

В. С. Усенко

РАСТЕКАНИЕ БУГРОВ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНФИЛЬТРАЦИИ ИЗ БАСЕЙНОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В настоящее время все шире начинается внедрение методов искусственного регулирования запасов подземных вод. Однако методы фильтрационного расчета системы искусственного пополнения разработаны еще недостаточно. Разработка способов такого расчета представляет теоретический и практический интерес.

В соответствии с типовой схемой работы инфильтрационного бассейна исследуем два вида переменной во времени интенсивности инфильтрации (бассейн фильтрует только дном [1]):

$$1) \quad q = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}; \quad 2) \quad q = q_1 e^{-\varepsilon t},$$

где

$$\alpha = \frac{2\rho}{\gamma k_0 H_0}; \quad \varepsilon = \frac{k_0}{h_n^k}; \quad q_1 = \frac{H_1}{h_n^k} k_0. \quad (1)$$

Здесь $H_1 = H_0 q^{t_2}$; ρ — мутность сырой воды; k_0 — коэффициент фильтрации коагулирующих отложений; H_0 — действующий напор в бассейне; h_n^k — толщина коагулирующей пленки; γ — объемный вес коагулирующей пленки (рис. 1).

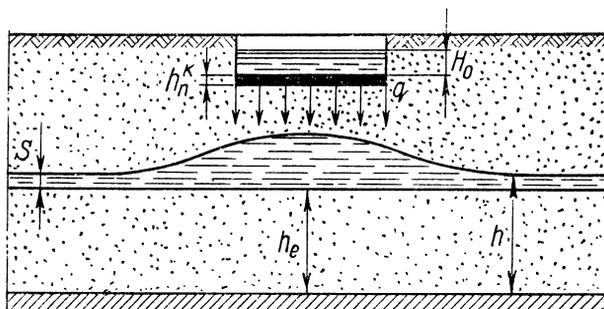


Рис. 1. Схема бугра грунтовых вод в разрезе.

Будем считать, что растекание грунтовых вод описывается двумерным линейризованным уравнением Буссинеска

$$a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{k_m}{\delta}; \quad u = \frac{h - h_e}{h_e} \quad \text{или} \quad u = \frac{h^2 - h_e^2}{h_e^2}.$$

Здесь k — коэффициент фильтрации грунта; m — средняя глубина потока грунтовых вод; δ — коэффициент недостатка насыщения (водотдачи); h_e — бытовая глубина грунтового потока; h — текущая глубина грунтового потока; $h - h_e = s$ — подъем уровней грунтовых вод в некоторой точке пласта (x, y) в момент времени t .

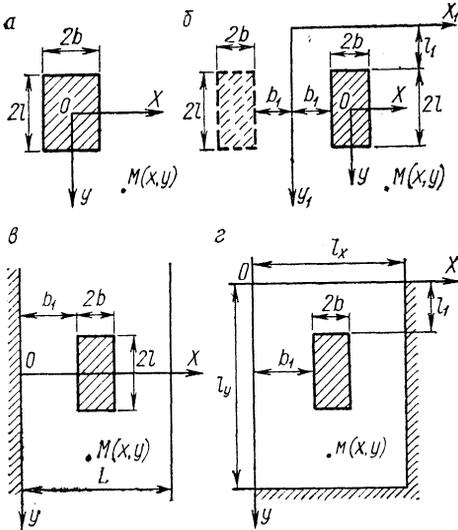


Рис. 2. Расчетные схемы пластов в плане:

a — неограниченного; b — пласта-квадранта; c — пласта-полосы; d — квадратного.

Рассмотрим сначала растекание бугров грунтовых вод при первом виде инфильтрационного питания.

Используя известный в математической физике метод источников и стоков для неограниченного в плане пласта (рис. 2, a), можно записать [2—4]

$$s = \frac{1}{\delta \sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{4\pi a \tau \sqrt{\tau}} \int_{-b}^b \int_{-l}^l e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2}{4a\tau}} d\xi d\zeta, \quad (3)$$

где $2h$ — ширина бассейна; $2l$ — длина бассейна ($l > b$); ξ, ζ, τ — переменные интегрирования.

Интегрирование по ξ и ζ дает [3]

$$s = \frac{1}{4\delta \sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+b}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-b}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}. \quad (4)$$

Далее найдем интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad (5)$$

где $\lambda_1 = \frac{x+b}{2\sqrt{a}}$; $\lambda_2 = \frac{y+l}{2\sqrt{a}}$.

Учитывая, что интегрирование ведется в таком промежутке времени $(t_2 - t_1)$, что $\left| \frac{y \pm l}{2 \sqrt{at_1}} \right| \leq 0,7$, ибо $t_1 = \beta/\alpha = \frac{\gamma (h_0^k)^2}{2\rho k_0 H_0}$ почти всегда достаточно велико [1] (h_0^k — толщина кольтатирующей пленки в момент времени t_1), интеграл (5) можно вычислить приближенно.

Принимая [5]

$$\operatorname{erf}(u) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(u - \frac{u^3}{3} \right),$$

можно (5) приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} - \frac{\lambda_1^3}{3\tau \sqrt{\tau}} \right) \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} - \frac{\lambda_2^3}{3\tau \sqrt{\tau}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \\ &= \frac{4}{\pi} \lambda_1 \lambda_2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{3\tau^2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{9\tau^3} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (6) и подставляя пределы, получим

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_1, \lambda_2, t) &= \frac{8}{\pi} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{\sqrt{t_2}} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{9} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{t_2 \sqrt{t_2}} - \frac{1}{t_1 \sqrt{t_1}} \right) + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{45} \left(\frac{1}{t_1^2 \sqrt{t_1}} - \frac{1}{t_2^2 \sqrt{t_2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично можно найти интегралы

$$I_2(\lambda_1, \lambda_4, t), \quad I_3(\lambda_2, \lambda_3, t), \quad I_4(\lambda_3, \lambda_4, t),$$

$$\text{где } \lambda_3 = \frac{x-b}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_4 = \frac{y-l}{2\sqrt{a}}. \quad (8)$$

Тогда повышение зеркала грунтовых вод под влиянием работы прямоугольного в плане бассейна в неограниченном пласте можно рассчитать по формуле

$$s = \frac{2}{\pi \delta \sqrt{\alpha}} \sum_{i=1}^4 \bar{I}_i, \quad \bar{I}_i = \frac{\pi}{8} J_i. \quad (9)$$

В случае квадратного бассейна $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ и $|\lambda_3| = |\lambda_4|$.

Если прямоугольный бассейн расположен относительно начала координат так, что (рис. 2, б)

$$\xi_1 = \xi + b_1 + b \quad \text{и} \quad \zeta_1 = \zeta + l_1 + l, \quad (10)$$

а

$$\left| \frac{x \pm b}{2\sqrt{at_1}} \right|, \quad \left| \frac{y_1 \pm l}{2\sqrt{at_1}} \right| \leq 0,7,$$

то расчеты растекания бугров грунтовых вод можно вести по формуле (9), сделав в выражении для I_i замену переменных (10).

На достаточно большом удалении расчетной точки от границы бассейна для прогноза динамики уровней грунтовых вод целесообразно пользоваться расчетной схемой для круглого бассейна, сделав приведение прямоугольного в плане бассейна к равновеликому по дебиту и площади круглому бассейну (1).

Результирующее положение поверхности грунтовых вод от действия нескольких бассейнов можно получить, используя принцип суперпозиций

$$s = \sum_{j=1}^n s_j, \quad (11)$$

где s_j — подъем поверхности грунтовых вод под влиянием j -го бассейна; n — число бассейнов.

Для полуограниченного пласта результирующее положение грунтового потока рассчитывается по формуле

$$s = \sum_{j=1}^n (s_j + ps_j^*), \quad (12)$$

где $p=1$ для непроницаемой границы пласта; $p=-1$ для проницаемой границы; s_j^* — изменение поверхности грунтовых вод под влиянием бассейна, отраженного относительно границы (параллельной одной из сторон бассейна) пласта.

При расчете s_j^* необходимо в λ_j подставить вместо b и l величины b^* и l^* для отраженных источников.

Решение для пласта-полосы (рис. 2, в) можно получить из (3), воспользовавшись принципом отражения и наложения источников по формуле

$$s = \frac{1}{\delta V \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{4\pi a \tau V \tau} \int_{b_1}^{b_2} \int_{-l}^l \left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2+(y-\zeta)^2}{4a\tau}} + p_x e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2+(y-\zeta)^2}{4a\tau}} \right] d\xi d\zeta, \quad (13)$$

где $p_x=1$ для обеих непроницаемых границ; $p_x=-1$ для обеих проницаемых границ; $b_2=b_1+2b$. Интегрируя (13) по ζ_1 , получим

$$s = \frac{1}{4\delta V \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{V \pi a \tau} \int_{b_1}^{b_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\ \times \left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a\tau}} + p_x e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a\tau}} \right] d\xi. \quad (14)$$

Далее, применяя формулу Пуассона [6], перепишем (14) в виде

$$s = \frac{1}{4\delta\sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{l_x \sqrt{\tau}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \int_{b_1}^{b_2} \left[(1+p_x) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{l_x}} \cos \frac{n\pi(x-\xi)}{l_x} + p_x 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{l_x}} \cos \frac{n\pi(x+\xi)}{l_x} \right] d\xi, \quad (15)$$

где l_x — ширина полосы.

Вводя относительные координаты и интегрируя по ξ , получим

$$s = \frac{l_x}{4\delta\sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_2}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_1}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \right] \left\{ (1+p_x)\bar{b} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}} [p_x (\sin n\pi \bar{x}_1 - \sin n\pi \bar{x}_2) - \right. \\ \left. (\sin n\pi \bar{x}_3 - \sin n\pi \bar{x}_4)] \right\} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}},$$

$$\text{где } \bar{b} = \frac{2b}{l_x}; \quad \bar{x}_1 = \frac{x-b_2}{l_x}; \quad \bar{x}_2 = \frac{x-b_1}{l_x}; \quad \bar{x}_3 = \frac{x+b_2}{l_x}; \quad \bar{x}_4 = \\ = \frac{x+b_1}{l_x}; \quad \bar{x}_2 = \frac{y+l}{l_x}; \quad \bar{y}_1 = \frac{y-l}{l_x}.$$

Введем следующую функцию

$$\sigma(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{t}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}} \sin n\pi \bar{x} \right] \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (17)$$

которую можно протабулировать.

Тогда (16) можно переписать в виде

$$s = \frac{l_x}{4\delta\sqrt{\alpha}} \left\{ \frac{(1+p_x)\bar{b}}{\sqrt{\pi}} \left[\ln \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + \left(\frac{1}{\bar{t}_2} - \frac{1}{\bar{t}_1} \right) \frac{\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2}{12} \right] + \right. \\ \left. + p_x \left[\sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{t}) + \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{t}) \right] \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} - \right. \\ \left. - \left[\sigma(\bar{x}_3, \bar{y}_2, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_4, \bar{y}_2, \bar{t}) + \sigma(\bar{x}_4, \bar{y}_1, \bar{t}) \right] \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right\}. \quad (18)$$

Если на границах полосы заданы разнородные предельные условия, то функция $\sigma(x, y, t)$ принимается следующий вид [3]:

$$\sigma^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{t}} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(n-0,5)^2 \bar{\tau}}}{(n-0,5)} \sin \pi(n-0,5)\bar{x} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}.$$

Результирующее положение поверхности грунтовых вод при работе нескольких бассейнов можно рассчитать по формуле (11), где s_j определяются по (18) с учетом расположения бассейнов относительно общего начала координат.

Если бассейны действуют в пласте-полуполосе, то расчеты ведутся по формуле (12) с учетом предыдущих замечаний, где $p = p_y = \pm 1$ отражает влияние поперечной границы пласта-полуполосы.

Решения для пласта-квадранта (рис. 2, б) легко получить, если отобразить реальный бассейн относительно границ пласта (совпадающих с осями координат) и относительно вершины пласта и произвести наложение потоков, создаваемых каждым из четырех бассейнов по формуле

$$s = \frac{2}{\pi \delta \sqrt{a}} \left\{ \sum_{i=1}^4 I_i + p_x \sum_{i=1}^4 I_i^* + p_y \left[\sum_{i=1}^4 I_i^{**} + \sum_{i=1}^4 I_i^{***} \right] \right\}, \quad (20)$$

где I_i^* , I_i^{**} , I_i^{***} вычисляются по (7) для соответствующих значений $\lambda = \frac{x \pm \varepsilon}{2 \sqrt{a}}$ (ε — переменная интегрирования, которая для мнимых (отраженных) бассейнов отсчитывается от общей для всех четырех бассейнов системы координат); p_x и p_y — коэффициенты, учитывающие характер предельных условий на границах пласта-квадранта, $p_x = \pm 1$; $p_y = \pm 1$.

Решение поставленной задачи для пласта-прямоугольника (рис. 2, г), можно получить, воспользовавшись решением задачи о растекании бугра грунтовых вод единичной высоты в пласте-прямоугольнике [2]. Для этого необходимо вычислить следующий интеграл:

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{l_x}{4\delta \sqrt{\alpha a}} \int_{t_1}^{t_2} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (21)$$

где $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ — функция, описывающая растекание бугра грунтовых вод единичной высоты для пласта-прямоугольника, значение которой приведено в работе [2] для различных предельных условий на границах пласта-прямоугольника.

Если все четыре границы пласта-прямоугольника непроницаемы, то

$$\begin{aligned} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = & t [s(\bar{x}_2, \bar{t}) - s(\bar{x}_1, \bar{t}) + s(\bar{x}_3, \bar{t}) - s(\bar{x}_4, \bar{t})] \times \\ & \times [s(\bar{y}_2, \bar{t}) - s(\bar{y}_1, \bar{t}) + s(\bar{y}_3, \bar{t}) - s(\bar{y}_4, \bar{t})], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{y - l_2}{l_x}, \quad \bar{y}_2 = \frac{y + l_1}{l_x}, \quad \bar{y}_3 = \frac{y + l_2}{l_x}; \quad \bar{y}_4 = \frac{y - l_1}{l_x}.$$

При всех четырех проницаемых границах функция $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = & [s(\bar{x}_2, \bar{t}) - s(\bar{x}_1, \bar{t}) - s(\bar{x}_3, \bar{t}) + s(\bar{x}_4, \bar{t})] \times \\ & \times [s(\bar{y}_2, \bar{t}) - s(\bar{y}_1, \bar{t}) + s(\bar{y}_3, \bar{t}) - s(\bar{y}_4, \bar{t})], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$s(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}} \sin n \pi \bar{x}. \quad (24)$$

Чтобы записать выражение для $s(\bar{y}, \bar{t})$, необходимо в (24) \bar{x} заменить на \bar{y} , а n на λm , $\lambda = \frac{l_x}{l_y}$.

Если одна из границ области, например $x = l_x$, непроницаема, то функция, описывающая растекание бугра, имеет вид (22), где в первой квадратной скобке функции $s(\bar{x}, \bar{t})$ заменены на функции

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 0,5} e^{-\pi^2 (n-0,5)^2 \bar{t}} \sin \pi (n - 0,5) \bar{x}. \quad (25)$$

В случае непроницаемости двух непараллельных границ в (22) необходимо заменить все формулы $s(\bar{x}, \bar{t})$ и $s(\bar{y}, \bar{t})$ на $T(\bar{x}, \bar{t})$ и $T(\bar{y}, \bar{t})$.

Аналогичным образом записываются решения для любых комбинаций предельных условий на границах пласта-прямоугольника.

Таким образом, чтобы получить решение поставленной задачи, необходимо вычислить три типа следующих интегралов:

$$\begin{aligned} N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin n \pi \bar{x}_i \right] \times \\ &\times \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\lambda^2 m^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin m \pi \bar{y}_j \right] \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}} = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \sin m \pi \bar{y}_j \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} e^{-\pi^2 (n^2 + \lambda^2 m^2) \bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}. \end{aligned}$$

Интегрирование дает следующую первообразную функцию:

$$\begin{aligned} N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi \bar{y}_j}{m \sqrt{n^2 + \lambda^2 m^2}} \times \\ &\times \operatorname{erf} \left[\sqrt{(n^2 + \lambda^2 m^2) \bar{t} \pi} \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Аналогично можно записать

$$\begin{aligned} N^*(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j}{(m - 0,5) \sqrt{n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2}} \times \\ &\times \operatorname{erf} \left\{ \pi \sqrt{[n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] \bar{t}} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

и

$$N^{**}(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n-0,5)\pi \bar{x}_i}{n-0,5} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m-0,5)\pi \bar{y}_j}{(m-0,5)\sqrt{(n-0,5)^2 + \lambda^2(m-0,5)^2}} \operatorname{erf}\left\{\pi \sqrt{[(n-0,5)^2 + \lambda^2(m-0,5)^2] \bar{t}}\right\}. \quad (28)$$

Причем в выражении (27) в зависимости от сочетания предельных условий на границах пласта-полосы \bar{x}_i и \bar{y}_j совместно с n и m могут меняться местами.

Для практического использования решений необходимо выражения для функций N , N^* , N^{**} протабулировать, и тогда расчеты можно вести по формуле

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{l_x}{4\delta \sqrt{\alpha a}} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) \left| \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right|, \quad (29)$$

в которой знаки перед каждым слагаемым, как и само значение функции, берутся в зависимости от предельных условий на границах пласта в соответствии со знаками в формулах (22) и (23).

Например, если все четыре границы пласта непроницаемы, то в соответствии с (22)

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{4\delta \sqrt{\alpha a}} \left[N(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{t}) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{t}) + N(\bar{x}_3, \bar{y}_2, \bar{t}) - \right. \\ \left. - N(\bar{x}_4, \bar{y}_2, \bar{t}) - N(\bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{t}) + N(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{t}) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{t}) + \right. \\ \left. + N(\bar{x}_4, \bar{y}_1, \bar{t}) + N(\bar{x}_2, \bar{y}_3, \bar{t}) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_3, \bar{t}) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{t}) - \right. \\ \left. - N(\bar{x}_4, \bar{y}_3, \bar{t}) - N(\bar{x}_2, \bar{y}_4, \bar{t}) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_4, \bar{t}) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_4, \bar{t}) + \right. \\ \left. + N(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{t}) \right] \left| \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right|. \quad (30)$$

При всех проницаемых границах в (30) следует лишь поменять знаки в соответствии (23). В случае непроницаемости двух непараллельных границ в (29) необходимо функции $N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$ заменить на функции $N^{**}(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$. Если одна из границ проницаема или непроницаема, то используются функции $N^*(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$, а знаки записываются в соответствии со знаками, получающимися в итоге, например, перемножения выражений первой скобки в (22) на выражение второй скобки (23), если проницаемая граница пласта $x = l_x$ и т. д.

Далее перейдем к рассмотрению растекания бугров грунтовых вод при переменной интенсивности инфильтрации второго вида.

Чтобы получить решение для неограниченного пласта, необходимо в (3) вместо $\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}$ подставить величину $q_1 e^{-st}$, т. е. необходимо найти значение интеграла вида

$$I = \int_{t_2}^{t_3} \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} \right) e^{-\varepsilon \tau} d\tau.$$

Его приближенное значение будет

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\pi} \int_{t_2}^{t_3} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{3\tau^2} + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{9\tau^3} \right) e^{-\varepsilon\tau} d\tau = \\ = \frac{4}{\pi} \lambda_1\lambda_2 \left\{ Ei(-\varepsilon\tau) \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \varepsilon^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau} \left[\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{3} + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \varepsilon \right] - \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau^2} \right\}_{t_2}^{t_3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда изменение зеркала грунтовых вод с учетом (8), (9) и (31) можно рассчитать по формуле

$$s = \frac{q_1}{\pi\delta} \sum_{i=1}^4 \bar{I}_i, \quad \bar{I}_i = \frac{\pi}{4} I_i \quad (32)$$

$$\bar{I}_1(\lambda_1, \lambda_2, t), \bar{I}_2(\lambda_1, \lambda_4, t), \bar{I}_3(\lambda_2, \lambda_3, t), \bar{I}_4(\lambda_3, \lambda_4, t)$$

вычисляются по (31), а

$$\lambda_1 = \frac{x+b}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_2 = \frac{y+l}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_3 = \frac{x-b}{2\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \lambda_4 = \frac{y-l}{2\sqrt{a}}.$$

Для полуограниченного пласта решение (32) принимает вид

$$s = \frac{q_1}{\pi\delta} \left[\sum_{i=1}^4 (\bar{I}_i + \bar{I}_i^*) \right], \quad (33)$$

где \bar{I}_i^* вычисляются по формуле (31), в которую подставляются сопряженные (относительно границы) значения λ_i^* .

Для пласта-квадрата решения записываются по (20), куда вместо I_i подставляются интегралы \bar{I}_i .

Решение задачи о растекании бугра грунтовых вод для пласта-полосы можно найти из (16), заменив в этой формуле $\frac{1}{\sqrt{at}}$ на $q_1 e^{-\varepsilon t}$,

т. е. можно записать

$$\begin{aligned} s = \frac{l_x^2 q_1}{2\delta a} \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \left\{ (1 + \rho_x) \bar{b} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}}}{n} [\rho_x (\sin n \pi \bar{x}_1 - \right. \\ \left. - \sin n \pi \bar{x}_2) - (\sin n \pi \bar{x}_3 - \sin n \pi \bar{x}_4)] \right\} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_2}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_1}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \right] e^{-\bar{\tau}} d\bar{\tau}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon l^2}{a}$, а остальные обозначения соответствуют формуле (16).

Введем следующую функцию:

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x} I(\bar{y}, \bar{t}), \quad (35)$$

где

$$I(\bar{y}, \bar{t}) = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2 \sqrt{\bar{\tau}}} \right) e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{\tau}} d\bar{\tau} \approx$$

$$\approx \left\{ \frac{6\bar{y} + \bar{y}^3 (n^2 \pi^2 + \gamma)}{6V \frac{n^2 \pi^2 + \gamma}{\bar{t}_3}} \left[\operatorname{erf} \sqrt{(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_3} - \operatorname{erf} \sqrt{(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{y}_3}{6 \sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_3}}{\sqrt{\bar{t}_3}} - \frac{e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_2}}{\sqrt{\bar{t}_2}} \right] \right\}. \quad (36)$$

Тогда общее решение для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$s = \frac{l_x^2 q_1}{4\delta \sqrt{a}} \left\{ \frac{(1 + \rho_x) \bar{b}}{\gamma} (e^{-\gamma \bar{t}_2} - e^{-\gamma \bar{t}_3}) + \sum_{i=1}^4 [H(\bar{x}_i, \bar{y}_1, \bar{t}) + \right.$$

$$\left. + \rho_x H(\bar{x}_i, \bar{y}_2, \bar{t}) \right]_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (37)$$

Чтобы получить решение для пласта-полуполосы необходимо формулу (37) применить также для отраженных относительно поперечной границы бассейнов и результаты просуммировать по формуле (12).

Решение для пласта-прямоугольника для рассматриваемого случая согласно (21) будет иметь вид

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{q_1 l^2}{4\delta a} \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tau}) e^{-\gamma \bar{\tau}} d\bar{\tau}, \quad (38)$$

где функция $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tau})$ имеет тот же вид, что и в первом случае, т. е. определяется формулами (22) и (23).

Для построения решения, которое можно было бы использовать в практических расчетах, необходимо вычислить следующие интегралы:

$$M(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = - \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin n \pi \bar{x}_i \right] \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\lambda^2 m^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin m \pi y_j \right] e^{-\gamma \bar{\tau}} d\bar{\tau} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \bar{x}_i}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi \bar{y}_j}{m [(n^2 + \lambda^2 m^2) \pi^2 + \lambda]} e^{-[(n^2 + \lambda^2 m^2) \pi^2 + \lambda] \bar{t}} \right\}_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (39)$$

Аналогично

$$M^* (\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \bar{x}_i}{n} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j e^{-\lambda \pi^2 [n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma} \bar{t}}{(m - 0,5) \{ \pi^2 [n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma \}} \Big|_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}; \quad (40)$$

$$M^{**} (\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (n - 0,5) \pi \bar{x}_i}{n - 0,5} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j e}{(m - 0,5) \{ \pi^2 [(n - 0,5)^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma \}} \Big|_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (41)$$

Подставляя полученные формулы, которые можно протабулировать в (38), получаем расчетные формулы, аналогичные выражению (29), где перед квадратной скобкой стоит множитель $q_1/4\delta$. Замечания относительно учета предельных условий на границах пласта остаются такие же, как и к (29).

Результатирующее изменение поверхности грунтовых вод под действием нескольких бассейнов подсчитывается по принципу суперпозиции.

Рассмотренные здесь расчетные схемы инфильтрационного питания потока грунтовых вод из бассейнов охватывают большое количество вариантов расположения (прямоугольных в плане) инфильтрационных бассейнов относительно границ пласта и существенны для практического прогнозирования искусственного регулирования запасов подземных вод. Полученные решения имеют вид, поддающийся табулированию с использованием ЭЦВМ.

Для дальнейших разработок представляет интерес рассмотрение многослойных сред.

Литература

1. В. С. Усенко. Фильтрационные расчеты искусственного восполнения запасов подземных вод. Сб. «Проблемы использования водных ресурсов». Минск, 1971.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1966.
3. С. В. Васильев и др. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем. М., 1970.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. М., 1952.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, разрядов и произведений. М., 1971.
6. Г. Карслоу, Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.