

В. П. Рогунович

### К РАСЧЕТУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСРЕДНЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ПО ДЛИНЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПОТОКАХ

Известно, что в гидравлике для определения средней скорости находит широкое применение постулат: каждый равномерный поток равнозначен плоскому равномерному с глубиной, равной гидравлическому радиусу, и шириной, равной смоченному периметру [1]. В работе [2] показано, что на основе использования этого постулата можно рассчитать распределение местных осредненных скоростей в сечении. Разумеется, что постулат носит приближенный характер, так как не отражает полностью сложные процессы, которые имеют место в потоке жидкости.

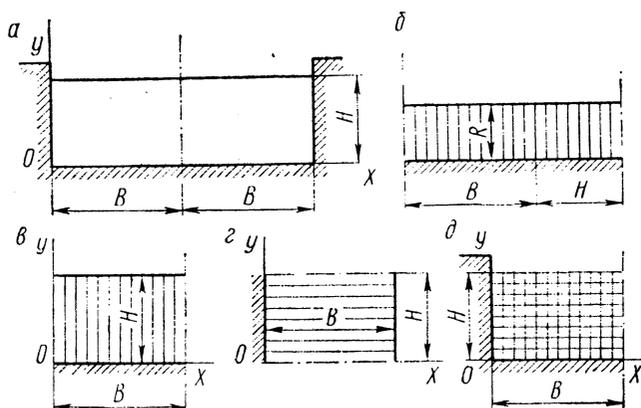


Рис. 1. Расположение осей координат и представление равномерного потока как двух плоских.

Однако некоторый опыт расчетов распределения осредненных скоростей в различных по форме сечениях дает основания полагать, что он может быть приемлем, по крайней мере, в первом приближении при расчете распределения продольных осредненных скоростей.

В данной статье на основе работ [2, 4] дается вывод формулы распределения скоростей в однородных по длине прямолинейных потоках ограниченной ширины применительно к прямоугольному сечению. Приводится сравнение результатов расчетов по полученной формуле с экспериментальными данными Базена [8] и автора.

В принятых обозначениях (рис. 1)

$$R = \frac{2BH}{2B + 2H} = \frac{BH}{B + H}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{B+H}{BH} = \frac{B}{BH} + \frac{H}{BH} = \frac{1}{H} + \frac{1}{B}. \quad (1)$$

В левой стороне тождества (1) стоит  $\frac{1}{R}$  — величина, обратная гидравлическому радиусу и глубине аксиоматического плоского потока (рис. 1, а, б). В правой стороне тождества в числителе стоит  $B+H$  — половина смоченного периметра, в знаменателе  $BH$  — половина площади сечения. По аналогии с левой частью тождества величины  $\frac{B}{BH} = \frac{1}{H}$  и  $\frac{H}{BH} = \frac{1}{B}$  можно толковать, как величины, обратные значениям гидравлических радиусов или глубин плоских потоков [2], соответственно вертикального плоского (смоченный периметр  $B$ , гидравлический радиус  $H$ ; рис. 1, в) и горизонтального плоского (смоченный периметр  $H$  и гидравлический радиус  $B$ ; рис. 1, г). Тогда упомянутый постулат гидравлики можно сформулировать и так: каждый равномерный поток равнозначен сумме двух плоских потоков — вертикального плоского с глубиной, равной  $H$ , и шириной, равной  $B$ , и горизонтального плоского с глубиной, равной  $B$ , и шириной, равной  $H$ . Отметим, что площади всех аксиоматических потоков равны.

Исследования И. К. Никитина [4—7] показали, что в различных областях сопротивлений и во всем диапазоне проявления шероховатости для плоского потока формулу, связывающую глубину потока с коэффициентом сопротивления  $\lambda$ , можно представить в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = D_1 \lg \frac{R}{\delta} + E_1,$$

где  $\delta$  — толщина пристенного подслоя;  $D_1, E_1$  — постоянные, в первом приближении равные  $D_1=4,85; E_1=4,00$ .\*

Формулы для определения  $v_{cp}$  можно представить в виде

$$v_{cp} = v_* \sqrt{2} \left( D_1 \lg \frac{R}{\delta} + E_1 \right),$$

с другой стороны,

$$v_{cp} = \frac{\int_0^{\omega} v_m d\omega}{\omega}.$$

Преобразуем первое выражение для  $v_{cp}$ :

\* Отметим, что, по нашему мнению,  $D_1=4,6$  в формулах И. К. Никитина возникло в результате неточного считывания с графика функции  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = f\left(\lg \frac{R}{\delta}\right)$  тангенса угла наклона прямой. Поэтому на основании этих же графиков И. К. Никитина [4, 6, 7] в дальнейшем принимаем  $D_1=4,85$ .

$$v_{cp} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{Ri} \left( D_1 \lg \frac{R}{\delta} + E_1 \right) = \sqrt{Ri} \left( \sqrt{2g} D_1 \times \right. \\ \left. \times 0,434 \ln \frac{R}{\delta} + \sqrt{2g} E_1 \right).$$

Обозначив  $D = 0,434\sqrt{2g}D_1$ ,  $E = \sqrt{2g}E_1 - D \ln \delta$ , получим

$$v_{cp} = \sqrt{Ri} (D \ln R + E \ln e)$$

или

$$v_{cp} = \sqrt{Ri} \ln R^D e^E.$$

Дальнейший вывод сделаем для случая, когда  $\delta \ll R$ . Когда  $\delta$  сравнимо с  $R$ , приведем только окончательный результат.

Когда  $\delta \ll R$ , можно записать

$$\frac{\int_0^\omega v_M d\omega}{\omega} = \sqrt{Ri} \ln R^D e^E$$

или

$$R = e^{\frac{\int_0^\omega v_M d\omega}{D\sqrt{Ri}\omega} - \frac{E}{D}}.$$

Аналогично для вертикального и горизонтального плоских потоков получим:

$$H = e^{\frac{\int_0^\omega v_{M,B} d\omega}{D\omega\sqrt{Hi}} - \frac{E_B}{D}},$$

$$B = e^{\frac{\int_0^\omega v_{M,\Gamma} d\omega}{D\omega\sqrt{Bi}} - \frac{E_\Gamma}{D}}.$$

Здесь и далее индексы «в» и «г» обозначают, что соответствующие величины относятся, соответственно, к вертикальному и горизонтальному плоскому потоку.

Подставляя вместо  $R$ ,  $H$  и  $B$  их значения в (1), получаем

$$\frac{1}{e^{\frac{\int_0^\omega v_M d\omega}{D\omega\sqrt{Ri}} - \frac{E}{D}}} = \frac{1}{e^{\frac{\int_0^\omega v_{M,B} d\omega}{D\omega\sqrt{Hi}} - \frac{E_B}{D}}} + \frac{1}{e^{\frac{\int_0^\omega v_{M,\Gamma} d\omega}{D\omega\sqrt{Bi}} - \frac{E_\Gamma}{D}}}. \quad (2)$$

Каждое слагаемое в выражении (2) является функцией области  $\omega$ . При этом интегралы, входящие в выражение (2), также будут функциями от области  $\omega$ , при этом функциями аддитивными.

Выполнив дифференцирование выражения (2) по  $\omega$ , получим соотношение между  $v_m$ ,  $v_{m,в}$ ,  $v_{m,г}$ , т. е. отношение, связывающее местную осредненную скорость в потоке с местными осредненными скоростями аксиоматических плоских потоков.

Вычислим предварительно

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = e \frac{\int_0^{\omega} v_m d\omega}{D \sqrt{Ri \omega}} - \frac{E}{D} \times$$

$$\times \left[ \frac{v_m D \sqrt{Ri \omega} - D \sqrt{Ri} \int_0^{\omega} v_m d\omega - D \sqrt{i} \int_0^{\omega} v_m d\omega \frac{1}{2\sqrt{R}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}}{(D \sqrt{Ri \omega})^2} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial E}{\partial \omega} \right]. \quad (3)$$

Производную  $\frac{\partial E}{\partial \omega} = -D \frac{\partial \ln \delta}{\partial \omega}$  можно определить следующим образом. Для области с полным проявлением шероховатости [7]  $\lg \frac{u_{*,0} \Delta}{v}$  не зависит от  $\lg \frac{\Delta}{\delta}$ , значит,  $\frac{\partial E}{\partial \omega} = 0$ .

Для переходной области можно записать [7]:

$$\ln \frac{\Delta}{\delta} = \ln \frac{u_{*,0} \Delta}{v} - C,$$

где  $C$  — постоянная. Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} = -D \frac{\partial \ln \delta}{\partial \omega} = \frac{D}{2R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

Выполнив преобразование (3), получим

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{2R(v_m - v_{cp})}{\omega(kD\sqrt{Ri} + v_{cp})},$$

где  $k=2$  — для области с полным проявлением шероховатости;  $k=3$  — для переходной области.

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{2H(v_{m,в} - v_{cp,в})}{\omega(kD\sqrt{Hi} + v_{cp,в})},$$

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{2B(v_{м.г} - v_{ср.г})}{\omega(kD\sqrt{Bi} + v_{ср.г})}.$$

Для потоков, когда  $\delta$  сравнимо с  $R$ :

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{2R}{\omega} \cdot \frac{(v_m - v_{ср})}{\left[ k \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) D\sqrt{Ri} + \frac{R + \delta}{R - \delta} v_{ср} \right]}. \quad (4)$$

Производные  $\frac{\partial H}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial \omega}$  имеют аналогичный вид.

Продифференцировав (2) по  $\omega$ , найдем

$$\frac{2R(v_m - v_{ср})}{R^2\omega(kD\sqrt{Ri} + v_{ср})} = \frac{2H(v_{м.в} - v_{ср.в})}{H^2\omega(kD\sqrt{Hi} + v_{ср.в})} + \frac{2B(v_{м.г} - v_{ср.г})}{B^2\omega(kD\sqrt{Bi} + v_{ср.г})}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$v_m = \frac{R(kD\sqrt{Ri} + v_{ср})}{H(kD\sqrt{Hi} + v_{ср.в})} (v_{м.в} - v_{ср.в}) + \frac{R(kD\sqrt{Ri} + v_{ср})}{B(kD\sqrt{Bi} + v_{ср.г})} \times \\ \times (v_{м.г} - v_{ср.г}) + v_{ср}.$$

Представим значения  $v_{ср}$  и  $v_*$  (для  $v_{ср.в}$ ,  $v_{*в}$ ,  $v_{ср.г}$ ,  $v_{*г}$  формулы аналогичные) в виде

$$v_{ср} = v_* \left( 6,86 \lg \frac{R}{\delta} + 5,66 \right), \\ v_* = \sqrt{gRi}.$$

После преобразований приходим к следующей формуле:

$$v_m = \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{H^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{H}{\delta_b} \right)} (v_{м.в} - v_{ср.в}) + \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{B^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{B}{\delta_r} \right)} \times \\ \times (v_{м.г} - v_{ср.г}) + v_{ср}, \quad (5)$$

где  $F$  — постоянная, которая для области с полным проявлением шероховатости равна 1,69, для переходной области она равна 2,13.

При выводе зависимости (5) не используется непосредственно распределение осредненных скоростей в плоских потоках, поэтому для распределения скоростей в плоском потоке можно применять существующие зависимости. Воспользуемся формулой, предложенной И. К. Никитиным [4]:

$$v_{м.в} = v_{*в} \left( 6,86 \lg \frac{y}{\delta_b} + 8,64 - 2,98 \frac{\delta_b}{y} \right),$$

$$v_{м.г} = v_{*г} \left( 6,86 \lg \frac{x}{\delta_r} + 8,64 - 2,98 \frac{\delta_r}{x} \right).$$

Удобно ввести обозначения

$$L = 2,98L_H = 2,98 \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{H^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{H}{\delta_b} \right)},$$

$$M = 2,98M_B = 2,98 \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{B^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{B}{\delta_r} \right)},$$
(6)

где параметры  $L_H$  и  $M_B$  имеют смысл весовых функций влияния на местную осредненную скорость соответственно дна и стенок потока.

После подстановки в (5) значений  $v_{м.в}$  и  $v_{м.г}$ ,  $v_{ср.в}$  и  $v_{ср.г}$  и алгебраических преобразований получаем формулу для расчета распределения местных осредненных продольных скоростей в однородных по длине прямолинейных потоках прямоугольного поперечного сечения

$$v_m = v_{ср} + Lv_{*в} \left( \ln \frac{ey}{H} - \frac{\delta_b}{y} \right) + Mv_{*г} \left( \ln \frac{ex}{B} - \frac{\delta_r}{x} \right),$$
(7)

где  $\delta_b \leq y \leq H$ ,  $\delta_r \leq x \leq B$ . Начало координат располагается в точке пересечения дна и стенки.

Если  $\delta$  сравнимо с  $R$ , то выражения для  $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial \omega}$  имеют более сложный вид (см. формулу (4)). Это приводит к тому, что параметры  $L_H$  и  $M_B$  в формуле (7) вычисляются по следующим, более сложным, чем в (6), зависимостям:

$$L'_H = \frac{R^{\frac{3}{2}} \left[ 0,434k \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) + \frac{R + \delta}{R - \delta} \left( \lg \frac{R}{\delta} + 0,825 \right) \right]}{H^{\frac{3}{2}} \left[ 0,434k \left( 1 - \frac{\delta_b}{H} \right) + \frac{H + \delta_b}{H - \delta_b} \left( \lg \frac{H}{\delta_b} + 0,825 \right) \right]},$$

$$M'_B = \frac{R^{\frac{3}{2}} \left[ 0,434k \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) + \frac{R + \delta}{R - \delta} \left( \lg \frac{R}{\delta} + 0,825 \right) \right]}{B^{\frac{3}{2}} \left[ 0,434k \left( 1 - \frac{\delta_r}{B} \right) + \frac{B + \delta_r}{B - \delta_r} \left( \lg \frac{B}{\delta_r} + 0,825 \right) \right]}.$$

*Сравним расчетные и экспериментальные данные.* Расчетные данные будем сопоставлять с результатами пяти экспериментов, выполненных

в открытых и закрытых потоках с сопротивлениями, находящимися в переходной области и области с полным проявлением шероховатости. Поскольку эти расчеты несколько сложнее для переходной области, более подробно выполним их для эксперимента, проведенного автором.

Измерение распределения продольных скоростей было выполнено в канале прямоугольного поперечного сечения. Длина канала 100 м, ширина 1,208 м, глубина потока 0,250 м. Канал имел постоянный уклон  $i=0,000313$ . Глубина потока на протяжении всего канала выдерживалась постоянной. Стенки и дно канала выполнены из асбестоцементного плос-

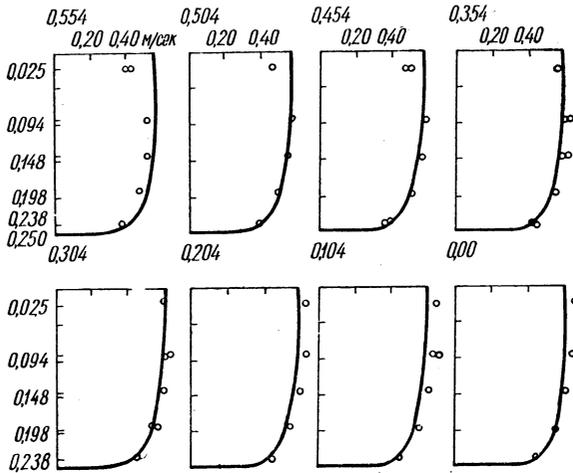


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов по формуле (7) с экспериментальными данными автора.

кого шифера. Температура воды 2°C. Мерный створ находился у середины канала, где не сказывалось влияние входа и выхода, что контролировалось измерением и сравнением продольных скоростей в нескольких створах выше и ниже мерного створа. Измерения производились вертушками [3] с диаметром лопастного винта 20 мм. Перед измерениями микровертушки были протарированы в Каунасском тарировочном бассейне. Результаты измерения продольных скоростей приведены на рис. 2 и представлены точками, результаты расчета — в виде эпюр.

Итак, исходные данные:  $H=0,250$  м;  $B=0,604$  м;  $R=0,177$  м;  $i=0,000313$ ;  $v=0,00000167$  м<sup>2</sup>/сек;  $v_{cp}=0,539$  м/сек.

Для установления параметра шероховатости  $\Delta$  воспользуемся данными, приведенными в работе [7]. Естественно положить, что шероховатость железной бетонной поверхности и асбестоцементного плоского шифера одинакова. Для железных бетонных поверхностей  $\Delta=0,00015$  м.

Вычислим динамические скорости

$$v_* = \sqrt{gRi} = 0,0233 \text{ м/сек}, \quad v_{*B} = \sqrt{gHi} = 0,0277 \text{ м/сек}.$$

$$v_{*r} = \sqrt{gBi} = 0,0430 \text{ м/сек}.$$

Определим

$$\text{Re}_{*,\Delta} = \frac{v_* \Delta}{\nu} = 2,08, \quad \text{Re}_{*,\Delta} = \frac{v_{*B} \Delta}{\nu} = 2,48, \quad \text{Re}_{*,\Delta} = \frac{v_{*r} \Delta}{\nu} = 3,85.$$

По графической зависимости  $\lg \frac{\Delta}{\delta} = f(\lg \text{Re}_{*,\Delta})$  [7] находим

$$\lg \frac{\Delta}{\delta} = -0,511; \quad \lg \frac{\Delta}{\delta_b} = -0,445; \quad \lg \frac{\Delta}{\delta_r} = -0,316.$$

тогда

$$\delta = 0,000486; \quad \delta_b = 0,000418; \quad \delta_r = 0,000311.$$

Вычислим параметры  $L$  и  $M$ . Поскольку  $\delta \ll R$ ,

$$L_H = \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{H^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{H}{\delta_b} \right)} = 0,583,$$

$$M_B = \frac{R^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{R}{\delta} \right)}{B^{\frac{3}{2}} \left( F + \lg \frac{B}{\delta_r} \right)} = 0,137.$$

Подставив полученные значения в (7), найдем

$$v_m = 0,539 + 0,0481 \left( \ln \frac{ey}{0,250} - \frac{0,000418}{y} \right) + 0,0176 \times \\ \times \left( \ln \frac{ex}{0,604} - \frac{0,000311}{x} \right).$$

Выполнен расчет распределения скоростей, найденных по формуле (7) для четырех экспериментов Базена [8]: для двух закрытых и двух открытых потоков прямоугольного сечения. Интересно отметить, что сечение и расход открытых потоков примерно равны половине сечения и расхода закрытых потоков. Поскольку не приведено сколько-нибудь подробных данных о шероховатости материала стенок потоков (кроме того, что материал стенок — доски из тополя), то расчет несколько отличался от предыдущего примера, а именно: определялось  $\delta$  из уравнения для средней скорости. На основании таблиц для коэффициента  $n$  устанавливался аналог для выбора величины  $\Delta$  и находилось  $\text{Re}_{*,\Delta}$ . Оказалось, что рассматриваемые эксперименты относились к области сопротивлений с полным проявлением шероховатости. Тогда можно принять  $\delta = \delta_b = \delta_r$  в отличие от переходной области.

В опытах Базена осредненные скорости измерялись трубкой Пито. Расчетные данные представлены эпюрами на рис. 3, экспериментальные

нанесены в виде точек. Отметим, что на рис. 2, 3 экспериментальные данные в симметричных точках совмещены и отмечены на эпюрах различными точками в случае заметного отклонения в симметричных точках результатов измерения. Так, четыре симметричные точки в закрытом потоке откладывались от одной точки оси ординат на рис. 3.

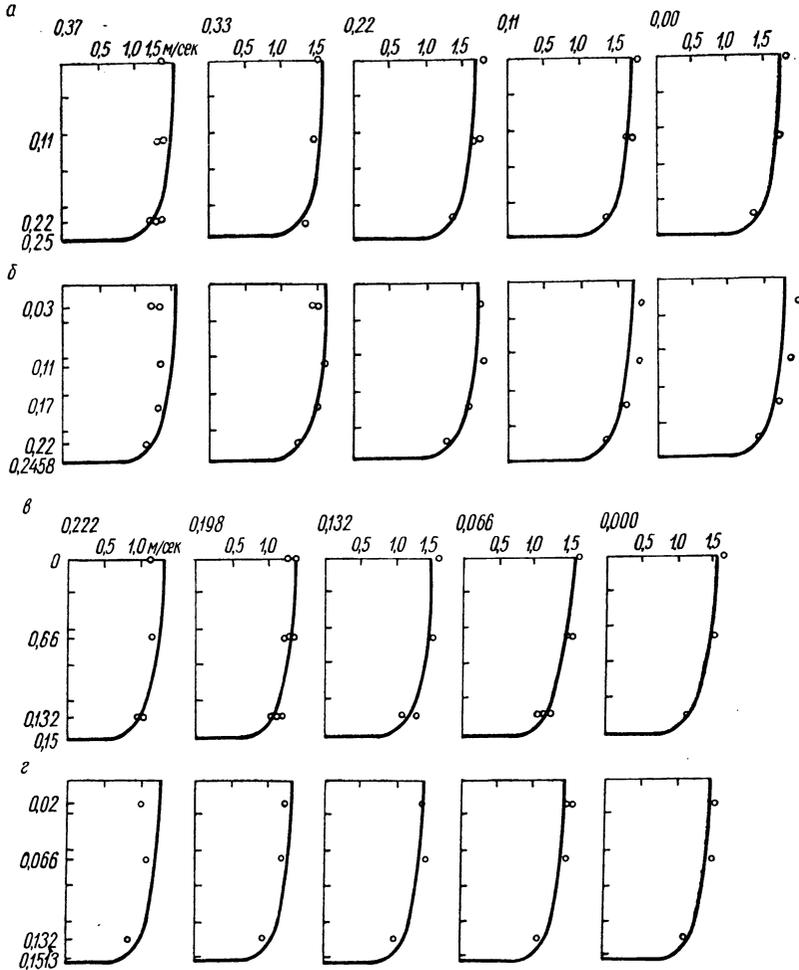


Рис. 3. Сравнение результатов расчетов по формуле (7) с экспериментальными данными Базена;

*a* —  $Q=0,618$  м<sup>3</sup>/сек,  $v_{\text{ср}}=1,545$  м/сек,  $i=0,004272$ ,  $t=8^{\circ}\text{C}$ , сечение прямоугольное, поток закрытый;  $2H=2\cdot 0,25$  м,  $2B=2\cdot 0,40$  м; материал стенок — доски из тополя; серия № 51, табл. № 2. Расчетные данные:  $Lv_{*B}=0,139$ ;  $Mv_{*B}=0,0824$ ;  $\delta = \delta_B = 0,00161$  м;  $\delta Q=0,307$  м<sup>3</sup>/сек;  $v_{\text{ср}}=1,567$  м/сек;  $i=0,004265$ ;  $t=11^{\circ}\text{C}$ . Сечение прямоугольное, поток открытый;  $H=0,246$  м,  $2B=2\cdot 0,40$  м; материал стенок — доски из тополя; серия № 53. Расчетные данные:  $Lv_{*B}=0,139$ ;  $Mv_{*B}=0,0811$ ;  $\delta = \delta_B = 0,00145$  м; *в* —  $Q=0,191$  м<sup>3</sup>/сек,  $v_{\text{ср}}=1,326$  м/сек,  $i=0,006257$ ,  $t=7^{\circ}\text{C}$ . Сечение прямоугольное, поток закрытый,  $2H=2\cdot 0,15$  м,  $2B=2\cdot 0,24$  м; материал стенок — доски из тополя; серия № 52, табл. № 2. Расчетные данные:  $Lv_{*B}=0,146$ ,  $Mv_{*B}=0,0859$ ;  $\delta = \delta_B = 0,00168$  м; *г* —  $Q=0,093$  м<sup>3</sup>/сек,  $v_{\text{ср}}=1,281$  м/сек,  $i=0,0060$ ,  $t=14^{\circ}\text{C}$ . Сечение прямоугольное, поток открытый;  $H=0,1513$  м,  $2B=2\cdot 0,24$  м; материал стенок — доски из тополя; серия № 54. Расчетные данные:  $Lv_{*B}=0,127$ ;  $Mv_{*B}=0,0759$ ;  $\delta = \delta_B = \delta_{\Gamma} = 0,00217$  м.

Из сопоставления расчетных эпюр распределения продольных скоростей представляется возможным сделать некоторые выводы. Совпадение расчетных и экспериментальных данных, особенно у дна, вдали от стенок, можно признать удовлетворительным. Совпадение в закрытых потоках (рис. 3, а, в) лучше, чем в открытых (рис. 3, б, г). Однако следует обратить внимание на отклонение расчетных скоростей от экспериментальных у стенок и особенно вблизи свободной поверхности у них. Второе можно попытаться объяснить тем, что формулы логарифмического типа (вдали от поверхности слагаемое  $\frac{\delta_b}{y}$  мало) не дают хорошего совпадения расчетов с экспериментальными данными вблизи поверхности. Отклонение расчетных продольных скоростей от экспериментальных в областях потока у стенок можно объяснить наличием в потоке поперечных течений, которые не учитывались при расчете.

#### Литература

1. Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков. Л., 1962.
2. Коваленко Э. П. Распределение скоростей в равномерном потоке жидкости. «Инж.-физ. журн.», 1961, № 4.
3. Нероненя Л. С., Рогуневич В. П. Малогабаритная вертушка. «Гидротехника и мелiorация», 1968, № 7.
4. Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. Киев, 1963.
5. Никитин И. К. Обобщенные зависимости для расчета стабилизированных турбулентных течений по двухслойной схеме. Сб. «Исследование однородных и взвесенесущих турбулентных потоков». Киев, 1967.
6. Никитин И. К., Нищук В. С., Марченко А. Г. Некоторые особенности течения жидкости вблизи гладкой стенки. Сб. «Исследования однородных и взвесенесущих турбулентных потоков». Киев, 1967.
7. Никитин И. К. «Турбулентные течения со сдвигом в задачах гидротехники». Автореф. дисс. на соискание уч. степ. докт. техн. наук. Л., 1968.
8. Bazin M. Recherches experimentales sur l'ecoulement de l'eau. „Memoires a l'Academie des sciences“. Tome dix-neuvieme. Paris, 1865.