УДК 539.3

РАСЧЕТ ФРАГМЕНТА ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ЛОКАЛЬНЫМ ВНУТРЕННИМ УГЛУБЛЕНИЕМ

Якупов[1] Н. М., Киямов[1] Х. Г., Мухамедова[1,2] И. З.

[1]Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН,
[2]Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Трехмерный сплайновый вариант метода конечных элементов применен для определения напряженно-деформированного состояния тороидальной оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности. Выполнены численные эксперименты, отмечены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния оболочки при изменении геометрических параметров углубления.

Введение. Наличие различных дефектов, в частности, углублений в элементах конструкций, приводит к концентрации напряжений в этой области, что может стать причиной разрушения конструкции [1; 2]. Экспериментальному и теоретическому исследованию оболочечных конструкций с дефектами различного рода посвящены, в частности, работы [3–9].

В оболочках, предназначенных для хранения и транспортировки различных жидких сред, на внутренней поверхности возникают локальные коррозионные углубления. Концентрация напряжений в области локальных углублений может стать источником разрушения. В связи с этим большой научный и практический интерес представляют исследования по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в оболочках при локальном изменении их геометрических параметров, в частности, в области локальных углублений.

Несквозные трещиновидные дефекты в тонкостенных оболочках рассмотрены в [4], дефектные зоны в трубопроводах исследованы в [5].

Многие исследования по оценке НДС тонкостенных конструкций проводятся на основе метода конечных элементов (МКЭ). Оболочечные конечные элементы рассмотрены, в частности в монографиях [7; 8]. Идея двумерного сплайнового варианта МКЭ, сочетающая параметризацию срединной поверхности всей рассматриваемой области и метод конечных элементов с бикубической аппроксимацией искомых переменных в пределах каждого элемента, была изложена в [10–12]. Расчеты оболочек сложной формы в двумерной постановке методом конечных разностей приведены в [9].

Однако для оценки НДС элементов тонкостенных конструкций с локальными несквозными дефектами необходимо исследовать в трехмерной постановке, в частности, как в [6; 13–15]. В работе [16] рассмотрена методика расчета тороидальных оболочек на основе МКЭ с изломом срединной поверхности. В [17] расчет оболочек произведен с применением объемного восьмиугольного конечного элемента. Для произвольно нагруженной оболочки вращения в [18] разработан шестигранный объемный конечный элемент с неизвестными в виде перемещений и напряжений. В работе [19] изложен алгоритм расчета конструкции в форме эллиптического цилиндра на основе МКЭ с интерполяцией полей перемещений, в котором используется четырехугольный криволинейный конечный элемент с восемнадцатью степенями свободы в узле.

В данной работе исследовано НДС тороидальной оболочки с локальным углублением, расположенным на внутренней поверхности оболочки в трехмерной постановке и выполнены численные эксперименты.

Основные соотношения трехмерного сплайнового варианта метода конечных элементов. Трехмерный сплайновый вариант МКЭ сочетает параметризацию всей рассматриваемой трехмерной области и метод конечных элементов с кубической аппроксимацией искомых переменных.

Радиус-вектор точки рассматриваемой трехмерной области фрагмента тороидальной оболочки толщиной h запишем в виде:

$$\overline{r} = \left[R_n + \left(R_o + hz\right)\cos(\beta)\right](\cos\alpha\,\overline{i} + \sin\alpha\,\overline{j}) + \left(R_o + hz\right)\sin(\beta)\overline{k},$$

$$\alpha = \frac{\pi t^2}{2},\ \beta = \pi t^1,\ z = t^3\ \ t^1 \in [-1;1],\ t^2 \in [0;1],\ t^3 \in [0;1], \tag{1}$$

где R_o – радиус окружности в поперечном сечении оболочки, R_n –расстояние от оси вращения до центра образующей окружности (рисунок 1).

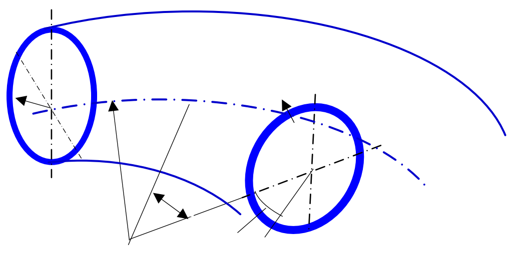

Рис. 1. Фрагмент тороидальной оболочки

Формула (1) вводит криволинейные координаты t^1, t^2, t^3, в которых образ тела оболочки представляет собой единичный куб. Радиус-вектор точки оболочки с локальным углублением представим следующим образом:

$$\overline{r_d} = \left\{ R_n + [R_o + hz - h_p \mathrm{e}^{-\chi}(z-1)] \cos(\beta) \right\} (\cos\alpha\, \bar{i} + \sin\alpha\, \bar{j}) +$$
$$+ [R_o + hz - h_p \mathrm{e}^{-\chi}(z-1)] \sin(\beta)\, \bar{k}\ ,\ \alpha = \frac{\pi t^2}{2}, \beta = \pi t^1, z = t^3 \qquad (2)$$
$$\chi = \gamma[\frac{(t^2 - t_p^2)^2}{a^2} + \frac{(t^1 - t_p^1)^2}{b^2}],\ t^1 \in [0;1],\ t^2 \in [0;1],\ t^3 \in [0;1].$$

Здесь a, b, γ – параметры, характеризующие дефект; t_p^1, t_p^2 – координаты центра дефектной области; h_p – минимальная толщина оболочки в дефектной области в точке $t^1 = t_p^1$, $t^2 = t_p^2$.

Дифференцируя соотношения (1) и (2) по t^1, t^2, t^3, определяем ковариантные компоненты метрического тензора g_{ij}:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1} \right)^2,\ \ g_{12} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2},\ \ g_{22} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2} \right)^2,$$

$$g_{13} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^3}, g_{23} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^3}, g_{33} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t^3} \right)^2. \qquad (3)$$

Исходя из (3), определяем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{it}}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial t^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial t^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t^t} \right). \qquad (4)$$

Разрешающие соотношения выводим из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_V W\, \mathrm{d}V = \int_V \rho f^i \delta u_i\, \mathrm{d}V + \int_S p^i\ \delta u_i\, \mathrm{d}S, \qquad (5)$$

где W – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела;

f^i, p^i – компоненты вектора массовых и поверхностных сил;

ρ – массовая плотность;

u_i – компоненты вектора искомых переменных;

S – поверхность боковых граней тела.

Рассматриваемую область единичного куба разбиваем на конечные элементы и решение $u_1 = u$, $u_2 = v$ и $u_3 = w$ в каждом из них представляем в виде интерполяционного кубического сплайна трех переменных [11–13]:

$$u=\left[\psi_1\left(s^1\right)\times\psi_2\left(s^2\right)\times\psi_3\left(s^3\right)\right]\otimes F_U,$$
$$v=\left[\psi_1\left(s^1\right)\times\psi_2\left(s^2\right)\times\psi_3\left(s^3\right)\right]\otimes F_V, \tag{6}$$
$$w=\left[\psi_1\left(s^1\right)\times\psi_2\left(s^2\right)\times\psi_3\left(s^3\right)\right]\otimes F_W,$$
$$s^1=\frac{t^1-t_i^1}{h_i^1},\quad s^2=\frac{t^2-t_i^2}{h_j^2},\quad s^3=\frac{t^3-t_i^3}{h_k^3},\quad h_i^1=t^1-t_i^1,\ h_j^2=t^2-t_j^2,\quad h_k^3=t^3-t_k^3,$$

где ψ_1,ψ_2,ψ_3 – векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям;

F_U, F_V, F_W – трехмерные матрицы компонент искомых неизвестных *u, v, w* и его производных соответственно.

Подставляя вариации перемещений и деформаций, учитывая независимость узловых перемещений и их производных, после ряда преобразований задача сводится к системе алгебраических уравнений вида

$$[\,A\,]\,\{\,U\,\}=\{\,R\,\}, \tag{7}$$

где $[A]$ – матрица жесткости системы ленточной структуры, $\{U\}$ – вектор неизвестных, $\{R\}$ – вектор нагрузки.

Сплайновый вариант МКЭ обеспечивает непрерывность полей перемещения и его первых производных в рассматриваемом пространстве исследуемого тела, что позволяет получать необходимые результаты при не большом количестве конечных элементов [11; 14].

Численные эксперименты. Рассмотрена часть тороидальной оболочки, жестко защемленной по торцам наружной поверхности. Оболочка находится под внутренним давлением p = 100 кГ/см^2. Параметры оболочки: модуль упругости E = 2 100 000 кГ/см^2; коэффициент Пуассона ν = 0,3; толщина h = 0,9 см; радиусы R_n = 123 см, R_0 = 41 см (рисунок 1). Разбиение на конечные элементы: 8 – по t^1, 8 – по t^2, 1 – по t^3. Численные эксперименты проведены для оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности при $a = b = d/2$. Рассмотрены диаметры зоны углубления: d = = 18 см; d = 24 см; d = 30 см при глубинах дефекта t = 0,2h, 0,4h, 0,6h , где h = 0,9 см – толщина стенки трубы, $t=h-h_p$.

Исследовано 3 варианта расположения внутреннего дефекта (рисунок 2): Для варианта 1 центром дефекта в угловых координатах α и β, выбрана точка (0, $\pi/4$), для варианта 2 – ($-\pi/2$, $\pi/4$), для варианта 3 – (π , $\pi/4$). На рисунке 3 приведены точки области дефекта (1, 2, 3, 4, 5) в которых вычисляются интенсивности напряжений.

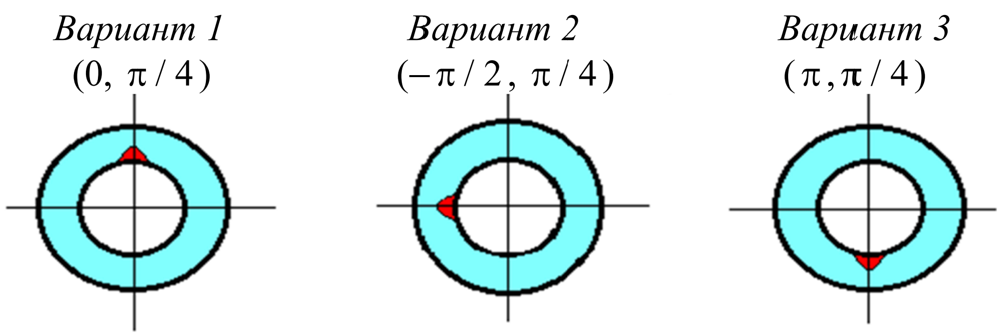

Рис. 2. Схемы расположения внутреннего деффекта в поперечном сечении тороидальной оболочки

Изменения интенсивности напряжений по толщине оболочки в области дефекта в точках 1, 2, 3, 4, 5 (по рисунку 3) приведены на рисунке 4.

Анализ результатов показал, что для *варианта 1* и *варианта 2* в контрольных точках 1, 2, 3 при увеличении глубины дефекта интенсивность напряжений σ_i увеличивается на 20–30 %, а в точках 4, 5 интенсивность напряжений, наоборот, уменьшается на 2–10 %.

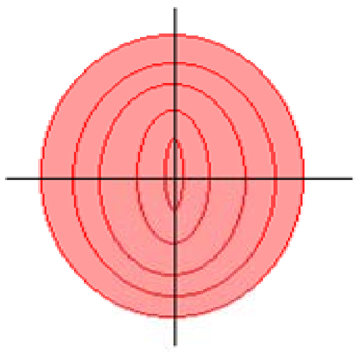

Рис. 3. Область дефекта эллиптической формы

На рисунке 4 для *варианта 1* представлена зависимость интенсивности напряжений σ_i при варьировании параметра t^2 в диапазоне от $0 \le t^2 \le \pi / 2$.

Как видно из рисунка 5 при увеличении глубины дефекта интенсивность напряжений в области дефекта растет.

На рисунке 6 приведена зависимость изменения интенсивности напряжений σ_i при варьировании окружной координаты в поперечном сечении оболочки: $-\pi \le t^1 \le 0$.

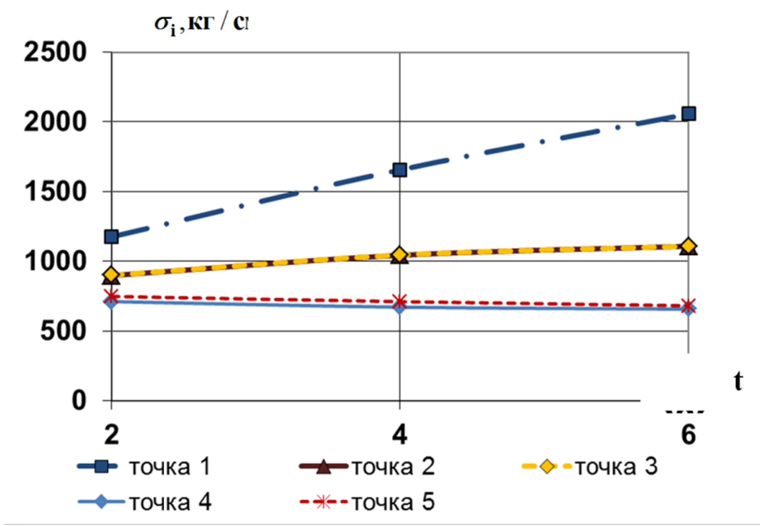

Рис. 4. Зависимость интенсивности напряжений σ_i от глубины дефекта t в контрольных точках дефектной области.
d = 18 мм; h = 8,1 мм

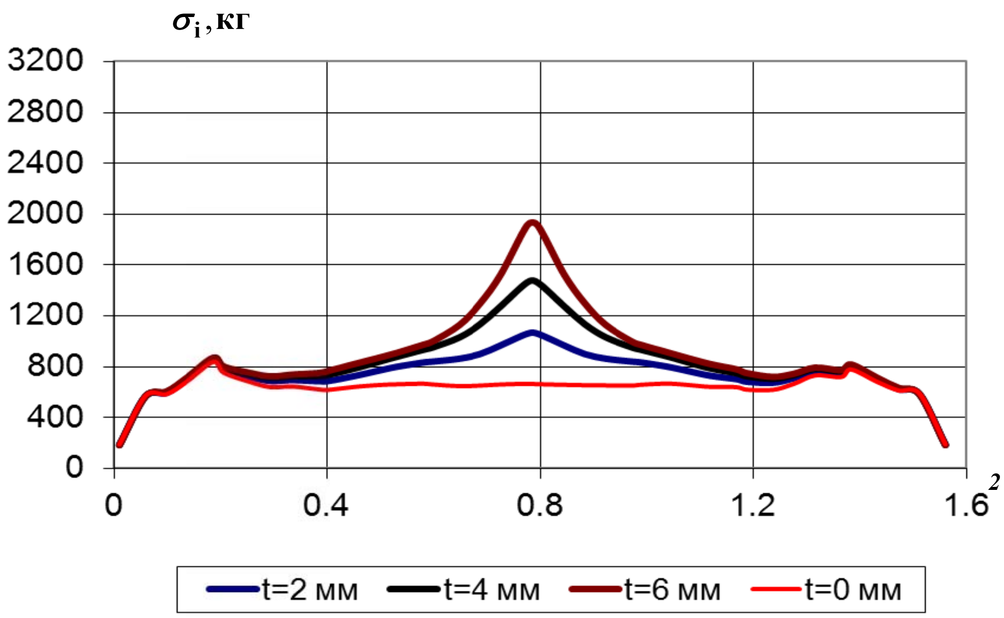

Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений σ_i
от параметра t^2 в диапазоне от $0 \le t^2 \le \pi / 2$ (d = 18 см; h = 8,1 мм)

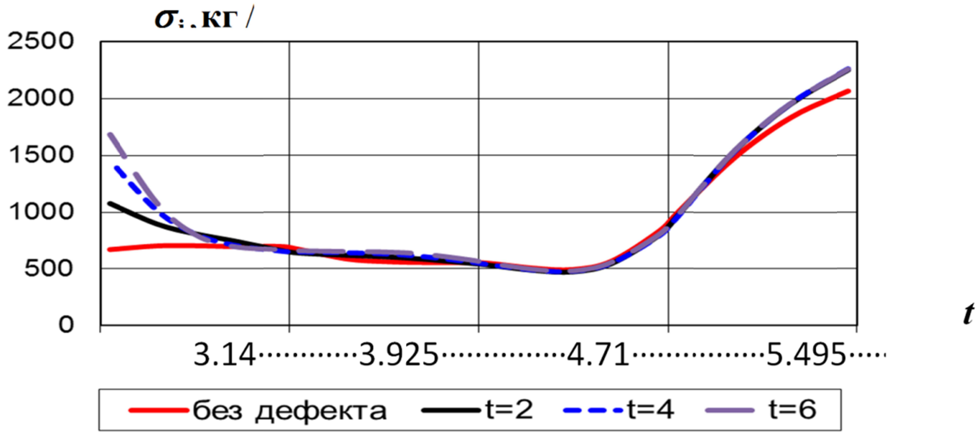

Рис. 6. Зависимость интенсивности напряжений σ_i от параметра t^1 в диапазоне от $-\pi \le t^1 \le 0$, d = 18 см; h = 0,9 мм

Графики построены при варьировании глубины дефекта. Выявлено, что при увеличении глубины дефекта интенсивность напряжений σ_i в области дефекта растет, а в других областях по окружной координате оболочки практически не изменяется.

Заключение

1. Трехмерный сплайновый вариант метода конечных элементов применен для оценки НДС тороидальной оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности.

2. Выполнены численные эксперименты по определению НДС в области дефекта в виде локального углубления, расположенного на внутренней поверхности оболочки, в зависимости от расположения и параметров углубления.

3. Установлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния оболочки при изменении геометрических параметров углубления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – М. : ГНТИ Машиностроительной литературы. – 1959. – Т. 3. – 1119 с.

2. Collins, J. A. Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention / J. A. Collins; The Ohio State University – New York : J. Wiley & Sans. – 1981. – 624 с.

3. Седова, О. С. Новая модель механохимической коррозии тонкостенных оболочек / О. С. Седова // Процессы управления и устойчивость. 2016. – Т. 3, № 1. – С. 265–269.

4. Яковлев, А. С. Тонкостенные оболочки с несквозными трещиновидными дефектами в приближении Дагдейла / А. С. Яковлев // Вестник Са-

марского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. – № 9–2 (110). – С. 140–146.

5. Игнатик, А. А. Экспериментальное и теоретическое исследование деформированного состояния дефектных зон трубопровода / А. А. Игнатик // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2018. – Т. 8. – № 2. – С. 147–153.

6. Якупов, С. Н. Анализ концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций с локальным углублением / С. Н. Якупов, Т. Р. Насибуллин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – № 1. – С. 30–36.

7. Рикардс, Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс – Рига : Зинанте, 1988. – 284 с.

8. Голованов, А. И. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, А. В. Песошин, О. Н. Тюленева – Казань : КГУ, 2005. – 442 с.

9. Расчет оболочек сложной формы / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк, В. В. Гайдайчук – Киев : Будивэльнык, 1990. – 190 с.

10. Якупов, Н. М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии / Н. М. Якупов // Исследования по теории оболочек. Тр. семинара, в. 17, Ч. II. – Казань, 1984. – С. 4–17.

11. Корнишин, М. С. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии / М. С. Корнишин, Н. М. Якупов // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 38–44.

12. Корнишин, М. С. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ / М. С. Корнишин, Н. М. Якупов // Прикладная механика. – 1989. –Т. 25, № 8. – С. 53–60.

13. Методы и подходы исследования напряженно-деформированного состояния конструкций сложной геометрии / Н. М. Якупов, Х. Г. Киямов, Ш. Ш. Галявиев, Р. З. Хисамов // Строительство. Известия ВУЗов. – № 8 (524). – 2002. – С. 14–18.

14. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами / Н. М. Якупов, Х. Г. Киямов, С. Н. Якупов, И. Х. Киямов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 145–154.

15. Yakupov, N. M. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements / N. M. Yakupov, H. G. Kiyamov, S. N. Yakupov // Journal of Physics: Conference series. – 2019. – 1158. – 042038.

16. Масленников, А. М. Напряженно-деформированное состояние тороидальных оболочек с изломами срединной поверхности / А. М. Масленников, Д. В. Гамилов // Вестник ТГАСУ. – 2007. – № 1. – С. 90–93.

17. Николаев, А. П. К расчету оболочек на основе метода конечных элементов / А. П. Николаев, А. П. Киселев // Вестник Российского университета дружбы народов, сер. Инженерные исследования. – 2002. – С. 107–111.

18. Гуреева, Н. А. Расчет оболочки вращения при произвольном нагружении с использованием МКЭ на основе функционала Рейснера / Н. А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А. П. Николаев // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 51–59.

19. Клочков, Ю. В. Напряженно-деформированное состояние эллиптического цилиндра с эллипсоидальным днищем из разнородных материалов на основе МКЭ / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 3. – С. 65–70.

Поступила: 20.03.2024