

П. А. Великевич, Э. П. Коваленко

ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ ТЕЧЕНИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ РУСЛАХ

Расчет плана течений руслового потока с небольшим отношением радиуса поворота к ширине русла $\left(\lambda = \frac{r_{\text{ср}}}{b}\right)$ для случая установившегося плавно изменяющегося движения воды с помощью ЭВМ сопряжен с рядом трудностей, связанных с выбором расчетной схемы и ее устойчивостью.

На участке поворота происходит перераспределение продольных скоростей, максимум которых в начале поворота расположен вблизи выпуклой стенки, а в конце — у вогнутой стенки русла [2]. Прямолинейные участки русла, на которых наблюдается перераспределение продольных скоростей, имеют длину порядка $40 H$ и более [2, 3].

В случае изолированного поворота створы, в которых может иметь место равномерное или близкое к нему движение, устанавливаются на некотором расстоянии $\Delta s_{\text{нач}}$ от входного и выходного створов криволинейного участка русла. Наибольшее перераспределение расходов в пределах поворота наблюдается вблизи входа и выхода с криволинейной части русла; в средней части может иметь место движение, близкое к установившемуся для криволинейного русла [2].

Для построения планов течений в криволинейных руслах рассмотрим краевую задачу для системы гиперболических уравнений [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{r \partial \theta} &= z_{\theta} - \frac{1}{g} \cdot \frac{du_{\theta}}{dt} - \frac{uu_{\theta}}{K_H^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial r} &= z_r - \frac{1}{g} \cdot \frac{du_r}{dt} - \frac{uu_r}{K_H^2}, \\ \frac{\partial(u_{\theta} H)}{r d\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial(u_r H)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Краевые условия задаются в поперечных створах, расположенных на участках подхода к входу и выходу из поворота русла:

$$\left. \begin{aligned} u_{\theta} \Big|_{L=1}^{L=n+1} &= f(r); \quad u_r \Big|_{L=1}^{L=n+1} = \psi(r); \\ H_r \Big|_{L=1}^{L=n+1} &= \chi(r); \\ u_r |_{r=r_0} = f_1(\theta) &= 0; \quad u_r |_{r=r_0+b} = f_2(\theta) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где u_0 — средняя продольная скорость на вертикали; H — глубина; t — время; u_r — средняя поперечная скорость на вертикали; u — вектор скорости на вертикали; z_0, z_r — продольный и поперечный уклоны дна русла; K_H — модуль скорости [1]; Θ — угол поворота (рис. 1).

Рассмотрим аппроксимирующую (1) конечно-разностную систему, при построении ее используем расчетную схему (см. рис. 1), в которой

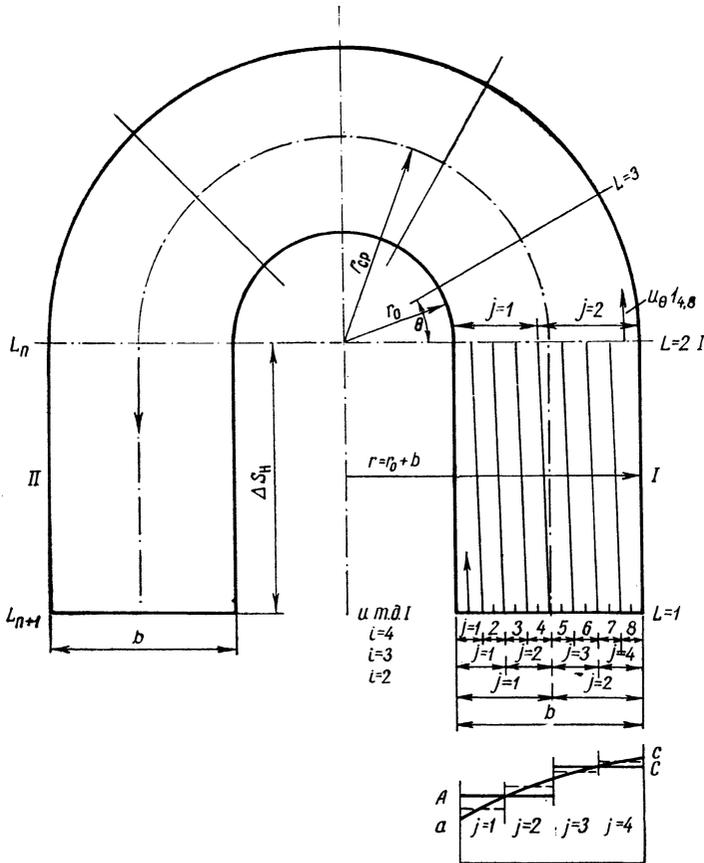


Рис. 1. Расчетная схема способа расчленения потока на струи: L_n, L_{n+1} — створы с заданным распределением продольных скоростей и глубин потока.

в соответствии с краевыми условиями (2) представим транзитный расход $Q = q_{21} + q_{22}$, причем $q_{21} = q_{22}$ при $j=2$ и т. д., и установим ширину транзитных струй*

$$\Delta r_{i,j} = \frac{q_{i,j}^*}{H_{i,j} u_{0i,j}}, \quad \Delta r_{i,j+1} = \frac{q_{i,j+1}^*}{H_{i,j+1} u_{0i,j+1}},$$

где $\Delta r_{i,j}; \Delta r_{i,j+1}$ — ширина транзитных струй; $H_{i,j}, H_{i,j+1}$ — средние глубины в пределах соответственно $\Delta r_{i,j}$ и $\Delta r_{i,j+1}$.

* При использовании членов матрицы в уравнениях при переходах от i к $i+1$ и обратно необходимо учитывать, что номер элемента строки j должен браться из предыдущей струи, которая обозначена через j^* (рис. 1, табл. 1).

Будем рассматривать движение вдоль траектории j , $j+1$ и т. д. Заменяя производные по r разностными отношениями в створе $\alpha=2$ (с $Q=Q_0$) и считая $\Delta S_{i,j} = \Delta S_{i,j+1} = \dots = \Delta S_H$, представим аппроксимирующую конечно-разностную систему (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{0i,j} + u_0 l_{i,j}}{2g} - \frac{u_0 l_{i,j} - u_{0i,j}}{\Delta S_{ij}} + \frac{(u_{0i,j} + u_0 l_{i,j})^2}{4K_{H \text{ ср } ij}^2} + \\ & + \frac{H l_{ij} - H_{ij}}{\Delta S_{ij}} - z_{0ij} = 0, \\ & \frac{u_{0i,j+1} + u_0 l_{i,j+1}}{2g} - \frac{u_0 l_{i,j+1} - u_{0i,j+1}}{\Delta S_{i,j+1}} + \frac{(u_{0i,j+1} + u_0 l_{i,j+1})^2}{4K_{H \text{ ср } i,j+1}^2} + \\ & + \frac{H l_{i,j+1} - H_{i,j+1}}{\Delta S_{i,j+1}} - z_{0i,j+1} = 0, \\ & \frac{u_0^2 l_{ij}}{r_{ij}^*} \Delta r_{1bj} + \frac{u_0^2 l_{i,j+1}}{r_{i,j+1}^*} \Delta r_{i,j+1} - 2g(H_{i,j+1} - H l_{i,j}) = 0, \\ & u_0 l_{bj} H l_{bj} \Delta r_{1bj} = u_{0i,j} H_{ij} \Delta r_{bj} = q_{ij}, \\ & u_0 l_{i,j+1} H l_{i,j+1} \Delta r_{i,j+1} = u_{0i,j+1} H_{i,j+1} \Delta r_{i,j+1} = q_{i,j+1}, \end{aligned} \right\} (3)$$

где $r_{ij}^* = r_0 + \sum_{j=1}^{j-1} \Delta r_{1i,j} + \frac{\Delta r_{1ij}}{2}$ — расстояние от центра поворота до сред-

ней точки рассматриваемой струи с q_{ij} ; $r_{i,j+1}^* = r_0 + \sum_{j=1}^1 \Delta r_{1bj} + \frac{\Delta r_{1i,j+1}}{2}$ —

то же для средней точки струи с $q_{i,j+1}$; u_0 , H , Δr — значения названных переменных в последующем створе.

Учитывая краевые условия (2), находим $\Delta r_{1i,j+1} = \Delta r_{i-1,j^*} - \Delta r_{1ij}$.

Для поворотов русла с небольшим отношением λ система (3) достаточно близко соответствует системе (1). Полученная нелинейная система (3) при $L=1$ будет содержать следующие неизвестные: $u_0 l_{i,j}$, $u_0 l_{i,j+1}$, $H l_{i,j}$, $H l_{i,j+1}$, $\Delta r_{1i,j}$, которые определим, решая систему (3).

Аналогично, продолжая процесс деления струи потока из предыдущего решения на две новые струи, получим последующее решение. В результате общий транзитный поток будет разделен на струи

$$q_{i-1,j} = q_{i,j^*} + q_{i,j^*+1}, \quad q_{i-1,j+1} = q_{i,j^*+2} + q_{i,j^*+3}.$$

В пределах каждой струи будут известны средние значения u_0 , H , Δr в створе $L=2$ (см. рис. 1). Продолжая процесс деления и производя соответствующие решения системы (3), можно приблизить ломаную $A-C$ к кривой $a-c$ с заданной степенью точности.

Если начальные условия заданы в створе L_{n+1} , то процесс будет обратным рассмотренному.

Метод решения системы (3) может быть следующим.

Так как на участке от створа $L=1$ до створа $L=2$ ($\Theta=0$) скорости возрастают у выпуклого берега, то в направлении к выпуклому берегу

скорость в точке j можно представить в виде $u_0 1_{ij} = u_{0ij} + \Delta u$, где Δu задается с учетом точности расчетов скоростного поля. Тогда в первом приближении при заданном $u_0 1_{ij}$ получим

$$H 1_{i,j} = \Delta S_{i,j} \left\{ \frac{H_{i,j}}{\Delta S_{i,j}} - \frac{(u_0 1_{i,j} + u_{0i,j})^2}{4K_{H\text{cp}}^2} + z_{0i,j} + \frac{u_{0i,j}^2 - u_0^2 1_{i,j}}{2g\Delta S_{i,j}} \right\}. \quad (4)$$

В выражении (4) параметр, характеризующий сопротивление K_H , определяется по H_{cp} в створе $L=1$ и $L=2$ [1]. Подставляя $u_0 1_{i,j}$ и $H 1_{i,j}$ в четвертое уравнение системы (3), получаем

$$\Delta r 1_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{u_0 1_{i,j} H 1_{i,j}}. \quad (5)$$

При этом значение $\Delta r 1_{i,j+1}$ определяется из выражения

$$\Delta r 1_{i,j+1} = \Delta r 1_{i-1,j} - \Delta r 1_{i,j}. \quad (6)$$

В первом приближении при $i=2$ находим

$$\Delta r 1_{22} = \Delta r 1_{11} - \Delta r 1_{21},$$

где $\Delta r 1_{11} = b$, т. е. при последующих делениях струи на частные струи вместо b берется значение $\Delta r 1$ для предыдущей общей струи.

Найдем из (5) $H_{i,j+1}$:

$$H 1_{i,j+1} = \frac{q_{i,j+1}}{\Delta r 1_{i,j+1}} \cdot \frac{1}{u_0 1_{i,j+1}}. \quad (7)$$

При известных $\Delta r_{i,j}$ и $\Delta r 1_{i,j+1}$ определим

$$r_{ij}^* = r_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta r 1_{i,j} + \frac{\Delta r 1_{i,j}}{2}, \quad (8)$$

$$r_{i,j+1}^* = r_0 + \sum_{j=1}^i \Delta r 1_{i,j} + \frac{\Delta r 1_{i,j+1}}{2}. \quad (8')$$

Подставляя известные значения $u_0 1_{i,j}$, $H 1_{i,j}$, $\Delta r 1_{i,j+1}$, $r_{i,j}^*$, $\Delta r 1_{i,j+1}$, $r_{i,j+1}^*$ в уравнение (3), получаем

$$B u_0^3 1_{i,j+1} + D u_0 1_{i,j+1} - E = 0, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{u_0^2 1_{i,j}}{r_{i,j}^*} \Delta r_{i,j} + 2gH 1_{i,j}; & B &= \frac{\Delta r 1_{i,j+1}}{r_{i,j+1}^*}; \\ E &= 2g \frac{q_{i,j+1}}{\Delta r_{i,j+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\Delta f = \frac{u_{0i,j+1}^2 - u_{0i,j}^2}{2g\Delta S_{i,j+1}} + z_{0i,j+1} - \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta S_{i,j+1}} - \frac{(u_{0i,j+1} + u_{0i,j})^2}{4K_{H\text{ ср } i,j+1}^2} \quad (11)$$

Если $\Delta f=0$, то найденные значения есть решение системы (3), в противном случае выполняется следующее приближение с $u_{0i,j} = u_{0i,j} + 2\Delta u$ и т. д. до $\Delta f=0$ или изменения знака при Δf .

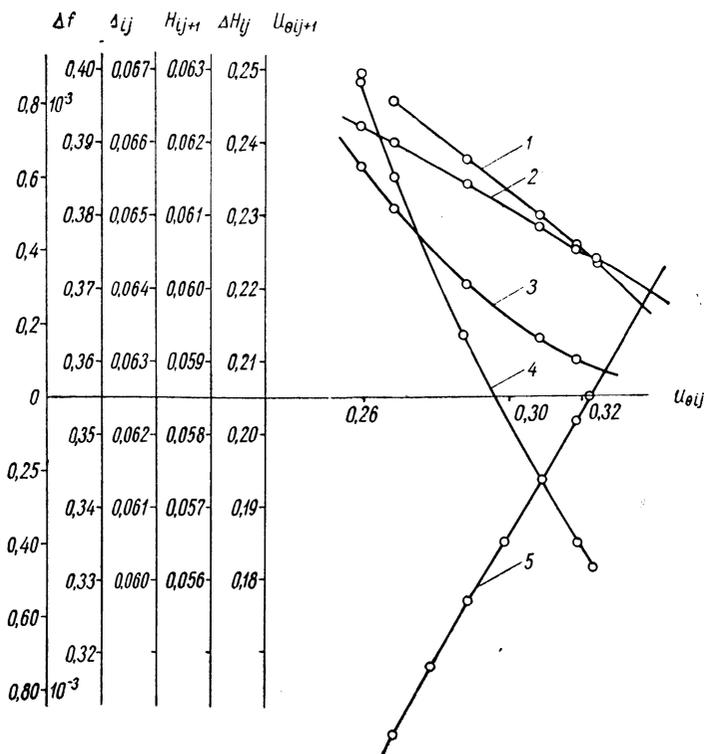


Рис. 3. Графики связи координат решения с $u_0 1_{i,j}$:
 1 - $H_{i,j} = f_1(u_0 1_{i,j})$; 2 - $H_{i,j+1} = f_2(u_0 1_{i,j})$; 3 - $u_0 1_{i,j+1} = f_3(u_0 1_{i,j})$; 4 - $\Delta H_{i,j} = f_4(u_0 1_{i,j})$; 5 - $\Delta f = f_5(u_0 1_{i,j})$.

Обычно для сокращения количества приближений используется переменный шаг по Δu . График функции $\Delta f = f(u_0 1_{i,j})$ относительно резко возрастает с увеличением $u_0 1_{i,j}$.

Аналогично определяются искомые параметры струй в створе $L=3$ и т. д. до стабилизации их в последующих створах. При этом надо иметь в виду, что в этом случае значения ΔS и z_0 не будут равными для различных струй.

Начиная расчет со створа, расположенного на подходе к повороту, получим распределение продольных скоростей и значения отметок поверхности воды без учета влияния выхода. При решении задачи с начальными условиями в створе $L=n+1$ не учитывается влияние входа.

Таблица 1

$i = 4$			$i = 3$				$i = 2$				$i = 1$			
$u_{\theta 14,j}$	$H 14,j$	$\Delta r 14,j$	j	$u_{\theta 13,j}$	$H 13,j$	$\Delta r 13,j$	j	$u_{\theta 12,j}$	$H 12,j$	$\Delta r 12,j$	j	$\Delta r_{1,1} = b$	$H_{1,1}$	$u_{\theta 1,1}$
0,3652	0,05764	0,07280	1	0,3599	0,05836	0,1519	1	0,3147	0,06037	0,3316	1	0,8	0,063	0,25
0,3251	0,05960	0,07906	2											
0,3032	0,06100	0,08623	3	0,2878	0,06165	0,1798	2							
0,2741	0,06220	0,09355	4											
0,2409	0,06341	0,1040	5	0,2252	0,06376	0,2166	3	0,2087	0,06440	0,4683	2			
0,2203	0,06412	0,1125	6											
0,1962	0,06460	0,1214	7	0,1904	0,06486	0,2518	4							
0,1616	0,06503	0,1303	8											

Таблица 2

 $i = 5$ при $\theta = 0,4\pi$

$u_{\theta 15,j}$	$H 15,j$	$\Delta r 15,j$	$\frac{u_{\theta j}^* - u_{\theta 15,j} \cdot 100}{u_{\theta j}^*}$	$u_{\theta j}^* [2]$	$u_{\theta 15,j}$	$H 15,j$	$\Delta r 15,j$	j
0,2964	0,05955	0,04500	-20,0	0,319	0,3816	0,05690	0,3566	$j-1$
0,2894	0,06043	0,04428	-14,6	0,312	0,3592	0,05807	0,3714	2
0,2929	0,06036	0,04416	-13,2	0,305	0,3453	0,05895	0,3872	3
0,2884	0,06108	0,04475	-9,0	0,299	0,3265	0,05984	0,4034	4
0,2832	0,06118	0,04458	-6,1	0,293	0,3110	0,06065	0,4223	5
0,2809	0,06177	0,04591	-3,5	0,285	0,2952	0,06133	0,4400	6
0,2642	0,06215	0,04711	-2,2	0,276	0,2819	0,06192	0,4584	7
0,2626	0,06262	0,04866	0,0	0,268	0,2586	0,06245	0,4772	8
0,2507	0,06276	0,04814	+4,7	0,260	0,2470	0,06320	0,5098	9
0,2519	0,06375	0,05003	+6,4	0,252	0,2358	0,06360	0,5306	10
0,2300	0,06353	0,05178	+7,0	0,242	0,2246	0,06395	0,5519	11
0,2310	0,06385	0,05376	+7,1	0,231	0,2152	0,06426	0,5735	12
0,2124	0,06407	0,05492	+7,7	0,222	0,2033	0,06452	0,5961	13
0,2133	0,06432	0,05699	+4,9	0,205	0,1953	0,06476	0,6183	14
0,1929	0,06453	0,05889	+1,1	0,186	0,1840	0,06492	0,6405	15
0,1937	0,06474	0,06102	-1,1	0,175	0,1772	0,06511	0,6628	16

Решение задачи с условиями (2) можно получить методом стыковки полученных двух частных решений.

В соответствии с приведенным алгоритмом построена программа для расчета планов течений на ЭВМ «Минск-22». Блок-схема алгоритма приведена для расчета с начальными условиями, заданными в створе $L=1$ (рис. 2). При расчетах на ЭВМ значения ширины струй, средних скоростей и глубин в пределах Δr задаются в виде двумерных массивов (см. рис. 1). Необходимо задать также закон изменения продольных уклонов дна русла и значений ΔS в зависимости от r в пределах криволинейных частей русла. Для этого в пределах поворота намечаются расчетные створы, в которых определяются значения u_0 , H , Δr (см. рис. 1). Используя найденные значения $u_{0i,j}$ и $\Delta r_{i,j}$, находим поперечные скорости $u_{ri,j}$. На прямолинейных участках с известным приближением принимается $\Delta S=40H$, а значение $z_0 = f(\Delta r_{i,j})$.

Приведем пример расчета.

По программе, составленной по представленной блок-схеме, произведены расчеты планов течений для прямоугольного русла, параметры которого и экспериментальное исследование скоростного поля потока описаны в работе [2].

Общая схема расчета приведена на рис. 3, где представлен итерационный процесс при расчете планов течений на примере створа с $\Theta=0$ при $i=2$, $j=2$. Из рис. 3 следует, что график функции $\Delta f = f_5(u_0, l_{i,j})$ близок к линейному. Графики составляющих решения — плавные функции во всем диапазоне $u_0, l_{i,j}$ с положительными значениями $\Delta r_{i,j}$ и $\Delta r_{i,j+1}$.

В табл. 1 и 2 дано сопоставление расчетного и экспериментального полей скоростей для створа $\Theta=0$. Приведено также расчетное поле скоростей для створа $\Theta = \frac{2}{5}\pi$. Как видно, планы решений, построенные по предлагаемому методу, соответствуют экспериментальным данным. Нарушение равномерного движения происходит на большем участке, чем $\Delta S=40H$. Скоростное поле в створе $\Theta=0$ и последующих створах зависит от ΔS . При увеличении ΔS скорость у выпуклой стенки уменьшается. Поэтому при некотором ΔS процент отклонения расчетного поля скоростей от экспериментального не будет превышать 5% для всех струй потока.

Следует заметить, что при разбивке потока на 16 струй с 7 створами по длине, расчет планов течений на ЭЦВМ «Минск-22» занимает 7 мин. машинного времени.

Литература

1. Коваленко Э. П. Исследование движения воды в открытых руслах. Минск, 1963.
2. Розовский И. Л. Движение воды на повороте открытого русла. Киев, 1957.
3. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах М., 1936.