значение первой собственной частоты задачи об изгибных колебаниях пластин постоянной толщины: $\tilde{\omega}^{I}_{01}=10{,}21582$. Из (33) с точностью до 10^{-3} имеем $\frac{\tilde{\omega}^{I}_{10}}{\tilde{\omega}^{I}_{00}}=0{,}625+\nu\cdot 2{,}141$.

Поэтому для первой собственной частоты возмущающей задачи получим следующие выражения:

$$\tilde{\omega}^{I}_{1}=\tilde{\omega}^{I}_{00}+\lambda\tilde{\omega}^{I}_{10}+O(\lambda^2)=10{,}21582\,[1+\lambda(0{,}625+\nu\cdot 2{,}141)+$$
$$+O(\lambda^2)]. \tag{35}$$

Эта формула показывает, что учет начальной погиби срединной поверхности приведет к увеличению или уменьшению частоты ее собственных колебаний в зависимости от того,возрастает ($\lambda>0$) или убывает ($\lambda<0$) с увеличением x толщина этой пластинки.

Литература

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. — Киев: Наукова думка, 1964, с. 29, 36. 2. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949, ч. 1, с. 146—163. 3. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и др. — М.: Наука, 1979. — 227 с. 4. Мартыненко М.Д., Ильинкова Н.И. Изгиб тонких круглых пластин линейно-переменной толщины. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.наук, 1980, № 3, с. 17—24.