ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ. Вып. 3
МИНСК 1973

М. В. Кравцов, В. В. Суворов

СВОБОДНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПАДЕНИЕ ШАРА В ЖИДКОСТИ

Для случая свободного падения тела в вязкой среде в поле земного тяготения можно записать:

$$m \frac{dv}{dt} = G - F, \tag{1}$$

где m, v, G, F — соответственно масса, скорость движения, вес в жидкости и сила сопротивления тела; t — время падения.

Уравнение (1) имеет два решения [1]. Первое решение получается при предположении, что сила сопротивления может быть определена по формуле Стокса ($F = 3\pi\mu d v$), второе — по формуле Ньютона $\left(F = 0{,}5 \times \times \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho v^2}{2}\right)$.

Тот факт, что при движении тела в жидкости существуют одновременно и сопротивление вязкого трения, пропорциональное скорости, и сопротивление гидродинамического давления, пропорциональное квадрату скорости, был подмечен еще И. Ньютоном. В настоящее время это легко показать на основе элементарных измерений гидравлических сопротивлений при движении тела в жидкости.

При движении тел с любой малой или большой скоростью действуют одновременно и сила трения, и сила гидродинамического давления жидкости на движущееся тело [2, 3]. Однако при различных режимах движения соотношения этих сопротивлений могут быть разными. Так, при движении тел в жидкостях с весьма малой скоростью можно говорить о том, что сила гидродинамического давления несоизмеримо мала по сравнению с силой вязкого трения. При движении же тел в жидкости с весьма большой скоростью уже сила вязкого трения становится несоизмеримо малой по сравнению с силой гидродинамического давления, хотя она и достигает больших величин.

При правильном применении формул Стокса и Ньютона требуется указывать не только на пределы применения их, но и на то приближение, с которым производится расчет. Так, если в основу расчетов положить 1-, 5-, 10- или 15%-ную точность расчета, то и пределы применения формул Стокса и Ньютона будут соответственно разными. Какую долю от общего занимает сопротивление, устанавливаемое по формулам Стокса или Ньютона при тех или иных условиях, а также пределы применения этих формул можно указать лишь при наличии общего выражения, определяющего силу сопротивления движению тела в жидкости, или на основе опытных данных.

До настоящего времени пределы применения формул Стокса и Ньютона находятся на основе опытных данных, либо через критерий режима движения числа Рейнольдса $\left(\mathrm{Re} = \frac{vd\rho}{\mu}\right)$, либо через размер тела. В первом случае нельзя установить, какой из указанных формул можно пользоваться при тех или иных условиях, вследствие того, что пределы применения формул выражены через неизвестную и искомую величину скорости движения. При использовании же размеров тела для установления пределов применения пользоваться формулами затруднительно, так как эти пределы следует определять экспериментально: размер тела не обусловливает характер режима движения. При одном и том же размере тело может двигаться с весьма малой скоростью (когда разность плотностей тела и среды мала) и большой (когда разность плотностей тела и среды велика). В первом случае будет преобладать сила вязкого трения, во втором — сила гидродинамического давления. Кроме этого, в результате экспериментальных исследований установлено существование переходной области, где сопротивление не может быть определено ни по формуле Стокса, ни по формуле Ньютона.

Для случая свободного падения шара в жидкости при числах Re до 10^4 известно общее выражение, позволяющее найти силу сопротивления [2]:

$$F = 2{,}85\,\pi\mu\, dv + K\pi d\,\frac{\rho v^2}{2} + {}^1/_3\,\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{\rho v^2}{2}\,, \qquad (2)$$

где ρ, μ — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости среды;

$$K = \frac{3{,}68}{\sqrt[3]{\dfrac{\Delta\rho g}{\mu^2}}}.$$

Введем обозначения $G = a$, $b = 2{,}85\,\pi\mu d$, $c = \pi d\,{}^\rho/_2(K + {}^d/_{12})$ и запишем решение дифференциального уравнения (1):

$$t = m\int\limits_0^v \frac{dv}{a - bv - cv^2}\,,$$

$$t = \frac{m}{2\sqrt{ac + \dfrac{b^2}{4}}}\ln\left(\frac{\sqrt{a + \dfrac{b^2}{4c}} + \sqrt{c}\,v + \dfrac{b}{2\sqrt{c}}}{\sqrt{a + \dfrac{b^2}{4c}} - \sqrt{c}\,v - \dfrac{b}{2\sqrt{c}}}\right) + \frac{m}{\sqrt{c}}\,C_1.$$

Принимая

$$\frac{m}{2\sqrt{ac + \dfrac{b^2}{4}}} = A,$$

$$\sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} + \frac{b}{2\sqrt{c}} = k_1, \quad \sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} - \frac{b}{2\sqrt{c}} = k_2,$$

окончательный результат запишем в виде

$$t = A \ln \frac{k_1 + \sqrt{c}\, v}{k_2 - \sqrt{c}\, v} + \frac{m}{\sqrt{c}} C_1. \tag{4}$$

Граничные условия будут выполнены, если $v=0$, когда $t=0$. Следовательно, постоянная интегрирования

$$C_1 = -\frac{A}{m}\sqrt{c}\ln\frac{k_1}{k_2}.$$

Тогда

$$t = A \ln \frac{(k_1k_2 + k_2\sqrt{c}\, v)}{(k_1k_2 - k_1\sqrt{c}\, v)}. \tag{5}$$

При $v=0{,}99\, v_к$ $(k_1k_2=a,\ k_2/\sqrt{c}=v_к)$ можно считать движение равномерным. Тогда время ускоренного движения шара

$$t_0 = A\left[+4{,}605 + \ln\left(1 + 0{,}99\frac{k_2}{k_1}\right)\right]. \tag{6}$$

Соотношение между пройденным растоянием s и временем падения t может быть получено интегрированием уравнения (5) после замены v на $\frac{ds}{dt}$:

$$t = A \ln \frac{k_1k_2 + k_2\sqrt{c}\,\frac{ds}{dt}}{k_1k_2 - k_1\sqrt{c}\,\frac{ds}{dt}}.$$

После приведения членов с ds и dt найдем

$$ds = \frac{k_1}{\sqrt{c}}\,\frac{\exp t/A - 1}{\frac{k_1}{k_2}\exp t/A + 1}\,dt.$$

Принимая $t/A=\omega$; $dt=Ad\omega$, получаем

$$ds = A\frac{k_1}{\sqrt{c}}\,\frac{\exp\omega - 1}{\frac{k_1}{k_2}\exp\omega + 1}\,d\omega.$$

При замене переменной величины $\exp\omega$ на z, т. е. $dz=\exp\omega d\omega$, $d\omega = \frac{dz}{z}$, находим

$$ds = A\frac{k_1}{\sqrt{c}}\,\frac{z-1}{\frac{k_1}{k_2}z + 1}\,\frac{dz}{z}. \tag{7}$$

Интегрируя (7), получим

$$s=\frac{Ak_1}{\sqrt{c}}\left(\int_0^z \frac{dz}{\frac{k_1}{k_2}z-1}-\int_0^z \frac{dz}{\left(\frac{k_1}{k_2}z+1\right)z}\right)=$$

$$=\frac{Ak_1}{\sqrt{c}}\left[\frac{k_2}{k_1}\ln\left(\frac{k_1}{k_2}z+1\right)+\ln\frac{\left(\frac{k_1}{k_2}z+1\right)}{z}+C_2\right].$$

Граничные условия будут выполнены, если $s=0$, когда $t=0$ $(z=1)$. Тогда

$$C_2=-\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)\ln\left(\frac{k_1}{k_2}+1\right).$$

После всех преобразований и подстановок окончательно получим

$$s=\frac{Ak_1}{\sqrt{c}}\left[\frac{k_2}{k_1}\ln\frac{k_1\exp t/A+k_2}{k_1+k_2}+\ln\frac{k_1\exp t/A+k_2}{\exp t/A\,(k_1+k_2)}\right]. \tag{8}$$

Следует отметить, что из общих уравнений (5) и (8) получаются как частные случаи решения с использованием формул Стокса ($c=0$, $b=3\pi\mu d$) и Ньютона $\left(b=0,\ c=\dfrac{\pi d^2\rho}{16}\right)$.

Для проверки соотношения (1) нами проведены опыты по исследованию ускоренного участка движения металлических ($\rho_1=7{,}8$) шаров диаметром 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,674 *см* в воде при температуре 288°К ($\mu=0{,}01056$ *пуаз*, $\rho=0{,}9986$ *г/см*^{3}). Опыты проводились в сосуде с поперечным сечением 20×20 *см* и высотой 160 *см*. Пуск шаров осуществлялся с помощью электромагнита.

Пройденный шаром путь к заданному моменту времени фиксировался с помощью киносъемки со скоростью 64 кадра в 1 *сек*. Внутрь сосуда помещалась масштабная линейка, по которой производился отсчет пути, пройденного шаром. Время прохождения шаром заданного участка пути определялось по числу кадров.

Сопоставление расчетных и опытных данных для различных диаметров шаров и для заданных условий приведено в табл. 1.

Таблица 1

d, *см*	t_0, *сек* (6)	t_0, *сек* (опыт)	S_0, *см* (8)	S_0, *см* (опыт)
0,200	0,178	0,174	7,6	6,1
0,300	0,235	0,249	13,1	13,8
0,400	0,283	0,292	19,1	18,8
0,500	0,326	0,312	25,5	25,6
0,674	0,384	0,396	34,1	35,1

Литература

1. *А. М. Годен.* Основы обогащения полезных ископаемых. М., 1946. 2. *М. В. Кравцов.* Сопротивление свободному установившемуся движению сферы в вязкой среде. ИФЖ, 1968, № 3. 3. *М. В. Кравцов, В. В. Суворов.* К вопросу седиментации частиц сферической формы. Сб. «Водное хозяйство Белоруссии». Вып. 2. Минск, 1971.