

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ С НЕСЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Исследование спектра частот является важной задачей при проектировании инженерных конструкций. В работах [1–3] рассматриваются различные методы расчета напряжений и деформаций в многослойных материалах, а также особенности их поведения под воздействием различных нагрузок. Представлены методы анализа устойчивости конструкций и расчет параметров колебаний, в том числе и при импульсных нагрузениях. В статье [4] рассмотрены исследованы собственные колебания в трехслойных оболочках. Работы [5–8] посвящены проблемам динамического и статического деформирования композитных пластин. В статьях [9–10] рассмотрен изгиб трехслойных стержней в температурном поле. Работы [11–12] посвящены исследованию колебаний слоистых стержней.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается симметричный по толщине трехслойный стержень. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. Для пакета справедлива гипотеза ломанной линии. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). За искомые величины принимаются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг в заполнителе $\psi(x, t)$.

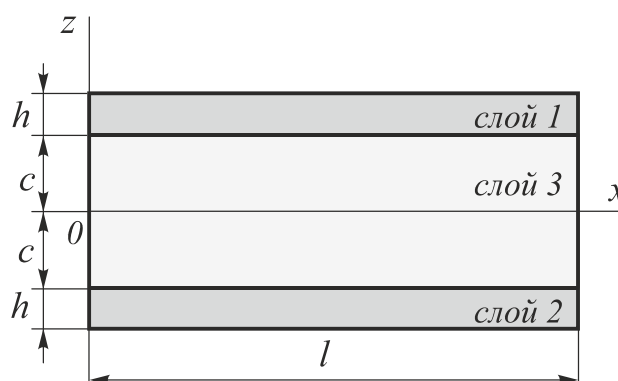


Рис. 1. Сэндвич-стержень

Исходя из принятых гипотез продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через искомые функции:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= c\psi - zw_{,x} & (c \leq z \leq c + h), \\
u^{(3)} &= z\psi - zw_{,x} & (-c \leq z \leq c), \\
u^{(2)} &= -c\psi - zw_{,x} & (-c - h \leq z \leq -c),
\end{aligned} \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемой точки до осевой линии заполнителя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя соотношения Коши и выражения (1), получим компоненты тензора деформаций в слоях:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= c\psi_{,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{xz}^{(1)} &= 0 & (c \leq z \leq c + h), \\
\varepsilon_x^{(3)} &= z\psi_{,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi & (-c \leq z \leq c), \\
\varepsilon_x^{(2)} &= -c\psi_{,x} - zw_{,xx}, & \varepsilon_{xz}^{(2)} &= 0 & (-c - h \leq z \leq -c).
\end{aligned}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в рассматриваемом случае будут следующими:

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_x^{(k)}, \quad \varepsilon_x^{(k)} = \frac{2}{3}\varepsilon_x^{(k)}.$$

Внутренние силы $N^{(k)}$, $Q^{(3)}$ и моменты $M^{(k)}$ в слоях стержня вводятся соотношениями

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений в слоях стержня; b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения движения получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского [13]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W) dt = 0, \tag{2}$$

где W – потенциальная энергия деформации; K – кинетическая энергия системы.

Потенциальная энергия деформации

$$W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (3)$$

Кинетическую энергию системы можно записать

$$K = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\rho_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx, \quad (4)$$

где ρ_k – плотность материала;

$w^{(k)}$, $u^{(k)}$ – перемещения точек k -го слоя.

Используем соотношения потенциальной (3) и кинетической (4) энергий, а также соотношения закона Гука, чтобы получить указанные вариации в перемещениях. Подставим последние соотношения в вариационное уравнение (2), группируя сомножители при одноименных независимых вариациях перемещений, приходим к двум уравнениям движения в перемещениях трехслойного стержня. Использование всех инерционных слагаемых неоправданно усложняет задачу. В дальнейшем будут исследованы поперечные колебания упругого стержня с доминирующей деформацией изгиба. В этом случае функция прогиба $w(x,t)$ является определяющей, по сравнению сдвигом в заполнителе $\psi(x,t)$. Поэтому в дальнейшем оставляем только члены, учитывающие инерцию движения в слоях вдоль вертикальной оси:

$$\begin{aligned} b_1 \psi_{,xx} - b_2 w_{,xxx} - b_4 \psi &= 0, \\ b_2 \psi_{,xxx} - b_3 w_{,xxxx} &= m_1 \ddot{w}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты системы (5)

$$\begin{aligned} b_1 &= 2c^2 \left(h \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right), \\ b_2 &= 2c \left[h \left(c + \frac{1}{2} h_l \right) \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c^2 \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right], \\ b_3 &= 2h \left(c^2 + ch + \frac{1}{3} h^2 \right) \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{2}{3} c^3 \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right), \quad b_4 = 2G_f c, \\ m_1 &= 2\rho_b h + 2\rho_f c, \end{aligned}$$

где K_b, G_b – модули объемной деформации и сдвига материала несущих слоев;

K_f, G_f – модули объемной деформации и сдвига материала заполнителя.

При решении задачи о динамическом нагружении трехслойного стержня для определенного вида закрепления его торцов к уравнениям (5) необходимо присоединить кинематические граничные условия, которые следуют из силовых граничных условий на торцах стержня:

Начальные условия движения будут следующие ($t = 0$):

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (6)$$

где $w_0(x), \dot{w}_0(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединной поверхности заполнителя.

2. Решение задачи. Для решения различных проблем о динамическом нагружении стержня важную роль играет задача по определению спектра частот и фундаментальных функций соответствующей однородной краевой задачи.

С целью построения фундаментальных функций для прогиба в системе уравнений движения (5) исключим неизвестную $\psi(x, t)$. Членами, учитывающими инерцию вращения нормали, пренебрегаем. В итоге получим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$w_{,xxxx} + s_1 \ddot{w} = 0, \quad (7)$$

где

$$s_1 = \frac{m_1 b_4}{b_3 b_4 - b_1 b_3 + b_2^2}.$$

Численный анализ коэффициента s_1 позволил установить, что для реальных физико-механических параметров материалов несущих слоев и заполнителя величина s_1 положительна.

Решение будем искать в виде

$$w(x, t) = T(t)W(x). \quad (8)$$

Подстановка выражения (8) в уравнение (7) позволяет разделить переменные и получить для них уравнения:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \quad W_{,xxxx} - \lambda^4 W = 0, \quad (9)$$

где ω – частота собственных колебаний, $\lambda^4 = s_1 \omega^2 > 0$.

Первое уравнение из (9) имеет следующее решение

$$T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

где A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (6).

Второе дифференциальное уравнение (9) для координатной функции имеет постоянные коэффициенты. Общее решение уравнения:

$$W(x) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda x) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x). \quad (10)$$

Постоянные C_1, \dots, C_4 и частотное уравнение для определения ω_n получим, подчинив функцию $W(x)$ краевым условиям. В частном случае, если последние будут нулевыми, то приходим к системе однородных алгебраических уравнений. Приравняв нулю детерминант матрицы коэффициентов системы, раскрыв его, приходим к уравнению собственных частот, а каждой частоте с номером n соответствует свой набор констант.

Например, граничные условия для жесткого защемления торцов стержня выпишем в кинематическом виде. При $x = 0, l$

$$w = w_{,r} = 0. \quad (11)$$

Подставим значения в (11) с учетом выражения (10) и получим

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{ch}(0) + C_2 \operatorname{sh}(0) + C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0) &= 0, \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(0) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(0) - C_3 \lambda \sin(0) + C_4 \lambda \cos(0) &= 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(\lambda l) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda l) + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) &= 0, \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(\lambda l) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(\lambda l) - C_3 \lambda \sin(\lambda l) + C_4 \lambda \cos(\lambda l) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя. Получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел λ_n

$$1 - \operatorname{ch}(\lambda l) \cos(\lambda l) = 0.$$

После определения корней λ_n частоты собственных колебаний вычисляются из выражения

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4}{s_1}.$$

Выводы. В данной работе рассмотрена методика исследования свободных колебаний сэндвич-стержней с несжимаемым наполнителем. Получены аналитические выражения для частот свободных колебаний, а также искомых перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Григолюк, Э. И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. – Москва : Машиностроение, 1973. – 172 с.
3. Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.
4. Леоненко, Д. В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
5. Adam, C. Moderately large flexural vibrations of composite plates with thick layers / C. Adam // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – Vol. 40, No. 16. – P. 4153–4166.
6. Коган, Е. А. Нелинейные колебания защемленных по контуру трехслойных пластин / Е. А. Коган, А. А. Юрченко // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 5. – С. 25–34.
7. Sherif, H. A. Non-linear forced flexural vibration of a clamped circular unsymmetrical sandwich plate / H. A. Sherif // Journ. of Sound and Vibr. – 1995. – Vol. 182, No. 3. – P. 495–503.
8. Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
9. Старовойтов, Э. И. Термосиловое деформирование ступенчатого трехслойного физически нелинейного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Инженерно-физический журнал. – 2016. – 89, № 6. – С. 1608–1616.
10. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

11. Jacques, N. Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich beams by the harmonic balance and finite element methods / N. Jacques, E. M. Daya, M. Potier-Ferry // Journ. of Sound and Vibr. – 2010. – Vol. 329, No. 20. – P. 4251–4265.

12. Леоненко, Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании/ Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Прикладная механика. – 2016. – 52, № 4. – С. 37–46.

13. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

Поступила: 16.02.2024