

УДК 534.131:534-8

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ КОЛЬЦЕВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Степаненко Д. А., Киндрук А. Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** Рассмотрена методика механико-математического моделирования вынужденных колебаний составных ультразвуковых колебательных систем, включающих последовательно соединенные антирезонансные стержневой и кольцевой элементы. Получено выражение для общего коэффициента передачи колебаний по амплитуде. Приводятся численный пример применения разработанной методики и подтверждение достоверности полученных результатов на основе моделирования с помощью метода конечных элементов. Рассмотрена возможность дополнительного повышения коэффициента передачи колебаний путем изменения параметров стержневого элемента колебательной системы.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, ультразвуковая колебательная система, кольцевой концентратор.

## FORCED VIBRATIONS OF COMPOUND ULTRASONIC VIBRATORY SYSTEMS COMPRISING RING-SHAPED ELEMENTS

Stepanenko D., Kindruk A.

Belarusian national technical university

Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** The article presents methodology for mechanical-mathematical modelling of forced vibrations of compound ultrasonic vibratory systems consisting of serially connected antiresonant bar and ring elements. Expression for total coefficient of vibration transmission by amplitude is derived. Numerical example of application of the suggested methodology and verification of the obtained results by means of finite element modelling are given. Possibility of additional improvement of transmission coefficient by adjusting parameters of the bar element of vibratory system is considered.

**Key words:** forced vibration, ultrasonic vibratory system, ring-shaped concentrator.

Адрес для переписки: Степаненко Д. А., пр. Независимости, 65, г. Минск 220113, Республика Беларусь  
e-mail: dstepanenko@bntu.by

Эффект усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде кольцевыми упругими элементами ранее описывался авторами для неравнотолщинных колец [1], однако усилительными свойствами обладают и равнотолщинные кольцевые элементы при их работе в режиме вынужденных колебаний на частоте возбуждения, близкой к одной из собственных частот колебаний. Подобный эффект наблюдался при моделировании ультразвуковой колебательной системы (УЗКС) для кавитационного упрочнения деталей машин [2], однако не был подробно описан и исследован. Целью данного исследования являлась разработка механико-математических моделей, описывающих усилительные свойства равнотолщинных кольцевых упругих элементов и составных УЗКС на их основе.

Вынужденные изгибные колебания кольца рассматриваются в приближении Эйлера-Бернулли, основанном на допущении о нерастяжимости средней линии и не учитывающем сдвиговые деформации. Зависимость  $v(\varphi)$  амплитуды тангенциальных колебательных смещений от угловой координаты  $\varphi$  ищется в виде разложения по ортогональным базисным функциям  $v_i(\varphi) = \sin(i\varphi)$ , являющимся решениями однородного дифференциального уравнения, описывающего свободные колебания кольца, и соответствующим собственным формам колебаний:

$$v(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(\varphi). \quad (1)$$

Для коэффициентов  $a_i$  ряда (1) было получено следующее выражение:

$$a_i = \frac{iF_0}{4(i^2+1)\pi^3 R \rho S (f_i^2 - f^2)},$$

где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы,  $R$  – радиус средней линии кольца,  $\rho$  – плотность материала,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $f$  – частота вынужденных колебаний,  $f_i$  –  $i$ -я собственная частота колебаний.

Коэффициент передачи колебаний по амплитуде определяется формулой

$$K_{\text{ring}}(\omega) = \left| \frac{w(\pi)}{w(0)} \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i^2}}{(i^2+1)\omega^2 - i^2(i^2-1)^2\beta}}{i^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i^2+1)\omega^2 - i^2(i^2-1)^2\beta}} \right|,$$

где  $w(\varphi) = dv/d\varphi$  – амплитуда радиальных колебательных смещений;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота колебаний;  $\beta = EI/\rho SR^4$  – коэффициент, учитывающий геометрические параметры и свойства материала;  $E$  – модуль упругости;  $I$  – осевой момент инерции поперечного сечения.

Максимальные значения коэффициента передачи  $K \rightarrow \infty$  наблюдаются на частотах антирезонанса, соответствующих нулевому значению входной амплитуды  $w(0)$ , а его минимальные зна-

чения  $K = 1$  – на частотах резонанса, для которых колебания имеют одноименный характер.

Для составной УЗКС, состоящей из последовательно соединенных стержневого волновода с постоянной площадью поперечного сечения и равнотолщинного кольца, общий коэффициент передачи будет определяться формулой

$$K_{\text{общ}}(\omega) = K_{\text{бар}}(\omega)K_{\text{ring}}(\omega),$$

где  $K_{\text{бар}}(\omega) = |\cos(\omega L/c)|$  – коэффициент передачи для стержневого волновода,  $L$  – длина волновода,  $c$  – скорость продольной стержневой волны.

Максимальное значение общего коэффициента передачи будет достигаться при близости частот антирезонанса составных элементов УЗКС. Частота антирезонанса стержневого элемента УЗКС определяется при этом из формулы

$$f = (2n - 1)c/4L, \quad (2)$$

где  $n$  – натуральное число.

В практических расчетах вначале определяются частоты антирезонанса кольцевого элемента УЗКС, а затем для одной из этих частот по формуле (2) рассчитывается длина стержневого элемента.

В качестве численного примера было рассмотрено проектирование УЗКС при следующих параметрах кольцевого элемента: плотность материала  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  модуль упругости  $E = 210 \text{ ГПа}$ , размеры поперечного сечения  $b \times h = 2 \times 2 \text{ мм}$ , радиус средней линии  $R = 20 \text{ мм}$ . Для частоты антирезонанса кольцевого элемента, равной 24523 Гц, расчетная антирезонансная длина стержневого элемента, имеющего те же свойства материала и те же размеры сечения, что и кольцевой элемент, составила 52,9 мм. Расчет общего коэффициента передачи в случае точного совпадения частот антирезонанса требует особого рассмотрения, так как в этом случае в выражении для коэффициента возникают неопределенности вида 0/0, требующие раскрытия по правилу Лопиталя. В связи с этим был рассмотрен более простой с точки зрения расчета случай, когда между частотами антирезонанса имеется рассогласование. При укорочении стержневого элемента до длины 47,5 мм, что соответствует повышению его частоты антирезонанса на 11,4 %, резонансная частота УЗКС имела значение 24721 Гц, близкое к частоте антирезонанса кольцевого элемента.

Общий коэффициент передачи составил в этом случае  $K_{\text{общ}} = 2,138$ .

Для подтверждения достоверности полученных численных результатов было проведено моделирование колебаний составной УЗКС с помощью метода конечных элементов с применением программы Comsol Multiphysics. Расчетное распределение амплитуды колебаний представлено на рисунке 1.

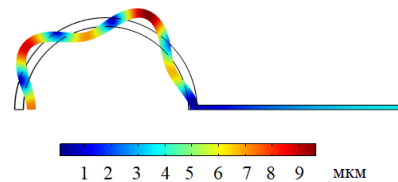


Рисунок 1 – Расчетное распределение амплитуды колебаний составной УЗКС

Расчетные значения резонансной частоты и коэффициента передачи составили, соответственно, 23932 Гц и 1,999, что согласуется со значениями, полученными на основе механико-математической модели. Более точные результаты могут быть получены при описании колебаний с помощью теории Тимошенко.

Коэффициент передачи колебаний может быть дополнительно повышен за счет увеличения площади поперечного сечения стержневого элемента УЗКС или волнового сопротивления  $\rho c$  его материала, так как рассматриваемая УЗКС имеет аналогию со ступенчатыми стержневыми концентраторами, состоящими из двух антирезонансных стержней (четвертьволновых сегментов), различающихся площадью поперечного сечения и/или свойствами материала, для которых коэффициент передачи определяется формулой

$$K = (\rho c S)_{\text{вх}} / (\rho c S)_{\text{вых}},$$

где индексы указывают на отношение соответствующих параметров к входному и выходному сегментам концентратора.

#### Литература

1. Степаненко, Д. А. Вариационная задача о колебаниях неравнотолщинных колец и ее применение для расчета концентраторов ультразвуковых колебаний / Д. А. Степаненко, А. Н. Киндрук // Наука и техника. – 2024. – № 4. – С. 295–303.
2. Experimental investigation of peening cylindrical workpieces utilizing a transducer with ring sonotrode / F. Bai [et al.] // Applied Sciences. – 2021. – V. 11, Art. 94.