

И. М. Лившиц

## РАСЧЕТ КРИВЫХ СУММАРНОГО СТОКА

Кривая суммарного стока (интегральная кривая использования стока) представляет собой интеграл кривой обеспеченности суточных расходов и выражает площадь ее (или гидрографа) до данного расхода

$$W(Q) = \int_0^Q T dQ. \quad (1)$$

На рис. 1 показана схема соотношений между тремя указанными гидрологическими характеристиками. На кривой суммарного стока любая абсцисса показывает величину объема стока, который можно использовать в течение года при данном расчетном расходе.

Кривую суммарного стока, как и кривую обеспеченности суточных расходов, более удобно выражать в безразмерных величинах. Для этого ординаты кривой выражаем в долях среднего годового расхода, а абсциссы — в долях объема стока за год. В связи с этим

$$\varphi(k) = \int_0^k p dk \leq 1,0. \quad (2)$$

Кривая суммарного стока и кривая обеспеченности суточных расходов используются в водохозяйственных расчетах при проектировании гидроустановок на естественном стоке [1, 3, 4, 8, 16, 23].

Для рек с незначительными по величине летне-осенними паводками кривая обеспеченности суточных расходов и кривая суммарного стока применяются и при расчетах сезонного регулирования на постоянную отдачу.

Если имеются данные гидрологических наблюдений, вопрос о расчете и построении кривых суммарного стока решается просто. Для этого используются способы графического интегрирования или формулы численных квадратур.

При отсутствии данных непосредственных наблюдений задача решается с помощью аналитических выражений кривой суммарного стока [1, 2, 7, 15, 22, 24].

В большинстве аналитические выражения получены путем интегрирования уравнения кривой обеспеченности суточных расходов. Входящие в них значения характерных модульных коэффициентов и параметров могут определяться косвенными методами на основе физико-географических характеристик бассейна (эмпирические формулы или физические аналогии).

Построение кривых по фактическим данным. Учитывая особенности процесса графического интегрирования, при значительной амплитуде  $k$ , В. Г. Андреев разработал простой способ построения суммарной кривой стока по кривой обеспеченности суточных расходов [2].

Нами проведены исследования способов графического интегрирования применительно к построению кривой суммарного стока для разных типов рек\*, позволившие установить рациональность применения метода интегрирования, разработанного В. Г. Побединским [6], так как он является достаточно простым по технике расчета и наиболее точным.

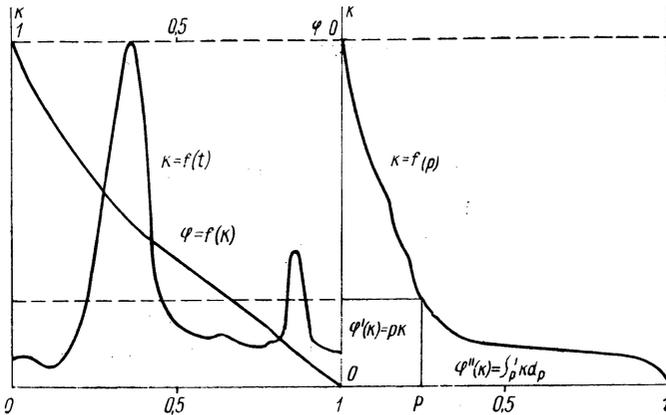


Рис. 1. Схема соотношений между гидрографом  $k=f(t)$ , кривой обеспеченности суточных расходов  $k=f(p)$  и суммарной кривой  $\varphi=f(k)$  стока.

Несколько ниже оказалась точность графического интегрирования, выполняемого с помощью треугольника Тэра и интегрантугольника Наатца и Блохмана [5, 25]. Однако применение этих вспомогательных приборов, основанных на способах хорд и касательных, является рациональным при массовом построении суммарных кривых, так как они дают ощутимую экономию во времени.

Общим недостатком графических методов является то, что при значительной неурегулированности режима (при большой амплитуде модульных коэффициентов) они дают большие погрешности, связанные с масштабами графиков и малым количеством опорных точек (неопределенность кривизны верхней ветви кривой обеспеченности суточных расходов).

Расчет кривой суммарного стока методом численных квадратур (на основании кривой обеспеченности суточных расходов) разработан Г. А. Алексеевым [1]. Процесс интегрирования сводится автором к определению двух площадей (см. рис. 1):

$$\varphi(k) = \int_0^k p dk = pk + \int_p^k k dp. \quad (3)$$

\* В исследованиях принимали участие студенты БПИ Н. П. Артемьева и Ю. А. Солитерман.

Учитывая, что публикуемые данные соответствуют семи ординатам кривой обеспеченности ( $k_1$ ;  $k_{30}$ ;  $k_{90}$ ;  $k_{180}$ ;  $k_{270}$ ;  $k_{355}$ ;  $k_{365}$ ), Г. А. Алексеев разработал формулы для подсчета абсцисс суммарной кривой.

В зависимости от характера различных участков кривой обеспеченности суточных расходов им применены формулы: механических квадратур, трапеции, Симпсона, а также формулы, полученные интегрированием параболы второй степени при аргументе  $x \approx \lg p$ . В результате получено десять рекуррентных формул для подсчета абсцисс суммарной кривой стока по характерным модульным коэффициентам (ординатам). Формулы довольно громоздки, но процесс вычисления по ним прост. Проверка формул на фактическом материале по рекам Белоруссии показала достаточно хорошее приближение вычисленных абсцисс к фактическим.

Кривые обеспеченности суточных расходов имеют монотонный характер, и нами для определения частных площадей различных участков кривых применялся метод численных квадратур Чебышева. Проведенные исследования показали рациональность применения этого простого и практически точного метода вычисления определенных интегралов.

Схема расчленения площади кривой обеспеченности на части показана на рис. 2.

Для механизации процессов вычисления частных площадей кривой обеспеченности могут быть с успехом применены простейшие интеграторы ПИ-1 и ПИ-2, сконструированные И. М. Лившицем и Н. А. Юркштовичем [14, 17, 18]. В основу конструкции простейшего интегратора ПИ-1 положен принцип численных квадратур Чебышева. Такой интегратор может применяться для двух, трех, четырех и пяти «расчетных точек» кривой.

Простейший интегратор ПИ-2 является комбинированным прибором. В основу его положен принцип приближенного вычисления определенных интегралов как по Чебышеву, так и по Гауссу. Кроме того, две добавочные шкалы позволяют использовать прибор для построения интегральных кривых при переменном верхнем пределе (использован принцип Наатца и Блохмана).

Указанные приборы применялись нами наряду с другими средства-

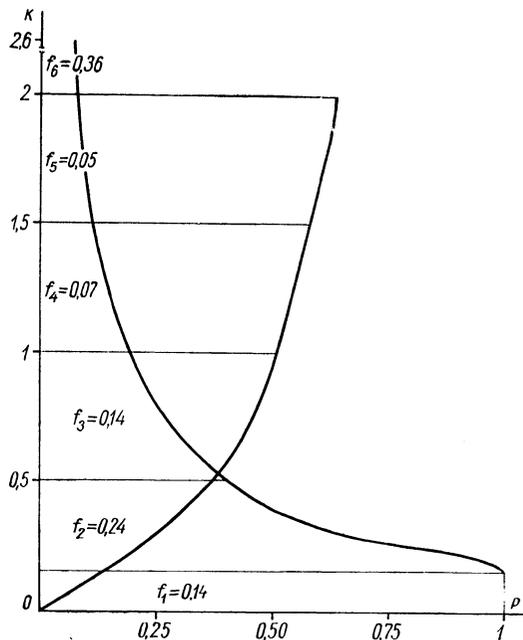


Рис. 2. Кривые обеспеченности суточных расходов и суммарного стока р. Днепр у п. Смоленск:

$f_1$  — по формуле прямоугольника;  $f_2, f_3, f_4$  — по формуле Чебышева для криволинейных трапеций при пяти ординатах;  $f_5$  — по Чебышеву при двух ординатах;  $f_6$  — по формуле треугольника.

ми для построения и проверки кривых суммарного стока рек Белорусской ССР.

*Аналитическое выражение кривой суммарного стока.* Основным методом установления уравнения кривой суммарного стока является интегрирование уравнения кривой обеспеченности суточных расходов [1, 2, 15, 22, 24].

Нами выражение кривой суммарного стока получено также на основе интегрирования уравнения кривой обеспеченности суточных расходов.

Исходным явилось уравнение, предложенное Г. Грассбергером на основе использования принципа Г. Т. Фехнера (логарифмического преобразования переменной) и применения многочлена Чебышева—Брунса [10, 11]. В это уравнение нами внесена поправка, и для расчета кривой обеспеченности составлены вспомогательные таблицы [12].

Уравнение кривой обеспеченности имеет вид

$$p(k) = 0,5[1 - \Phi(\varepsilon) - \gamma\Phi_3(\varepsilon)]. \quad (4)$$

Кривая суммарного стока может быть выражена интегралом

$$q(k) = \int_0^k p dk = 0,5 \int_0^k [1 - \Phi(\varepsilon) - \gamma\Phi_3(\varepsilon)] dk, \quad (5)$$

где  $k$  — переменный модульный коэффициент;  $k_d$  — его модальное значение,

$$k_d = \sqrt{k_{0,16} \cdot k_{0,84}}; \quad (6)$$

$h$  — мера его изменчивости,

$$h = \frac{2}{\lg \frac{k_{0,16}}{k_{0,84}}}; \quad (7)$$

$\alpha$  — мера скошенности кривой,

$$\alpha = h \lg \frac{k_d}{k_{0,5}}, \quad (8)$$

где  $k_{0,16}$ ,  $k_{0,50}$ ,  $k_{0,84}$  — модульные коэффициенты, вероятность превышения которых 0,16, 0,50 и 0,84 долей годового периода;  
 $\gamma$  — коэффициент, зависящий от  $\alpha$ ,

$$\gamma = \frac{\Phi(\alpha)}{\Phi_3(\alpha)};$$

$\varepsilon$  — аргумент уравнения (4),

$$\varepsilon = h \lg \frac{k}{k_d} = h \lg \frac{k}{k_{0,5}} - \alpha; \quad (9)$$

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varepsilon e^{-s^2} ds; \quad (10)$$

$$\Phi_3(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} (4\varepsilon^2 - 2); \quad (11)$$

$\Phi_3(\varepsilon)$  является третьей производной от  $\Phi(\varepsilon)$ .

Уравнение (9) может быть представлено в виде

$$k = k_{0,5} 10^{\frac{\varepsilon+\alpha}{h}} = k_{0,5} e^{\frac{\varepsilon}{h} \ln 10} e^{\frac{\alpha}{h} \ln 10}, \quad (12)$$

откуда

$$dk = k_{0,5} 10^{\frac{\varepsilon+\alpha}{h}} \frac{1}{h} \ln 10 d\varepsilon \quad (13)$$

или

$$dk = k_{0,5} e^{\frac{\ln 10}{h} (\varepsilon+\alpha)} \cdot \frac{\ln 10}{h} d\varepsilon. \quad (13')$$

Новые пределы интегрирования находим, используя формулу (9).

Подставляя в выражение (5) найденное значение  $dk$  и новые пределы интегрирования, получим

$$\varphi(k) = 0,5 \frac{k_{0,5}}{h} \ln 10 e^{\frac{\alpha \ln 10}{h}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\frac{\varepsilon \ln 10}{h}} [1 - \Phi(\varepsilon) - \gamma \Phi_3(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (5')$$

Обозначим

$$\frac{\ln 10}{h} = \beta,$$

$$0,5 \frac{k_{0,5}}{h} \ln 10 e^{\frac{\alpha \ln 10}{h}} = M.$$

Величины  $\beta$  и  $M$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Уравнение (5') примет вид

$$\varphi(k) = M \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} [1 - \Phi(\varepsilon) - \gamma \Phi_3(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (5'')$$

Выражение (5'') представляет собой сумму трех интегралов. Первый интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{\beta} e^{\beta \varepsilon_1}. \quad (14)$$

Второй интеграл

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon) d e^{\beta \varepsilon}. \quad (15)$$

Этот интеграл вычисляем методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} - \\
 &- \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{\beta^2}{4}} d\varepsilon = \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} - \frac{e^{\frac{\beta^2}{4}}}{\beta} \times \\
 &\times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{-\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right)^2} d\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} - \frac{e^{\frac{\beta^2}{4}}}{\beta} \times \\
 &\times \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon_1 - \frac{\beta}{2}\right) \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Третий интеграл

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} \Phi_3(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} (4\varepsilon^2 - 2) e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (17)$$

Разобьем полученный интеграл на два интеграла и вычислим каждый из них:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} 4\varepsilon^2 e^{\beta \varepsilon} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \varepsilon e^{\beta \varepsilon} d e^{-\varepsilon^2}; \quad (18)$$

$$\frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} 2e^{\beta \varepsilon} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = -2 \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (19)$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = I_2',$$

тогда

$$\frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} 2e^{\beta \varepsilon} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = -2I_2'.$$

Интегрируя выражение (18) по частям, получаем

$$\frac{-4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \varepsilon e^{\beta \varepsilon} d e^{-\varepsilon^2} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_1 e^{\beta \varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1^2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{-\varepsilon^2} (e^{\beta \varepsilon} + \beta \varepsilon e^{\beta \varepsilon}) d\varepsilon =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{\beta \varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1^2} + 2I_2' - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} \beta e^{\beta \varepsilon} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{\beta \varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1^2} + \\
&\quad + 2I_2' - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon_1^2} e^{-\beta \varepsilon_1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^2 \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = \\
&= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_1 e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} + 2I_2' + \beta^2 I_2'. \quad (20)
\end{aligned}$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon_1 + \beta) e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} + (2 + \beta^2) I_2' - 2I_2' = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon_1 + \beta) e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} + \beta^2 I_2'. \quad (21)
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение (5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \varphi(k) &= \int_{-\infty}^{\varepsilon_1} e^{\beta \varepsilon} [1 - \Phi(\varepsilon) - \gamma \Phi_3(\varepsilon)] d\varepsilon = I_1 - I_2 - \gamma I_3 = \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\beta \varepsilon_1} - \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} + \frac{e}{\beta} e^{\frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon_1 - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \\
&\quad + \gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon_1 + \beta) e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} - \gamma \beta^2 I_2'. \quad (22)
\end{aligned}$$

Интеграл  $I_2'$  уже вычислен (формула (16)). Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \varphi(k) &= \frac{1}{\beta} e^{\beta \varepsilon_1} - \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon_1) e^{\beta \varepsilon_1} + \frac{e}{\beta} e^{\frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon_1 - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \\
&\quad + \gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon_1 + \beta) e^{\beta \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2} - \gamma \beta^2 e^{\frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon_1 - \frac{\beta}{2}\right) \right]. \quad (22')
\end{aligned}$$

Подставляя вместо  $M$  его выражение

$$M = \frac{k_{0,5}}{2h} \ln 10 e^{\frac{\alpha \ln 10}{h}}$$

и учитывая, что  $\frac{\ln 10}{h} = \beta$ , получим

$$\varphi(k) = 0,5 k_{0,5} \beta e^{\alpha \beta} \left\{ \frac{1}{\beta} e^{\beta \varepsilon} - \frac{1}{\beta} \Phi(\varepsilon) e^{\beta \varepsilon} + \frac{e}{\beta} e^{\frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon + \beta) e^{\beta\varepsilon - \varepsilon^2} - \gamma \beta^2 e^{\frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] \Big\} = \\
& = 0,5k_{0,5} \left\{ [1 - \Phi(\varepsilon)] e^{\alpha\varepsilon} e^{\beta\varepsilon} + e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \right. \\
& + \gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\varepsilon\beta + \beta^2) e^{\beta\varepsilon - \varepsilon^2} e^{\alpha\beta} - \gamma \beta^3 e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] \Big\} = \\
& = 0,5k_{0,5} \left\{ [1 - \Phi(\varepsilon)] e^{\alpha\varepsilon} e^{\beta\varepsilon} + e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} (1 - \gamma\beta^3) \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}} \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2}\right) e^{\beta\varepsilon - \varepsilon^2} e^{\alpha\beta} \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Обозначив

$$e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} (1 - \gamma\beta^3) = a_1,$$

находим

$$\begin{aligned}
\varphi(k) & = 0,5k_{0,5} \left\{ [1 - \Phi(\varepsilon)] e^{\beta(\alpha + \varepsilon)} + a_1 \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \right. \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2\gamma\beta \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2}\right) e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} e^{-\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right)^2} \Big\} = 0,5k_{0,5} \left\{ [1 - \Phi(\varepsilon)] e^{\beta(\alpha + \varepsilon)} + \right. \\
& + a_1 \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \Phi_1\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) 2\gamma\beta e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2}\right) \Big\}, \quad (24)
\end{aligned}$$

где  $\Phi_1\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right)^2}$  — первая производная от  $\Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right)$ .

Обозначив

$$2\gamma\beta e^{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}} = a_2,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\varphi(k) & = 0,5k_{0,5} \left\{ [1 - \Phi(\varepsilon)] e^{\beta(\alpha + \varepsilon)} + a_1 \left[ 1 + \Phi\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + a_2 \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2}\right) \Phi_1\left(\varepsilon - \frac{\beta}{2}\right) \right\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Верхняя ветвь кривой не имеет ограничения и при  $k_0 = \infty$  значение  $\varepsilon = \infty$ . Учитывая, что  $\Phi(\infty) = 1$  и  $\Phi_1(\infty) = 0$ , получаем для всей площади кривой  $\varphi(\infty) = 0,5k_{0,5} \cdot 2a_1 = k_{0,5}a_1 \approx 1$ .

Уравнение (25) может быть принято для расчета и построения кривой суммарного стока.

Уравнение кривой суммарного стока, данное Грассбергером [24], имеет вид

$$F(Q) = \int_0^Q T(Q)dQ = 182,5 \int_0^Q \left[ 1 - \Phi(\varepsilon) + \frac{\alpha}{2} \Phi_3(\varepsilon) \right] dQ =$$

$$= 182,5 \{ [1 + \Phi(\varepsilon - c_1)] Q_m - e^{-(\varepsilon - c_1)^2} (\varepsilon + c_1) c_2 Q_m + [1 - \Phi(\varepsilon)] Q \}, \quad (26)$$

где  $T$  — обеспеченность, дни;  $Q_m$  — среднегодовой расход;

$$c_1 = \frac{1}{2h \lg e}; \quad (27)$$

$$c_2 = \frac{4\alpha c_1}{\sqrt{\pi} (1 + 4\alpha c_1^3)}; \quad (28)$$

$$c_3 = e^{2\alpha c_1 + c_1^2} (1 + 4\alpha c_1^3); \quad (29)$$

$$Q_m = c_3 Q_{182,5}. \quad (30)$$

В безразмерном выражении получаем

$$1 = c_3 k_{0,5} \quad (30')$$

Ход решения интеграла Грассбергером не дан.

Легко показать, что для значения  $\frac{\alpha}{2} = -\gamma$ ,  $P = \frac{T}{365}$  и  $k_i = \frac{Q_i}{Q_m}$  уравнение (25) совпадает с уравнением Грассбергера (26) и  $c_3 = a_1$ .

Полученное уравнение кривой суммарного стока соответствует изменению  $\varphi(k)$  от 0 до 1,0 при изменении  $k$  от 0,0 до  $\infty$ . Это является вполне приемлемым для кривой суммарного стока, полученной на основе обобщенной кривой (кривая обеспеченности суточных расходов в средний по распределению год по Д. И. Кочерину).

Для средней кривой («среднегодовых характеристик обеспеченности» по Д. И. Кочерину) модульным коэффициентам  $k_{1,0}$  и  $k_0$  могут быть приписаны вполне определенные численные значения (двустороннее ограничение). Нарастание  $\varphi(k)$  с увеличением  $k$  для верхней части кривой суммарного стока большинства рек весьма мало, и при построении ее мы практически не обнаруживаем разницы между кривой, уходящей в бесконечность, и кривой, ограниченной фактическим средним максимумом. Мы ограничиваем лишь нижнюю ветвь кривой обеспеченности ординатой  $k_1$  ( $k_{\min}$ ), и абсцисса кривой суммарного стока нарастает вначале по прямой  $\varphi(k) = ak$  при  $\rightarrow 0 \leq k \leq k_1$ , а дальше по кривой, подобной (25) при  $k > k_1$ .

Таким образом, утверждение, что уравнение кривой Чебышева—Брунса «не интегрируется» [2], является необоснованным.

Параметры уравнений (4) и (25), связанные с характерными ординатами кривой обеспеченности суточных расходов ( $k_{0,16}$ ;  $k_{0,50}$ ;  $k_{0,84}$ ;  $k_1$ ), для рек, не исследованных в гидрологическом отношении, могут определяться по эмпирическим формулам автора [10, 11]. Формулы должны быть уточнены на основе новых материалов наблюдений.

Уравнение (25) является довольно громоздким и для успешного использования его требуется разработка вспомогательных средств в виде таблиц или номограмм.

Весьма простым и достаточно точным является разработанный нами метод построения кривой суммарного стока по характерным ординатам. Сущность его заключается в следующем. Кривые обеспеченности суточных расходов имеют обычно монотонный и довольно устойчивый характер для данного типа внутригодового режима стока. Вполне понятно, что каждому типу календарного распределения стока соответствует характерный для него тип кривой обеспеченности суточных расходов и соответствующий тип кривой суммарного стока. Так, для восточноевропейского типа рек, по Б. Д. Зайкову [20], суточный гидрограф характеризуется высоким весенним половодьем, вторым, не всегда ясно выраженным, осенним паводком и длительной летней и зимней меженью. Этому гидрографу соответствует тип кривой обеспеченности, характерной для рек с «преобладающим в году низким режимом» [8].

Для этого типа рек отдельные ординаты кривых обеспеченности суточных расходов характеризуют относительно большие участки кривой и соответствующие им площади криволинейных трапеций (абсциссы суммарной кривой стока).

Проведенные исследования по данным 78 средних кривых обеспеченности суточных расходов рек Белоруссии и смежных районов показали следующие зависимости между  $\varphi(k)$  и  $k(p)$ :

$$\varphi(2) = 0,73k_{0,5} + 0,37 \text{ при } r = 0,94, \quad (31)$$

$$\varphi(1,5) = 0,70k_{0,5} + 0,32 \text{ при } r = 0,97, \quad (32)$$

$$\varphi(1) = 0,65k_{0,5} + 0,24 \text{ при } r = 0,99, \quad (33)$$

$$\varphi(0,5) = 0,42k_{0,75} + 0,27 \text{ при } r = 0,94, \quad (34)$$

$$\varphi(k_1) = k_1 = 0,67k_{0,75} - 0,04 \text{ при } r = 0,93. \quad (35)$$

Следует отметить, что значения  $\varphi_{0,5}$  и  $\varphi(k_1)$  также могут быть выражены через  $k_{0,5}$ , так как коэффициенты корреляции и для этих связей существенны.

Полученные уравнения регрессии имеют вид:

$$\varphi(0,5) = 0,38k_{0,5} + 0,21 \text{ при } r = 0,90, \quad (36)$$

$$\varphi(k_1) = k_1 = 0,78k_{0,5} - 0,21 \text{ при } r = 0,93. \quad (37)$$

Связи, выражаемые уравнениями (31) — (34), показаны на рис. 3.

При составлении уравнений регрессий мы ограничились исследованиями связей между суммами частичных площадей кривых обеспеченности суточных расходов и характерными ординатами кривых. При этом мы ограничились суммированием до значений  $\varphi(k) = \varphi(2)$ . Даль-

нейшие значения  $\varphi(k)$  попадают в зону малых приращений площадей. При этом следует указать, что эта зона недостаточно обрисована публикуемыми стандартными координатами кривой обеспеченности суточных расходов [19].

Кроме значений  $\varphi(k)$ , вычисляемых по уравнениям (31)—(37), для построения кривых суммарного стока необходимо иметь значения  $k_0 = \frac{\bar{Q}_{\max}}{\bar{Q}_{\text{год}}}$ . Приближенные методы вычислений среднего максимума и нормы годового стока разработаны для разных физико-географических районов СССР. При этом следует указать, что точность определения величины  $k_0$  незначительно влияет на точность построения кривой суммарного стока по предлагаемому методу.

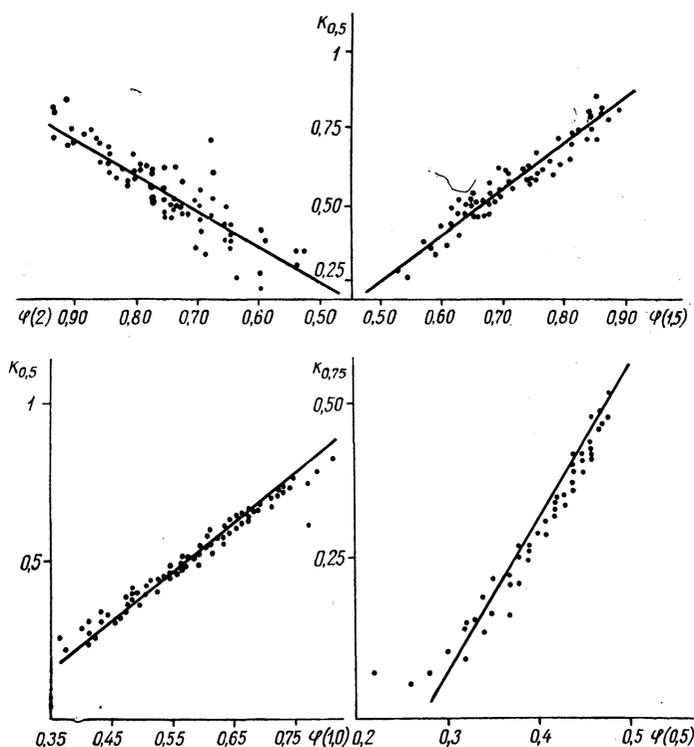


Рис. 3. Связь между  $\varphi(k)$  и  $k_p$ .

Таким образом, по координатам шести точек можно построить с достаточной для практики точностью кривые суммарного стока.

Следует особо отметить, что медианный модульный коэффициент  $k_{0,5}$  служит для расчета и построения значительной части кривой суммарного стока, в частности для определения так называемого «коэффициента естественной зарегулированности» [ $\varphi(1,0)$ ].

Вполне понятно, что связь между  $\varphi(k)$  и  $k_p$  может быть установлена не только для выбранных нами сопряженных переменных, но и для других значений  $\varphi(k)$  и  $k_p$ . В табл. 1 приведены значения коэффициентов корреляции между разными значениями сопряженных  $\varphi(k)$  и  $k_p$ . В связи с высокими значениями коэффициентов корреляции между

$\varphi(k)$  и  $k_p$  и большим числом сопряженных пар ( $n=78$ ) погрешность  $\varphi(k)$  невелика.

Из табл. I видно, что могут быть и другие варианты уравнений регрессии, так как  $r_{\varphi, k}$  достаточно высоки для всех показанных сопряженных рядов.

Таблица I

$\varphi(k)$	$k_{0,16}$	$k_{0,25}$	$k_{0,5}$	$k_{0,75}$	$k_{0,84}$
$\varphi(2)$	0,83	0,96	0,94		
$\varphi(1,5)$		0,89	0,97		
$\varphi(1)$			0,99		
$\varphi(0,5)$			0,81	0,94	
$\varphi(k_1)$			0,8	0,93	0,93

Подобные исследования проведены нами для южных районов Западной Сибири и Центрального Казахстана.\* Для этого использованы данные П. С. Кузина [9]. При этом следует отметить, что уравнение регрессии для так называемого коэффициента естественной зарегулированности  $[\varphi(1)]$  рек Сибири и Казахстана совпало с уравнением (33) для рек Белоруссии и смежных территорий.

Подобные же исследования проведены нами для рек Словакии по материалам О. Дуба [21] для девяти выделенных им типов обобщенных кривых обеспеченности суточных расходов и соответствующих им кривых суммарного стока. Типизация кривых проведена О. Дубом по материалам 67 гидрологических пунктов, расположенных в разнообразных физико-географических условиях.

Нами получены следующие уравнения регрессии:

$$\varphi(2) = 0,61k_{0,5} + 0,46 \text{ при } r = 0,98, \quad (38)$$

$$\varphi(1,5) = 0,69k_{0,5} + 0,34 \text{ при } r = 0,99, \quad (39)$$

$$\varphi(1) = 0,63k_{0,5} + 0,26 \text{ при } r = 0,99, \quad (40)$$

$$\varphi(0,5) = 0,39k_{0,5} + 0,18 \text{ при } r = 0,98, \quad (41)$$

$$\varphi(k_1) = k_1 = 0,45k_{0,5} - 0,16 \text{ при } r = 0,89, \quad (42)$$

$$\varphi(k_1) = k_1 = 0,45k_{0,75} - 0,06 \text{ при } r = 0,94. \quad (43)$$

Следует отметить, что и для рек Словакии аргументом уравнений регрессии (38)—(41) служит значение медианного модульного коэффициента  $k_{0,5}$ . Так как связь между  $k_1$  и  $k_{0,5}$  является также достаточно тесной, то по существу кривая суммарного стока для девяти типов рек Словакии вполне определяется величиной медианного модульного коэффициента  $k_{0,5}$ .

В заключение следует отметить, что связь между коэффициентом естественной зарегулированности и медианным модульным коэффициентом, выражаемая уравнением (33), остается действительной и для других районов СССР.

\* В исследованиях принимали участие студенты БПИ М. Е. Лубяко, В. И. Мелешкевич.

## Литература

1. Алексеев Г. А. Методика определения гидроэнергетических характеристик малых ГЭС. Тр. ГГИ, вып. 9 (63), 1948.
2. Андриянов В. Г. Построение кривых обеспеченности суточных расходов и кривых использования стока при отсутствии наблюдений. Тр. ГГИ, вып. 14 (68), 1949.
3. Андриянов В. Г. Внутригодовое распределение речного стока. М., 1960.
4. Бахтияров В. А. Водохозяйственные расчеты. Л., 1961.
5. Берлов М. Н. Техническая графика, ч. 1, 2. М.—Л., 1934.
6. Головин Д. Н. Графическая математика. М.—Л., 1931.
7. Еллидинский А. Я. Кривые обеспеченности суточных расходов и их применение к расчетам энергоресурсов рек. Тр. ГГИ, вып. 9 (63), 1948.
8. Кочерин Д. И. Обеспеченность расходов в году и ее характеристика по реальным данным для рек СССР. Вопросы инженерной гидрологии. М.—Л., 1932.
9. Кузин П. С. Режим рек южных районов Западной Сибири, Северного и Центрального Казахстана. Л., 1953.
10. Лившиц И. М. Построение кривых обеспеченности суточных расходов воды. Сб. «Тр. первого совещания по регулированию стока». М., 1946.
11. Лившиц И. М. Обеспеченность суточных расходов рек Полесья. «Тр. ин-та мелиорации, водного и болотного х-ва АН БССР», т. VI, 1955.
12. Лившиц И. М. Таблицы для построения кривой обеспеченности по интерполяционной формуле Чебышева—Брунса. Сб. науч. работ БПИ «Гидротехническое строительство», вып. 50, 1955.
13. Лившиц И. М. Расчет кривых использования стока. Сб. «XI научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава БПИ совместно с работниками промышленности и строительства». Минск, 1957.
14. Лившиц И. М., Юркитович Н. А. Рационализация техники приближенного вычисления определенных интегралов по формулам численных квадратур. Сб. науч. тр. БПИ, сер. физ.-мат., вып. 60, 1958.
15. Мостков М. А. К вопросу о кривых выработки или кривых суммарного стока. Сб. «Тр. первого совещания по регулированию стока». М., 1946.
16. Омодео А. Водные ресурсы Закавказья и их использование. Пер. с итальян. М., 1936.
17. Простейший интегратор типа ПИ-1. М., 1960 [МВО СССР, БПИ, ВДНХ].
18. Простейший интегратор типа ПИ-2. М., 1960 [МВО СССР, БПИ, ВДНХ].
19. Ресурсы поверхностных вод СССР, т. 5. Белоруссия и Верхнее Поднепровье. Л., 1966.
20. Соколовский Д. Л. Речной сток. Л., 1959.
21. Dub O. Vseobecna Hydrologia slovenska vyd. Slov. Akad. vied. Bratislava, 1954.
22. Fantoli E. I cicli delle portate naturali dell'Adda Alpina. Annali dei Lavori Pubblici, XI, 1926.
23. Foster H. A. Duration curves. Proc. ASCE, № 8, 1933.
24. Grassberger H. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer. Die Wasserwirtschaft, № 1—6, 1932.
25. Naatz H., Blochmann E. W. Das zeichnerische integrieren mit dem Integranten. München und Berlin, 1621.