Переходя к безразмерным координатам $\zeta = x/a$, $\eta = y/a$, где a — наибольший размер плиты, можем заключить, что формула (5) имеет порядок точности $o(h^3/a^3)$. Формула, аналогичная (5), может быть получена и методом асимптотического интегрирования [2]. При этом выражение для $w_{см}$ отличается от формулы (5) членами порядка $(h/a)^2$. При отсутствии горизонтальных смещений $\bar{u}, \bar{v}$ и касательных (сдвигающих) усилий q_i, p_i ($i = 1,2$) формула (5) совпадает с выражением для $w_{см}$, полученным в [3, 4].

В заключение отметим, что формула (5) может быть использована для решения граничных задач изгиба плит на упругом основании в условиях их сцепления с учетом сдвиговых эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Модификация уточненной теории пластин для контактных задач // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика. — 1977. — Т. 30. — С. 33—45. 2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. — М., 1983. — 487 с. 3. Мартыненко М.Д., Свирский Е.А. Изгиб балок и плит на упругом и нелинейном основании с учетом деформации плиты // Механика деформируемых тел и конструкций. — Ереван, 1985. — С. 274—285. 4. Свирский Е.А. О линейной задаче Проктора // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1983. — Вып. 10. — С. 61—65.

УДК 539.3

С.В. БОСАКОВ

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА УПРУГОЕ ЧЕТВЕРТЬПРОСТРАНСТВО

В [1] дано в общем виде решение первой краевой задачи для пространственного клина из несжимаемого материала и предложено итерационное решение задачи при произвольном коэффициенте Пуассона материала. В [5] и [6] использован принцип наложения для решения задачи о действии сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство. Интегральное уравнение для решения задачи о нагружении клина и доказательство возможности решения этого уравнения методом последовательных приближений для случая упругого четвертьпространства получены в [2]. Однако в указанных работах не приводятся выражения перемещений границы упругого четвертьпространства в случае действия сосредоточенных сил, необходимые для расчета фундаментов сооружений, расположенных вблизи горных склонов.

В настоящей работе на основании результатов [1] получены интегральные уравнения для случая загружения упругого четвертьпространства нормальной сосредоточенной силой. Эти уравнения решены в замкнутом виде.

Рассмотрим четвертьпространство с упругими постоянными G и ν, к грани которого приложены сосредоточенные силы (рис. 1). Для определения его напряженно-деформированного состояния используем решения уравнения Ламе в следующем виде [1]:

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)(\Phi_1\cos\theta + \Phi_2\sin\theta); \quad (1)$$

$$2Gv = -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} + 4(1-\nu)(\Phi_2\cos\theta - \Phi_1\sin\theta); \quad (2)$$

$$2Gw = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3; \quad (3)$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3. \quad (4)$$

Здесь $\Phi_k(r,\theta,z)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ – гармонические функции; r, θ, z – цилиндрические координаты.

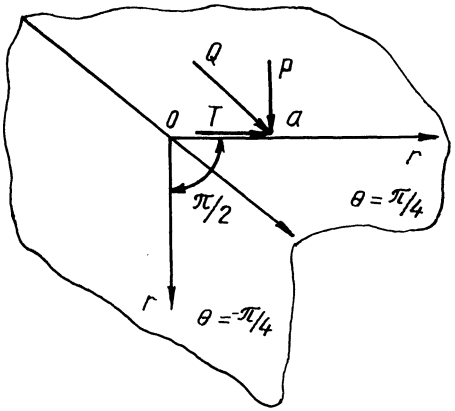

Рис. 1. Упругое четвертьпространство, загруженное сосредоточенными силами

Выражения для напряжений в цилиндрических координатах [4]:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\theta^2} + \sin\theta\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\theta^2}\right) -$$

$$-(1-2\nu)\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right) + \frac{2(1-\nu)}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} -\right.$$

$$\left.-\sin\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right) + 2\nu\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} + z\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2}\right); \quad (5)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right); \quad (6)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{2(1-\nu)}{r}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta}; \quad (7)$$

$$\Phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} + 2(1-\nu)(\Phi_2\cos\theta - \Phi_1\sin\theta), \quad (8)$$

Согласно [1], в дальнейшем примем $\Phi_{|\theta=\pm a}=0$. Тогда функции $\Phi_0(r,\theta,z)$ и $\Phi_3(r,\theta,z)$ определяется из граничных условий:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pm a}=\frac{r}{2(1-\nu)}\left[2(1-\nu)Gv-r\tau_r-z\tau_{\theta z}\right]\Big|_{\theta=\pm a}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pm a}=\frac{r}{2(1-\nu)}\tau_{\theta z}\Big|_{\theta=\pm a}. \tag{10}$$

Функции $\Phi_1(r,\theta,z)$ и $\Phi_2(r,\theta,z)$ найдем из системы уравнений

$$\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=\pm a}=\frac{r}{2(1-\nu)}\tau_{\theta r}\Big|_{\theta=\pm a}; \tag{11}$$

$$\left[2(1-\nu)\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}-\sin\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right)-\left(\sin\theta\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\theta^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos\theta\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\theta^2}\right)-r(1-2\nu)\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)\right]_{\theta=\pm a}=$$
$$=\left[r\sigma_\theta-r\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right)-r\left(2\nu\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}+z\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial r^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z\frac{\partial\Phi_3^2}{\partial z^2}\right)\right]_{\theta=\pm a}. \tag{12}$$

Для получения решения нагрузку представим в виде симметричной и антисимметричной составляющих по координате θ.

При симметричном воздействии сил $P/2$, выполняя условия (10), положим:

$$2(1-\nu)\quad\Phi_0=\int_0^\infty\int_0^\infty A_0(\sigma\ \tau)\,\mathrm{ch}(\theta\tau)\,K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau; \tag{13}$$

$$2(1-\nu)\quad\Phi_1=\int_0^\infty\int_0^\infty A_1(\sigma,\tau)\,\mathrm{ch}(\theta\tau)\,K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau; \tag{14}$$

$$2(1-\nu)\quad\Phi_2=\int_0^\infty\int_0^\infty A_2(\sigma\tau)\,\mathrm{sh}(\theta\tau)\,K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau; \tag{15}$$

$$\Phi_3=0. \tag{16}$$

Выражение (12) для нормальных перемещений на гранях четвертьпространства имеет вид

$$2Gv\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}=2(1-\nu)\left(\Phi_2\cos\theta-\Phi_1\sin\theta\right)\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}=$$

$$= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty [A_2(\sigma,\tau)\,\mathrm{sh}(\pi\tau/4) - A_1(\sigma,\tau)\,\mathrm{ch}(\pi\tau/4)] \times$$

$$\times K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau. \qquad (17)$$

Найдем преобразование Фурье и Конторовича–Лебедева от $r \cdot 2Gv \,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}}$

$$\overline{r \cdot 2Gv}\,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}} = \int_0^\infty \int_0^\infty r \cdot 2Gv\,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}} K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,\frac{dr}{r}\,dz =$$

$$= \pm \frac{\pi^3\sqrt{2}}{8\sigma} \int_0^\infty \frac{A_2(\sigma,\beta)\,\mathrm{sh}(\pi\beta/4) - A_1(\sigma,\beta)\,\mathrm{ch}(\pi\beta/4)}{\mathrm{ch}(\pi\tau) + \mathrm{ch}(\pi\beta)}\,d\beta. \qquad (18)$$

При вычислении (18) использованы значения интегралов [3]

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)\cos(\alpha t)\,dt\right]\cos(\alpha x)\,d\alpha; \qquad (19)$$

$$\int_0^\infty K_{i\beta}(\sigma r)\,K_{i\tau}(\sigma r)\,dr = \frac{\pi^2}{2\sigma}\,\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\tau) + \mathrm{ch}(\pi\beta)}. \qquad (20)$$

Далее из (9) и (13) с учетом $\tau_{\theta r}\,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}} = \tau_{\theta z}\,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}} = 0$ получаем

$$\Phi_0 = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\sqrt{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)}{\sigma\,\mathrm{sh}(\pi\tau/4)}\,\mathrm{ch}(\theta\tau) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{A_2(\sigma,\beta)\,\mathrm{sh}(\pi\beta/4) - A_1(\sigma,\beta)\,\mathrm{ch}(\pi\beta/4)}{\mathrm{ch}(\pi\tau) + \mathrm{ch}(\pi\beta)}\,d\beta \times$$

$$\times K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau. \qquad (21)$$

На гранях четвертьпространства при $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$

$$\Phi_0\,|_{\theta = \pm \frac{\pi}{4}} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\sqrt{2} \int_0^\infty [e^{-\sigma r\,\mathrm{ch}\,x} + \cos(\sigma r\,\mathrm{sh}\,x)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{\sigma\,\mathrm{ch}\,x}\,\frac{A_1(\sigma,\beta)}{\mathrm{ch}(\pi\beta/4)}\,d\beta\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau. \qquad (22)$$

При выводе (22) использованы соотношения (11) и интегралы [3]:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\tau x)\cos(\beta x)}{\operatorname{ch} x}\,dx = \pi\frac{\operatorname{ch}(\pi\tau/2)\operatorname{ch}(\pi\beta/2)}{\operatorname{ch}(\pi\tau)+\operatorname{ch}(\pi\beta)}\,; \tag{23}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\pi\tau/2)\cos(\tau x)K_{i\tau}(\sigma r)\,d\tau = \frac{\pi}{2}\cos(\sigma r\operatorname{sh} x)\,; \tag{24}$$

$$\int_0^\infty \cos(\tau x)\,K_{i\tau}(\sigma r)\,d\tau = \frac{\pi}{2}e^{-\sigma r\operatorname{ch} x} \tag{25}$$

Для вычисления преобразования Фурье и Конторовича—Лебедева от

$r\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right)\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}$ последовательно находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[e^{-\sigma z\operatorname{ch} x}+\cos(\sigma r\operatorname{sh} x)\right]\cos\sigma z =$$

$$=\sigma^2\cos(\sigma z)\left[\operatorname{sh}^2 x\,e^{-\sigma r\operatorname{ch} x}-\operatorname{ch}^2 x\cos(\sigma r\operatorname{sh} x)\right]; \tag{26}$$

$$\int_0^\infty K_{i\tau}(\sigma r)\left[\operatorname{ch}^2 x\cos(\sigma r\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}^2 x\,e^{-\sigma r\operatorname{ch} x}\right]dr =$$

$$=\frac{\pi}{2\sigma}\,\frac{\operatorname{ch} x\cos(\tau x)}{\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}-\frac{\pi}{\sigma}\,\frac{\operatorname{sh} x\sin(\tau x)}{\operatorname{sh}(\pi\tau)}\,. \tag{27}$$

Принимая во внимание соотношения (19), (26) и (27), получаем

$$\overline{r\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{dr^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right)}\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}} = \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)}\pi^2\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{A_1(\sigma,\tau)}{\operatorname{ch}(\pi\tau/4)\operatorname{ch}(\pi\pi/2)}\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{A_1(\sigma,\beta)\,d\beta}{\operatorname{ch}(\pi\beta/4)\operatorname{sh}(\pi\tau)}\operatorname{th} x\cos(\beta x)\sin(\tau x)\,dx\right], \tag{28}$$

Преобразование Фурье и Конторовича—Лебедева от

$r\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}$ с учетом (19) и

$$\left.\begin{aligned} &K_{i\tau}(\sigma r) = \int_0^\infty e^{-\sigma r\operatorname{ch} t}\cos(\tau t)\,dt\,,\\ &\int_0^\infty e^{-\sigma r\operatorname{ch} t}K_{i\tau}(\sigma r)\,dr = \frac{\pi}{\sigma}\,\frac{\sin(\tau t)}{\operatorname{sh} t\operatorname{sh}(\pi\tau)} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

имеет вид

$$\overline{r\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)}\Bigg|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}=$$

$$=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(1-\nu)\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{A_1(\sigma,\beta)}{\mathrm{ch}(\pi\beta/4)}\,\mathrm{cth}\,t\sin(\tau t)\cos(\beta t)\,dt\,d\beta. \qquad (30)$$

Подставим в (12) выражения (28), (30) и (14), (15). Поскольку на гранях клина при действии сосредоточенных сил, приложенных в точке a, $\overline{r\sigma_\theta}\,|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}}=P/4\,K_{i\tau}(\sigma a)$ [4], после некоторых преобразований получим окончательное уравнение для определения $A_1(\sigma,\tau)$:

$$A_1(\sigma,\tau)-(1-2\nu)\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)\,\mathrm{ch}(\pi\tau/4)}{\tau+\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}\int_0^\infty\frac{A_1(\sigma,\beta)\,d\beta}{\mathrm{ch}(\pi\beta/4)\,[\mathrm{ch}(\pi\tau/2)+\mathrm{ch}(\pi\beta/2)]}=$$

$$=-\frac{2P\sqrt{2}}{\pi^3}(1-\nu)\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)\,\mathrm{ch}(\pi\tau/4)}{\tau+\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}K_{i\tau}(\sigma a). \qquad (31)$$

Здесь использовано значение интеграла

$$\int_0^\infty(\mathrm{cth}\,t-\mathrm{th}\,t)\sin(\tau t)\cos(\beta t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}{\mathrm{ch}(\pi\beta/2)+\mathrm{ch}(\pi\tau/2)}.$$

Интегральное уравнение (31) можно решить методом итераций [1] путем разложения по малому параметру $\varepsilon=1-2\nu$. Однако при этом получаются сложные интегралы, которые не удается выразить через элементарные функции. Поэтому представим решение уравнения (31) в виде

$$A_1(\sigma,\tau)=\mathrm{ch}^2(\pi\tau/4)\int_0^\infty f(\sigma,x)\cos 2x\,dx \qquad (32)$$

(здесь не рассматривается вопрос о свойствах функции $f(\sigma,x)$ (32)).

Используя соотношения (23), (29) и (19), получим

$$\int_0^\infty\Big\{f(\sigma,x)\,\Big[\mathrm{ch}^2\frac{\pi\tau}{4}-(1-2\nu)\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}{\tau+\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}\,\mathrm{sech}(2x)\Big]+$$

$$+\frac{2P\sqrt{2}}{\pi^3}(1-\nu)\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)\,\mathrm{ch}(\pi\tau/4)}{\tau+\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}e^{-\sigma a\,\mathrm{ch}\,x}\Big\}\cos(\tau x)\,dx=0,$$

Отсюда

$$A_1(\sigma,\tau) = -\frac{2P\sqrt{2}}{\pi^3}(1-\nu)\frac{\operatorname{sh}(\pi\tau)\operatorname{ch}(\pi\tau/4)}{\tau+\operatorname{sh}(\pi\tau/2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma a \operatorname{ch} x}\cos(\tau x)\,dx}{1-2(1-2\nu)\operatorname{th}(\pi\tau/4)\operatorname{sech}(2x)/\Delta_1}; \quad \Delta_1 = \tau + \operatorname{sh}(\pi\tau/2). \tag{33}$$

По $A_1(\sigma,\tau)$ из (11) находим $A_2(\sigma,\tau)$, а затем из (21) – $\Phi_0(r,\theta,z)$.

Эти функции позволяют определить напряженно-деформированное состояние [(1)–(8)] упругого четвертьпространства в случае действия на него нормальных сосредоточенных сил, приложенных симметрично.

При антисимметричном действии внешних нормальных сил $P/2$ необходимо, выполняя условие (10), принять [1]

$$\left.\begin{aligned}
2(1-\nu)\ \Phi_0 &= \int_0^\infty\int_0^\infty A_0(\sigma,\tau)\operatorname{sh}(\theta\tau)K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau;\\
2(1-\nu)\ \Phi_1 &= \int_0^\infty\int_0^\infty A_1(\sigma,\tau)\operatorname{sh}(\theta\tau)K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau;\\
2(1-\nu)\ \Phi_2 &= \int_0^\infty\int_0^\infty A_2(\sigma,\tau)\operatorname{ch}(\theta\tau)K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma d\tau;
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\Phi_3 = 0.$$

Повторяя для этого случая предыдущие вычисления в соответствии с (17)–(30), получаем:

$$\Phi_0\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}} = \mp\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\sqrt{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty[\cos(\sigma r\operatorname{sh}x) - e^{-\sigma r\operatorname{ch}x}]\times$$

$$\times\frac{A_1(\sigma,\beta)\cos(\beta x)}{\sigma\operatorname{sh}(\pi\beta/4)}\cos(\sigma z)\,d\sigma d\beta\frac{dx}{\operatorname{ch}x};$$

$$r\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1-2\nu}{8(1-\nu)}\pi^2\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{4}\frac{A_1(\sigma,\tau)}{\operatorname{sh}(\pi\tau/4)\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{A_1(\sigma,\beta)\cos(\beta x)\,d\beta}{\operatorname{sh}(\pi\beta/4)\operatorname{sh}(\pi\tau)}\operatorname{th}x\sin(\tau x)\,dx\right];$$

$$r\left(\cos\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)\Bigg|_{\theta=\pm\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \pm \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{A_1(\sigma,\beta)\cos(\beta x)\,d\beta}{\operatorname{sh}(\pi\beta/4)\operatorname{sh}(\pi\tau)} \operatorname{cth} t \sin(\tau t)\,dt\,;$$

$$A_1(\sigma,\tau) - (1-2\nu)\frac{\operatorname{sh}(\pi\tau/2)\operatorname{sh}(\pi\tau/4)}{\tau - \operatorname{sh}(\pi\tau/2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{A_1(\sigma,\beta)\,d\beta}{\operatorname{sh}(\pi\beta/4)\,[\operatorname{ch}(\pi\beta/2)+\operatorname{ch}(\pi\tau/2)]} = \frac{2P\sqrt{2}}{\pi^3}(1-\nu) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau)\operatorname{sh}(\pi\tau/2)}{\tau - \operatorname{sh}(\pi\tau/2)} K_{i\tau}(\sigma a)\,. \tag{35}$$

Представляя решение (35) в виде

$$A_1(\sigma,\tau) = \operatorname{sh}(\pi\tau/4)\operatorname{ch}(\pi\tau/4)\int_0^\infty f(\sigma,x)\cos(\tau x)\,dx\,,$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} &A_1(\sigma,\tau) = -\frac{2P\sqrt{2}}{\pi^3}(1-\nu)\frac{\operatorname{sh}(\pi\tau)\operatorname{sh}(\pi\tau/4)}{\Delta_2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma a \operatorname{ch} x}\cos(\tau x)\,dx}{1+2(1-2\nu)\operatorname{th}(\pi\tau/4)\operatorname{sech}(2x)/\Delta_2}\,; \\ &\Delta_2 = \operatorname{sh}(\pi\tau/2) - \tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

В качестве примера найдем выражение для нормальных перемещений грани клина, к которой приложена сосредоточенная сила P. На основании (17) путем суммирования перемещений в случаях действия симметричных и антисимметричных сил $P/2$ (см. выражения (13) – (16), (33), (36)) получим:

$$\left.\begin{aligned} &2Gv = \frac{2P(1-\nu)}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2(\pi\tau)}{\Delta}\int_0^\infty e^{-\sigma a \operatorname{ch} x}\cos(\tau x)\frac{dx}{\lambda(\tau,x,\nu)} \times \\ &\times K_{i\tau}(\sigma r)\cos(\sigma z)\,d\sigma\,d\tau\,; \\ &\lambda(\tau,x,\nu) = 1 + 4(1-2\nu)\frac{\tau\operatorname{th}(\pi\tau/4)}{\Delta\operatorname{ch}(2x)} - 4(1-2\nu)^2\frac{\operatorname{th}^2(\pi\tau/4)}{\Delta\operatorname{ch}^2(2x)}\,; \\ &\Delta = \operatorname{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Заметим, что

$$4(1-2\nu)\frac{\tau\operatorname{th}(\pi\tau/4)}{\Delta\operatorname{ch}(2x)} - 4(1-2\nu)^2\frac{\operatorname{th}^2(\pi\tau/4)}{\Delta\operatorname{ch}^2(2x)} < 1$$

при всех $\nu \in [0–0{,}3]$ и всех $\tau, x \in [0, \infty]$. Поэтому (37) разлагается в ряд

$$1/\lambda(\tau, x, \nu) = 1 - 4(1-2\nu)\frac{\tau \operatorname{th}(\pi\tau/4)}{\Delta \operatorname{ch}(2x)} + 4(1-2\nu)^2 \times$$

$$\times \frac{\operatorname{th}^2(\pi\tau/4)}{\Delta \operatorname{ch}^2(2x)}\left(1 + \frac{4\tau^2}{\Delta}\right) + \ldots \qquad (38)$$

Численно асимптотическими методами определялись перемещения грани клина в случае удержания только первого члена (38) и первых трех членов (38), содержащих множители $(1-2\nu)$ и $(1-2\nu)^2$. Оказалось, что наибольшее различие в перемещениях для этих двух случаев наблюдается вблизи ребра клина при малых z. Однако максимальное различие в перемещениях не превышает 9 %. Поэтому для практических расчетов достаточно ограничиться одним членом разложения (38).

Далее, используя значения [3, 4] интегралов

$$\int_0^\infty K_{i\tau}(\sigma r) K_{i\tau}(\sigma a) \cos(\sigma z)\, d\sigma = \frac{\pi^2}{4\sqrt{ar}\operatorname{ch}(\pi\tau)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\mu);$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\beta\tau)}{\operatorname{ch}(\pi\tau)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\mu)\, d\tau = [2(\operatorname{ch}\mu + \cos\beta)]^{-1/2};$$

$$\operatorname{ch}\mu = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar},$$

получим выражение для искомых перемещений

$$v = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E}\left\{\frac{1}{\sqrt{(a-r)^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{ar}}\int_0^\infty \left[1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\tau)}\right] \frac{\tau^2}{\Delta} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\mu)\, d\tau\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. — М., 1972. — С. 549—553. 2. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. — Киев, 1979. — 269 с. 3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. — М., 1963. — 1100 с. 4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л., 1967. — 404 с. 5. Hetenyi M. A general solution for the elastic guarter space // J. Appl. Mech. Ser. E. — 1970. — P. 75—80. 6. Keer L.M., Lee I.C., Mura T. Hetenyi's elastic guarter space problem revisited // Int. J Solids and struct. — 1983. — Vol. 19, N 6. — P. 497—506.