

РЕШЕНИЕ ДВУХ ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В. А., Гончарова С. В., Беляцкая Л. Н., Чигарев В. А.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

Введение. Понятие напряженного состояния (НС) в точке упругого твердого тела является ключевым в теории упругости и сопромате. В общем случае нагружения тела его НС неоднородно-оно изменяется от точки к точке и зависит от направления площадки, проходящей через заданную точку. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на всех площадках, проходящих через заданную точку, собственно, и является напряженным состоянием в точке нагруженного тела. Для полного анализа НС в точке достаточно знать тензор напряжений т. е. нормальные и касательные напряжения на трех произвольных взаимно перпендикулярных площадках. Одним словом, напряженным состоянием в точке называется совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по трем взаимно перпендикулярным площадкам (сечениям), содержащим данную точку.

Модели и методы. Как известно первая прямая задача теории упругости заключается в том, что по заданному напряженному состоянию в данной точке, описываемому тензором напряжений, необходимо найти главные напряжения и расположения площадок, на которых они действуют. Решение этой задачи известно, [1] и поэтому, для простоты и убедительности сопроводим его конкретным численным примером. Таких примеров можно придумать много, что обычно подтверждается на практике выдачей студентам контрольной работы.

Итак, пусть напряженное состояние в точке задано тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{МПа. \#} \quad (1)$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$.

Коэффициентами этого уравнения служат инварианты тензора напряжений:

а) линейный инвариант $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2 + 4 + 4 = 10$ МПа;

б) квадратичный инвариант

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - (-\sqrt{3})^2 - 0^2 - 0^2 = 29 \text{ (МПа)}^2;$$

в) кубический инвариант

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^2 - 4 \cdot (-\sqrt{3})^2 = 20 \text{ (МПа)}^3.$$

При таких значениях инвариантов кубическое уравнение принимает вид $\sigma^3 - 10\sigma^2 + 29\sigma - 20 = 0$.

Корни этого уравнения равны $\sigma_1 = 5$ МПа, $\sigma_2 = 4$ МПа, $\sigma_3 = 1$ МПа.

Это и есть главные напряжения, расставленные в порядке убывания, т. е. максимальное равно 5 МПа, минимальное 1 МПа, среднее 4 МПа.

Направляющие косинусы главных площадок определяются из уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0, \\ \tau_{yx}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0, \\ \tau_{zx}l_i + \tau_{zy}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0, \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Для первой площадки $i = 1$, $\sigma_1 = 5$ МПа, получим:

$$\begin{cases} -3l_1 - \sqrt{3}m_1 = 0, \\ -\sqrt{3}l_1 - m_1 = 0, \\ -n_1 = 0, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_1 = \frac{1}{2}$, $m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n_1 = 0$, т. е. вектор нормали равен $\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Для второй площадки $i = 2$, $\sigma_2 = 4$ МПа, получим:

$$\begin{cases} -2l_2 - \sqrt{3}m_2 = 0, \\ -\sqrt{3}l_2 = 0, \\ 0 = 0, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид: $l_2 = 0$, $m_2 = 0$, $n_2 = 1$, т. е. вектор нормали равен $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$.

Для третьей площадки $i = 3$, $\sigma_3 = 1$ МПа, будем иметь:

$$\begin{cases} l_3 - \sqrt{3}m_3 = 0, \\ -\sqrt{3}l_3 + 3m_3 = 0, \\ 3n_3 = 0, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид: $l_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m_3 = \frac{1}{2}$, $n_3 = 0$ т.е. вектор нормали равен $\vec{n}_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что выполняются соотношения для ортогональности площадок

$$\begin{cases} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0, \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0, \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 = 0. \end{cases}$$

Решим теперь обратную задачу: в данной точке твердого тела главные напряжения и их направления имеют вид $\sigma_1 = 5$ МПа, $\sigma_2 = 4$ МПа, $\sigma_3 = 1$ МПа,

$$\vec{n}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0), \quad \vec{n}_2 = (0, 0, 1), \quad \vec{n}_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

Требуется найти исходный тензор напряжений $T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$

в данной точке.

Теперь решим первую обратную инновационную задачу теории упругости в следующей постановке: в данной точке упругого твердого тела заданы главные напряжения и направления главных площадок т. е. там, где они действуют:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения;
 $\vec{n}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ $\vec{n}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, $\vec{n}_3 = (l_3, m_3, n_3)$ – направления главных площадок.

Требуется найти исходный тензор напряжений $T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$

в данной точке.

Результаты исследования и их анализ. За основу решения берутся известные формулы [1, стр. 79]:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0, \\ \tau_{zx}l_i + \tau_{zy}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0, \\ l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2)$$

Вводя обозначения $\sigma_x = x_1$, $\tau_{xy} = x_2$, $\tau_{xz} = x_3$, $\sigma_y = x_4$, $\tau_{yz} = x_5$, $\sigma_z = x_6$, перепишем эту систему в виде 3 систем, содержащих по 3 уравнения:

$$\begin{cases} l_1 x_1 + m_1 x_2 + n_1 x_3 = \sigma_1 l_1, \\ l_2 x_1 + m_2 x_2 + n_1 x_3 = \sigma_2 l_2, \\ l_3 x_1 + m_3 x_2 + n_1 x_3 = \sigma_3 l_3; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} l_1 x_2 + m_1 x_4 + n_1 x_5 = \sigma_1 m_1, \\ l_2 x_2 + m_2 x_4 + n_1 x_5 = \sigma_2 m_2, \\ l_3 x_2 + m_3 x_4 + n_1 x_5 = \sigma_3 m_3; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} l_1 x_3 + m_1 x_5 + n_1 x_6 = \sigma_1 n_1, \\ l_2 x_3 + m_2 x_5 + n_1 x_6 = \sigma_2 n_2, \\ l_3 x_3 + m_3 x_5 + n_1 x_6 = \sigma_3 n_3. \end{cases} \quad (5)$$

Полученные девять уравнений содержат шесть неизвестных. Поэтому 3 из них превращаются в тождества и служат для проверки правильности решения. Так, например, выражая x_2 из (2) и (3) уравнений, x_5 из (3) и (4) уравнений, x_3 из (4) и (2) уравнений, получим три замечательных тождества:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} l_1 & \sigma_1 l_1 & n_1 \\ l_2 & \sigma_2 l_2 & n_2 \\ l_3 & \sigma_3 l_3 & n_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sigma_1 m_1 & m_1 & n_1 \\ \sigma_2 m_2 & m_2 & n_2 \\ \sigma_3 m_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \sigma_1 m_1 \\ l_2 & m_2 & \sigma_2 m_2 \\ l_3 & m_3 & \sigma_3 m_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} l_1 & \sigma_1 n_1 & n_1 \\ l_2 & \sigma_2 n_2 & n_2 \\ l_3 & \sigma_3 n_3 & n_3 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \sigma_1 n_1 & m_1 & n_1 \\ \sigma_2 n_2 & m_2 & n_2 \\ \sigma_3 n_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \sigma_1 l_1 \\ l_2 & m_2 & \sigma_2 l_2 \\ l_3 & m_3 & \sigma_3 l_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

В справедливости этих тождеств (6) можно непосредственно убедиться на основании разложения определителей по третьему, первому и второму столбцам соответственно и применению формулы:

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0, \text{ если } i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Покажем, как это делается для третьего соотношения формулы (6). Для первых двух тождеств формулы (6) аналогичная процедура сводится к циклической перестановке индексов.

$$\begin{aligned} & m_1(\sigma_2 - \sigma_3)n_2n_3 - m_2(\sigma_1 - \sigma_3)n_1n_3 + m_3(\sigma_1 - \sigma_2)n_1n_2 = \\ & = m_1(\sigma_3 - \sigma_2)l_2l_3 - m_2(\sigma_3 - \sigma_1)l_1l_3 + m_3(\sigma_2 - \sigma_1)l_1l_2, \\ & m_1(\sigma_2 - \sigma_3)(n_2n_3 + l_2l_3) - m_2(\sigma_1 - \sigma_3)(n_1n_3 + l_1l_3) + \\ & + m_3(\sigma_1 - \sigma_2)(n_1n_2 + l_1l_2) = 0, \\ & -m_1(\sigma_2 - \sigma_3)m_2m_3 + m_2(\sigma_1 - \sigma_3)m_1m_3 - m_3(\sigma_1 - \sigma_2)m_1m_2 = 0, \\ & -\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_2 = 0, \\ & 0 = 0. \end{aligned}$$

Приведем численный пример. Зададим значения главных напряжений и ориентации главных площадок:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 5 \text{ МПа}, & \sigma_2 &= 4 \text{ МПа}, & \sigma_3 &= 1 \text{ МПа}, \\ \vec{n}_1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right), & \vec{n}_2 &= (0, 0, 1), & \vec{n}_3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Подставляя эти исходные данные в систему уравнений (3), (4), (5), получим следующее решение:

$$x_1 = 2, x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 0, x_6 = 4.$$

Таким образом искомый тензор напряжений имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ МПа.}$$

И наоборот, если для заданного тензора напряжений требуется найти главные напряжения и главные площадки, то получим исходные данные для этой задачи.

Теперь рассмотрим вторую обратную инновационную задачу. Как и выше начнем с постановки второй прямой задачи, которая заключается в нахождении компонент вектора полного напряжения, действующего на

наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l; m; n)$, по известному тензору напряжений (2).

Приводим ответ известного решения этой задачи, которое можно найти в [1, стр. 79]

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{ny} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{nz} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (7)$$

Обратная задача, очевидно, звучит, так: по известным компонентам полного напряжения $(p_{nx}; p_{ny}; p_{nz})$, действующего на наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l; m; n)$, найти компоненты тензора напряжений (2) в данной точке.

Решение такой задачи приводится впервые. Оно основано на составлении шести уравнений равновесия тетраэдра. Первые три из них содержатся в формуле (6). Оставшиеся три уравнения составим как уравнения моментов относительно координатных осей. На основании рисунка 1 в соответствии с [1, стр. 80], запишем:

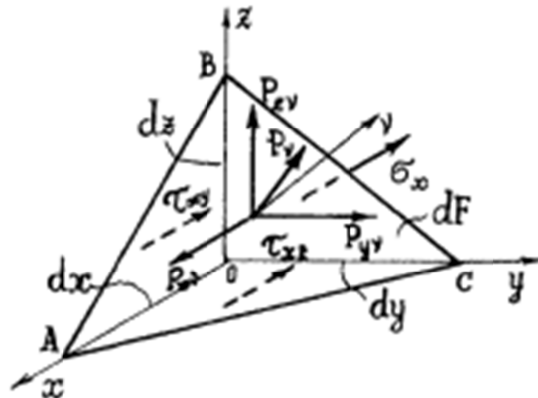


Рис. 1

$$-\sigma_x \frac{dz}{3} S_{\Delta OBC} - \tau_{xy} \frac{dz}{3} S_{\Delta OAB} + p_{nx} \frac{dz}{3} S_{\Delta ABC} + \sigma_z \frac{dx}{3} S_{\Delta OAC} = 0.$$

С учетом $S_{\Delta OBC} = S_{\Delta ABC} l$, $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} m$, $S_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC} n$ перепишем это уравнение в виде $\sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z \frac{dx}{dz} = p_{nx}$.

Производя циклическую замену переменных, получим еще два таких уравнения.

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z n \frac{dx}{dz} = p_{nx} , \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n - \sigma_x l \frac{dy}{dx} = p_{ny} , \\ \sigma_z n + \tau_{zx} l - \sigma_y m \frac{dz}{dy} = p_{nz} . \end{cases} \quad (8)$$

В результате к системе трех исходных уравнений (6) добавилась новая система их трех уравнений (7). Она имеет нестандартный вид, который следует преобразовать в стандартный. Для этого выражая площади треугольников, входящих в формулы (4) через $OA = dx$, $OC = dy$, $OB = dz$, получим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{1}{l^2} , \\ 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{1}{m^2} , \\ 1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{n^2} . \end{cases} \quad (9)$$

Решением этой системы являются искомые равенства:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{l}{m} , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{n}{l} . \quad (10)$$

Нетрудно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяют соотношениям (8) в силу равенства $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Подставляя соотношения (9) в (7), окончательно перепишем (7) в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x lm + \tau_{xy} m^2 - \sigma_z nl = mp_{nx} , \\ \sigma_y mn + \tau_{yz} n^2 - \sigma_x lm = np_{ny} , \\ \sigma_z nl + \tau_{zx} l^2 - \sigma_y mn = lp_{nz} . \end{cases} \quad (11)$$

Теперь из (11) определяем:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{mp_{nx} + \sigma_z nl - \sigma_x lm}{m^2} , \\ \tau_{yz} &= \frac{np_{ny} + \sigma_x lm - \sigma_y mn}{n^2} , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tau_{zx} = \frac{lp_{nz} + \sigma_y mn - \sigma_z nl}{l^2}.$$

Таким образом, дополнительно к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (6) получили еще одно СЛАУ (8).

Решая их совместно, сперва исключим касательные напряжения. Для этого подставляя соотношения (9) в (7) и с учетом парности напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} m^2 n^2 \sigma_y + nl(l^2 - mn)\sigma_z = -lmnp_{nz}, \\ n^2 l^2 \sigma_z + lm(m^2 - nl)\sigma_x = -lmnp_{nx}, \\ l^2 m^2 \sigma_x + mn(n^2 - lm)\sigma_y = -lmnp_{ny}. \end{cases} \quad (13)$$

Решим данную СЛАУ по формулам Крамера $\sigma_x = \frac{\Delta_x}{\Delta_1}$, $\sigma_y = \frac{\Delta_y}{\Delta_1}$, $\sigma_z = \frac{\Delta_z}{\Delta_1}$, здесь:

$$\Delta_x = -lmn \begin{vmatrix} p_{nz} & m^2 n^2 & nl(l^2 - mn) \\ p_{nx} & 0 & m^2 n^2 \\ p_{ny} & mn(n^2 - lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [n^2 l(n^2 - lm)p_{nz} - lmn^3 p_{ny} - n(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx}].$$

$$\Delta_y = -lmn \begin{vmatrix} 0 & p_{nz} & nl(l^2 - mn) \\ lm(m^2 - nl) & p_{nx} & m^2 n^2 \\ l^2 n^2 & p_{ny} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [l^2 m(l^2 - mn)p_{nx} - mnl^3 p_{nz} - l(l^2 - mn)(m^2 - nlp_{ny})];$$

$$\Delta_z = -lmn \begin{vmatrix} 0 & m^2 n^2 & p_{nz} \\ lm(m^2 - nl) & 0 & p_{ny} \\ l^2 n^2 & mn(n^2 - lm) & p_{nx} \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [m^2 n(m^2 - nl)p_{ny} - nlm^3 p_{ny} - m(m^2 - nl)(n^2 - lmp_{nz})];$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & m^2 n^2 & nl(l^2 - mn) \\ lm(m^2 - nl) & 0 & m^2 l^2 \\ l^2 m^2 & mn(n^2 - lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [l^2 m^2 n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)].$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{n}{\Delta} \left[-(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} - lmn^2 p_{ny} + nl(n^2 - lm)p_{nz} \right], \\
\sigma_y &= \frac{l}{\Delta} \left[lm(l^2 - mn)p_{nx} - (l^2 - mn)(m^2 - nl)p_{ny} - mnl^2 p_{nz} \right], \\
\sigma_z &= \frac{m}{\Delta} \left[-nlm^2 p_{nx} + mn(m^2 - nl)p_{ny} - (m^2 - nl)(n^2 - lm)p_{nz} \right],
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\Delta = l^2 m^2 n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Отметим, что в системе (9) сокращения не производились с целью симметрии уравнений, т. е. мы как бы умножили первую, вторую, и третью строчки, соответственно, на n , l , m . Результат будет тот же.

Подставляя найденные значения (10) в (8), определяем:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{m}{\Delta} \left[(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} + lmn^2 p_{ny} - nl(n^2 - lm)p_{nz} \right], \\
\tau_{yz} &= \frac{n}{\Delta} \left[-lm(l^2 - mn)p_{nx} + (l^2 - mn)(m^2 - nl)p_{ny} + mnl^2 p_{nz} \right], \\
\tau_{zx} &= \frac{l}{\Delta} \left[nlm^2 p_{nx} - mn(m^2 - nl)p_{ny} + (m^2 - nl)(n^2 - lm)p_{nz} \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\Delta = l^2 m^2 n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Сделаем проверку, подставляя (10) и (11) в (3). Прделав очевидные алгебраические преобразования, убеждаемся в правильности полученных формул.

Приведем численный пример для $l = \frac{2}{3}$, $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$;

$$p_{nx} = 1, \quad p_{ny} = 2, \quad p_{nz} = 3.$$

Непосредственно по формулам (10) и (11), находим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -15, & \sigma_y &= 36, & \sigma_z &= 27, \\
\tau_{xy} &= 30, & \tau_{yz} &= 18, & \tau_{zx} &= -27.
\end{aligned}$$

Таким образом, нам удалось восстановить тензор напряжений в данной точке только по действующим на заданной наклонной площадке усилиям.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 30 & -27 \\ 30 & -36 & 18 \\ -27 & 18 & 27 \end{pmatrix} \text{МПа.} \quad (16)$$

Теперь окончательно убеждаемся в том, что формула (3) тождественно удовлетворятся в числах.

$$\begin{aligned} -(15)\frac{2}{3} + 30\frac{2}{3} + (-27)\frac{1}{3} &= 1, & -10 + 20 - 9 &= 1, & 1 &= 1; \\ 30\frac{2}{3} + (-36)\frac{2}{3} + 18\frac{1}{3} &= 1, & 20 - 24 + 6 &= 2, & 2 &= 2; \\ (-27)\frac{2}{3} + 18\frac{2}{3} + 27\frac{1}{3} &= 3, & -18 + 12 + 9 &= 3, & 3 &= 3. \end{aligned}$$

Выводы. Даны решения двух обратных инновационных задач теории упругости. Алгоритм решения этих задач приводится впервые. Выполненный анализ пространственного напряженно-деформируемого состояния в точке позволяет более глубоко изучить прочностные свойства несущих элементов конструкций не только в отдельных сечениях, но и в строительной конструкции в целом. Решение обратной задачи замыкает поставленную проблему анализа напряженного состояния в точке и придает ей дополнительную стройность и законченность. Получены три новых тождества. На основе изложенной теории можно разработать и внедрить в практику новые контрольные и самостоятельные работы, с использованием полученных выше формул, для студентов, изучающих напряженно-деформированное состояние в точке в курсах теории упругости, сопромате или механики материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / под ред. Г. С. Варданяна. – М. : Издательство АСВ, 1995. – 568 с.

Поступила: 18.03.2024