ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

МИНСК 1972

И. В. МИНАЕВ

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДРЕНАЖА МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ

В обширной литературе по вертикальному дренажу, появившейся в последние годы в связи с развитием дренажных работ в Голодной степи и других районах СССР, освещены многие вопросы проектирования и строительства скважин, предназначенных для понижения уровня грунтовых вод. Рассмотрены вопросы районирования вертикального дренажа [1, 2, 3], гидромеханического расчета притока воды к скважинам [4, 5, 6, и др.], балансовые расчеты, определяющие количество и дебит грунтовых вод [7], подлежащих откачке, подбор насосов и гидромеханического оборудования [8]. Значительно меньше работ посвящено технико-экономическому расчету вертикального дренажа [9, 10, 11].

Параметры вертикального дренажа (глубина скважин, величина понижения динамического уровня, диаметр фильтра и др.) следует рассчитывать таким образом, чтобы получать их оптимальные размеры по условию минимальных ежегодных затрат. В приведенных работах освещен технико-экономический расчет скважины вертикального дренажа по какому-либо одному параметру.

Наиболее существенным параметром, определяющим ежегодные издержки, является величина динамического водопонижения в скважине. Правильный выбор этого параметра может снизить ежегодные издержки в 1,5—2 раза, однако существенное значение имеет также выбор оптимальной глубины несовершенной (по вскрытию пласта) скважины (до 50%). Меньшее значение имеют другие параметры. Здесь необходимо отметить, что снижение ежегодных издержек может быть существенным только в отношении ограниченного числа параметров.

Опыт показывает, что различные параметры сооружения не в одинаковой степени влияют на его стоимость, причем оптимизация каждого параметра не приводит к равномерному снижению стоимости, а обязательно находятся два-три наиболее существенных.

Затраты времени на оптимизацию всех параметров часто не оправдываются ввиду незначительного конечного результата, а также невозможности практически выдержать полученные размеры ввиду стандартизации, допусков, запаса и прочих причин при строительстве сооружения. Обычно многопеременные задачи проще в логической и математической формулировке, но весьма сложны при получении окончательных результатов. В данной работе применяется метод аппроксимации, который целесообразно использовать при ограниченном количестве переменных.

Метод аппроксимации. Рассмотрим некоторую функцию от двух переменных $F(u, v)$, непрерывную и дифференцируемую по обеим переменным. Функция F может быть весьма сложной в смысле вычислительного процесса, однако она вычислима и поэтому может быть задана таблицей своих значений. Аргументы принимают значения на промежутках конечной длины.

Сначала находятся аппроксимирующие функции по каждой из двух независимых переменных, затем суперпозицией линейных уравнений находится матрица, элементы которой становятся членами аппроксимирующей функции $P=f(u, v)$ от двух переменных. Для точечной интерполяции по одной переменной мы применяем метод наименьших квадратов, а также метод средних [12] или равных сумм [13]. Для большей наглядности изложения приведем таблицу (табл. 1) значений функции двух переменных $F(u, v)$, в которой аргументы принимают значения натурального ряда чисел от 1 до 4.

Таблица 1

u \ v	1	2	3	4
1	2	5	10	17
2	3	6	11	18
3	4	7	12	19
4	5	8	13	20

В табл. 1 выберем значения по одной переменной, например v, оставляя u постоянной и этим самым сведем задачу к интерполированию функции F по одной переменной v. Рассматривается, следовательно, одна строка таблицы значений функции F, для примера взята строка при $u_0=2$.

Предположим, что строку значений функции F аппроксимирует функция вида

$$P_v = \Sigma b_k v^k, \tag{1}$$

причем ограничимся только двумя значениями k: 0 и 2.

В развернутом виде

$$P_v = b_0 + b_2 v^2. \tag{1'}$$

Для определения коэффициентов b_0 и b_2 применим метод средних [12]. Сущность метода сводится к уравниванию правой и левой частей уравнения. Для выбранной строки коэффициенты согласно методу средних определяются из следующей системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3+\ 6 = 2b_0 + (1^2 + 2^2)\, b_2, \\ 11+18 = 2b_0 + (3^2 + 4^2)\, b_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = 2b_0 + \ 5b_2, \\ 29 = 2b_0 + 25b_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем $b_0=2$, $b_1=1$, следовательно, аппроксимирующее уравнение с числовыми коэффициентами будет иметь вид $P_v=2+v^2$. Придавая зачения v от 1 до 4, получим значения второй строки в табл. 1.

В более компактном виде предыдущие уравнения записываются следующим образом:

$$z_i = \Sigma b_k \beta_{ki}\ (i = 1,2), \tag{2}$$

где $z_1=F_{v=1}+F_{v=2}$; $Z_2=Z_{v=3}+F_{v=4}$, т. е. равны сумме значений функции, сгруппированных по два на каждом участке; отсюда для $u_0=2$: $z_1=9$, $z_2=29$.

Для дальнейшего изложения метода аппроксимации необходимо решение системы линейных уравнений представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

или в буквенном виде:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\beta_{12} \\ \beta_{21}\beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Выразим коэффициенты b_0 и b_2 через матрицу $[\beta_{ij}]$ и матрицу-столбец $[z_i]$, где $i=1,2$; $j=1,2$. Для этого нужно найти обратную матрицу B для $[\beta_{ij}]$ по известным правилам линейной алгебры [14]. Так, для матрицы $[\beta_{ij}]$ обратной будет следующая матрица:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты b_0 и b_2 в матричном виде выражаются следующим равенством:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_k \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

или

$$[b_k] = B\,[z_i], \tag{3'}$$

где $[b_к]$ и $[z_i]$ — матрицы-столбцы с прежними значениями индексов.

Уравнение (1') также можно представить в матричном виде:

$$P_v = [1 \cdot v^2] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Тогда, подставляя в (4) выражение коэффициентов из (3), получим аппроксимирующую функцию, представленную в виде произведения трех матриц:

$$P_v = [1 \cdot v^2]\, B \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

или в более компактном виде

$$P_v = [v^k]\, B\,[z_i], \tag{5'}$$

где $[v^к]$ — матрица-строка, а $[z_i]$ — матрица-столбец; $к=0;\ 2;\ i=1;\ 2.$

Подставим в (5) численные значения матриц B и z_i и перемножим все три матрицы:

$$P_v = [1 \cdot v^2] \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} = [1\ v^2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + v^2.$$

Результат такой же, как и при решении системы линейных уравнений.

Рассмотрим теперь один столбец таблицы функции F, например, при $v_0=2$.

Предполагаем, что аппроксимирующей функцией по u будет выражение вида

$$P_u = \sum_m a_m \cdot u^m, \tag{6}$$

где m принимает только два значения: 1 и 0.

В развернутом виде

$$P_u = a_1\, u + a_0. \tag{6'}$$

Методом равных сумм для выбранного столбца найдем систему линейных уравнений с неизвестными, которыми являются коэффициенты уравнения (6′):

$$\begin{cases} z_1^* = 3a_1 + 2a_0 = 11, \\ z_2^* = 7a_1 + 2a_0 = 15 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде

$$[z_i^*] = [\alpha_{ij}]\,[a_m],$$

где $i=1;\,2;\ j=1;\,2;\ m=1;\,0$.

Найдя обратную матрицу для $[\alpha_{ij}]$, выразим матрицу-столбец $[a_m]$ в явном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ — матрица-столбец коэффициентов уравнения (6); $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$— матрица-столбец сумм значений функции, сгруппированных по два по переменной u: $z_1^*=11$, $z_2^*=15$ (для $v_0=2$); A — матрица, обратная матрице $[\alpha_{ij}]$.

Численное значение матрицы A для выбранного столбца значений табл. 1 будет равно

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{7}{8} & -\dfrac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Поскольку уравнение (6) можно представить в матричном виде, его можно сразу выразить через матрицы A и $[z_i^*]$ аналогично предыдущему примеру:

$$P_u = [u^m]\,A\,[z_i^*]. \tag{8}$$

Подставим численные значения матриц A и $[z_i]$ в (8) и вычислим аппроксимирующую функцию для выбранного столбца табл. 1:

$$P_u=[u1]\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ 15\end{bmatrix}=[u1]\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=u+4.$$

Следовательно, для данного столбца аппроксимирующей будет функция $P_u=u+4$.

При определении алгебраического значения функции для других столбцов или строк табл. 1 вид функций не будет меняться, а численные значения коэффициентов изменяются.

Рассмотрим часть значений табл. 1.

Таблица 2

u \ v	1	2	3	4
1 2 3 4	3	5 6 7 8	11	18

Для второй строчки и второго столбца получены аппроксимирующие уравнения. Ставится задача найти аппроксимирующее уравнение $P_{uv}=f(u, v)$, которое позволило бы заполнить оставшиеся незаполненными числами клетки.

Все числа табл. 2 — значения исходной функции F, поэтому каждое из них является значением по одному направлению (горизонтальному) функции F по переменной v, по другому (вертикальному) — значениями по переменной u. Из выражения (5) следует, что значения z_1 и z_2 являются значениями функции по v, но их можно выразить и как значения по переменной u. Действительно, выражение (6′) определяет те же числа, которые входят в z_1 и z_2.

Тогда

$$z_1=F_{\substack{v=1\\u=2}}+F_{\substack{v=2\\u=2}}=a_{11}u+a_{12};$$

$$z_2=F_{\substack{v=3\\u=2}}+F_{\substack{v=4\\u=2}}=a_{21}u+a_{22}.$$

Коэффициенты a_{ij} все различны, так как $F_{\substack{v=1\\u=2}}, F_{\substack{v=2\\u=2}}$ находятся в разных столбцах таблицы, а для каждого столбца коэффициенты a_1 и a_0 в уравнении (6′) будут различными.

В матричном виде система уравнений запишется так:

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\ 1\end{bmatrix}, \qquad (9)$$

тогда равенство (5) можно представить в виде

$$P_{vu}=[1v^2]\,B\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ 1\end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Но, согласно (7), коэффициенты уравнений для каждого столбца таблицы (по направлению u) можно выразить через матрицу A и значения z_i^*.

Отсюда

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_1^* = F_{\substack{u=1\\v=1}} + F_{\substack{u=2\\v=2}} \\ z_2^* = F_{\substack{u=3\\v=1}} + F_{\substack{u=4\\v=2}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_{22} \\ z_{21} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_1^* = F_{\substack{u=1\\v=3}} + F_{\substack{u=2\\v=4}} \\ z_2^* = F_{\substack{u=3\\v=3}} + F_{\substack{u=4\\v=4}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрицу коэффициентов $[a_{ij}]$ теперь можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{21} \\ a_{12}a_{22} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_{11}\,z_{12} \\ z_{21}\,z_{22} \end{bmatrix},$$

а для того чтобы подставить эту матрицу в (10), необходимо ее транспонировать, при этом транспонируются матрицы A и $[x_{ij}]$ и меняются местами:

$$P_{vu} = [1v^2]\, B\, [z_{ij}]'\, A' \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

В равенстве (11) матрица $[z_{ij}]$ транспонирована относительно канонического следования ее индексов. Цифровое значение ее элементов будет получаться в результате суммирования значений функции (табл. 1):

$$[z_{ij}] = \begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 24 & 64 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ulcorner\!\rightarrow v \\ \downarrow u \end{matrix}.$$

Стрелками показаны направления суммирования чисел табл. 1 при каноническом следовании ее индексов:

$$P_{vu} = [1v^2] \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 56 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1v^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = u + v^2.$$

Следовательно, аппроксимирующей функцией по двум переменным будет уравнение $P_{vu} = u + v^2$, которое позволяет заполнить все клетки табл. 2.

Другой метод определения коэффициентов аппроксимирующего уравнения P_{vu} будет показан ниже на конкретном примере.

Аппроксимирующее уравнение P_{vu} можно представить в виде

$$P_{vu} = [1\ v^2]\, G \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ матрица, получающаяся в результате перемножения трех матриц сомножителей $B[z_{ij}]'A'$.

Рассмотренный способ аппроксимации по двум переменным может быть обобщен и на большее число переменных [15, 16].

Технико-экономический расчет вертикального дренажа. Как и при решении задач по определению притока воды к скважинам, так и при решении технико-экономической задачи, неизбежны схематизация и упрощения, которые позволяют получить достаточно простой результат и в то же время не вносить существенных погрешностей.

Рассматривается задача технико-экономического расчета дренажа от двух переменных: величина понижения динамического уровня (s) воды в скважине и ее заглубления (l) в водоносный пласт (несовершенная скважина).

При этом рассматривается установившееся движение воды к сважинам, т. е. расчет ведется на постоянный отбор воды насосом из каждой скважины. По вопросу режима откачки воды из скважины существуют различные мнения [17, 18 19]. В работе [17] предполагается прерывистый режим с целью быстрого и постоянного расслоения верхних покровных слоев грунта. Можно выделить следующие периоды, которые требуют изменения постоянного режима откачки: 1) строительная откачка повышенным расходом для образования песчаного фильтра; 2) сработка «вековых» запасов воды с целью понижения уровня грунтовых вод до «критической» глубины; 3) эксплуатационный период, в который откачка позволяет удерживать уровень грунтовых вод на глубине более или равной «критической». Если в первый период предпочтительнее производить откачку эрлифтной установкой из-за большого количества выносимого песка, то в два других периода откачка должна производиться насосом.

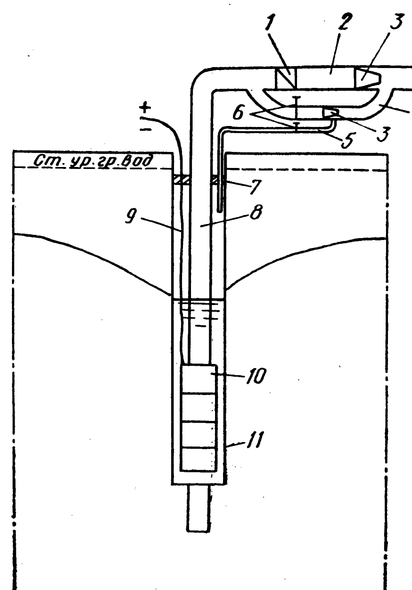

Рис. 1. Схема вакуумированной вертикальной скважины:

1 — задвижка; 2 — воздухоотборное устройство (основная ветвь); 3 — сходящиеся конусы; 4 — воздухоотборное устройство (дополнительная ветвь); 5 — воздухоотборная трубка; 6 — вентили; 7 — заглушка; 8 — водоподъемные трубы; 9 — электрокабель; 10 — электропроводный насос; 11 — обсадные трубы скважины.

Ввиду того что для сработки «вековых» запасов грунтовых вод необходима большая производительность, чем в эксплуатационный период, и, кроме того, в этот период желательна откачка с переменным расходом, предлагаются различные способы создания переменного расхода: замена насоса в эксплуатационный период на менее производительный, регулирование расхода задвижкой на напорной трубе, монтаж в скважине двух насосов и др. Прерывистый режим откачки с чередованием больших и меньших расходов скважины можно создать и одним насосом, если воспользоваться остаточным напором воды, выходящей из напорной трубы [20].

Для этого на напорной трубе монтируется воздухоотборник, состоящий из главной трубы большого диаметра и малой трубы, параллельной первой. В трубах встроены конические насадки, за которыми образуется вакуум. Отбор воздуха из скважины будет возможен при установке в ней заглушки, через которую пропускаются водоподъемные трубы и электрокабель (рис. 1). Открывая или закрывая вентиль на малой трубе, можно создавать вакуум в скважине без изменения режима работы насоса.

Вакуум в скважине позволит создать необходимый режим эксплуатационного водопонижения.

Для примера расчета взят объект с мощностью однородного (в фильтрационном отношении) пласта 100 *м*. Предполагается, что возможно устройство скважин глубиной от 30 до 100 *м*. Статический уровень грунтовых вод до дренирования находится на глубине $h_1 = 1$ *м*, про-

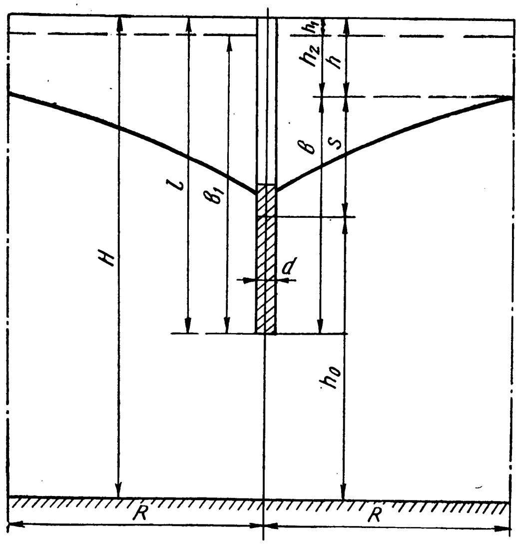

Рис. 2. Расчетная схема к несовершенной скважине.

ектируется водопонижение еще на 2 *м* ($h=3$ *м*) (рис. 2). Диаметр скважины $D=900$ *мм*, условный диаметр фильтра 500 *мм* при диаметре каркаса 0,426 *мм*. Средняя продолжительность работы насоса $T=7200$ *час* за год при стоимости электроэнергии $\sigma=0{,}008$ *руб/квт·ч*.

Уравнение для подсчета удельных (на 1 *га*) ежегодных затрат записывается в общем виде:

$$\overline{P}_э = \frac{P_{к_1}\rho_1}{F} + \frac{P_{к_2}\rho_2}{F} + \frac{P_p}{F} + \frac{P_N}{F}, \tag{12}$$

где $P_{к_1} = P_{I} + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_{V} + P_{VI}$; P_{I} — стоимость подготовительных работ (установка кондуктора, рытье приямков для глинистого раствора, монтаж станка и др.) [3, 10]. Эти затраты не зависят от выбранных переменных и составляют в среднем 6500 руб. на одну скважину; P_{II} — стоимость обсадных труб скважины, зависящая от глубины и диаметра скважины; при постоянном диаметре труб (0,426 *м*) стоимость можно выразить зависимостью [10]: $P_{II} = 22\, l$, где l — глубина скважины, *м*; P_{III} — стоимость подготовки фильтровой части каркаса скважины (нарезка щелей или сверление отверстий, окраска труб и др.); при постоянном диаметре определяется зависимостью [10]: $P_{III} = 46{,}5\,(l - s + h)$, где s — глубина понижения уровня воды в скважине; P_{IV} — стоимость бурения скважины; по обоснованию, данному в работе [10]* принимаем: $P_{\mathrm{IV}}=(36{,}6D^2+30)\,l$, где D — диаметр скважины, *м*; P_{V} — стоимость засыпаемого в затрубное пространство гравия для образования фильтра; по [10] $P_{\mathrm{V}}=5{,}43\ l$; P_{VI} — стоимость проведения строительных откачек; выражается произведением числа часов, потребных на откачку, на стоимость откачки за 1 *ч*; по [3, 10] $P_{\mathrm{VI}}=4030\ \lg\sqrt{Q}$, где Q — дебит скважины, в среднем равный дебиту при эксплуатационном понижении уровня, *л/сек*; $P_{\mathrm{к}_2}$ — стоимость погружных насосов; по прейскурантным ценам приближенную зависимость стоимости от мощности насоса (N, *квт*) можно принять прямолинейной до $N=250$ *квт*; $P_{\mathrm{к}_2}=375+$ $+12{,}5\ N$; при $N>250$ *квт* $P_{\mathrm{к}_2}=375+7{,}5\ N$; η_1, η_2 — нормы амортизации для затрат по скважине и насосу с оборудованием соответственно; $\eta_1=$ $=0{,}122$; $\eta_2=0{,}227$. По нашим подсчетам величину $P_{\mathrm{к}_2}$ следует увеличить в два раза с применением вакуумирования скважин вертикального дренажа; P_p — затраты по содержанию обслуживающего персонала и по уходу за скважиной и оборудованием; для малых площадей дренирования эти затраты остаются постоянными, с увеличением площади дренирования они увеличиваются, поэтому величина P_p принята равной 640 руб. для площадей менее 70 *га*, а сверх этой площади по эмпирической зависимости $P_p=640+3{,}6\ F$, где F — площадь дренирования одной взаимодействующей скважиной, *га*; P_N — затраты на электроэнергию по откачке воды из скважины,

$$P_N=\frac{QLT\sigma 3600}{102\eta},$$

где Q — дебит скважины при эксплуатационном понижении уровня, *л/сек*; $L=s+h+h_{\mathrm{тр}}$ — высота подъема воды с учетом остаточного напора; $h=h_1+h_2+5$ — потери напора на трение по длине в подъемных трубах;

$$h_{\mathrm{тр}}=\lambda\,\frac{0{,}8\,(s+h)\,Q^2}{d_{\mathrm{т}}^5 g},$$

где $\lambda=0{,}020$, $d_{\mathrm{т}}=0{,}15$ *м* (диаметр водоподъемных труб); $g=9{,}81$ (ускорение силы тяжести); Q — дебит скважины, *м³/сек*.

Размещение скважин в плане проектируется в углах квадратной сетки, поэтому $F=a^2=\pi R^2$, откуда $a=R\sqrt{\pi}$, где R — радиус влияния скважины.

Дебит несовершенной (по вскрытию пласта) скважины при известной глубине водоупора можно определить по формуле В. Д. Бабушкина [21] (в наших обозначениях):

$$Q=\frac{\pi k b^2 n}{\ln\dfrac{2R}{d}-\dfrac{1}{2}}\,[1+(2\overline{h}_0-(1-n)\ln\overline{R})], \tag{13}$$

где $\overline{n}=\dfrac{s}{b}$; $\overline{h}_0=\dfrac{h_0}{b}$; $\ln\overline{R}=\dfrac{\ln\dfrac{2R}{d}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2m_0}\left(2\ln\dfrac{8m}{d}-A\right)-\ln\dfrac{4m}{R}}$;

* Для P_{IV} нами дана более точная аппроксимация, приведенных в [10] данных.

$$m_0 = \frac{1-n}{2\,[2\overline{h}_0 - (1-n)]}; \quad m = \frac{b}{2}(1-n),$$

d — диаметр фильтра, *м*; k — коэффициент фильтрации; R — радиус влияния скважины; A — функция, определяемая по графику [21]. Формула (13) верна при $b > 0{,}3\,(H-h)$.

Ввиду того что по условиям задачи питание водоносного пласта осуществляется только за счет инфильтрации с поверхности, дебит скважины в эксплуатационный период можно получить по формуле [9]:

$$Q = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{86{,}4}, \tag{14}$$

где ε — интенсивность инфильтрации, *м/сутки*; в расчете принята равной 0,004 [7].

Приравнивая правые части формул (13) и (14), получим выражение для радиуса влияния скважины:

$$R = 4{,}9\,b\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\,\varphi, \tag{15}$$

где $\varphi = \sqrt{\dfrac{n + n\,[2\overline{h}_0 - (1-n)]\,ln\,\overline{R}}{\ln\dfrac{2R}{d} - \dfrac{1}{2}}}$.

Здесь k выражается в *м/сек*, а ε — в *м/сут*.

Подставив теперь все значения для $P_{\text{к}_1}$, $P_{\text{к}_2}$, P_p, P_N, получим выражение для определения ежегодных издержек по откачке воды из скважины.

Метод решения уравнения для определения s и b представляет серьезные затруднения ввиду сложности уравнения (12). Взятие производной по одной переменной, например s, с последующим приравниванием ее нулю — невозможно, так как имеются линейно-кусочные функции для P_p и $P_{\text{к}_2}$, но даже если их осреднить или принять условно-постоянными, то и тогда получающееся уравнение оказывается более сложным, чем исходное, и требует подбора значений s. И совершенно не имеет практического смысла взятие частных производных по s и b с последующим решением системы двух трансцендентных уравнений.

В качестве метода решения можно было бы принять составление программы для ЭЦВМ, но ввиду обилия исходных данных и сложных функций (в частности, A в формуле (13) берется по графику или таблице) программа оказывается исключительно сложной и теряет общность. Поэтому мы применяем метод аппроксимации — замены уравнения (12) более простым уравнением при ограниченном изменении переменных s и b. Этот метод позволяет воспользоваться ограниченным ручным счетом на полуавтоматической клавишной машине.

Расчет ведется в следующем порядке. Предполагается вначале $b = 33$ *м*, задаются несколько значений s. По формуле (15) определяется значение R (подбором), а затем Q, L, F, N и другие величины. В результате можно получить значения $P_э$ при $b = 33$ и нескольких значениях s. При выборе величины s следует учесть водозахватную способность скважины [11]. Существует предельно допустимое понижение уровня воды в скважине, которое соответствует критическому градиенту ($i_{\text{кр}}$) кривой депрессии вблизи фильтра, поэтому в расчете значение s принято не превосходящим величины 0,7 b [22].

Переменные можно представить в относительных величинах, изменяющихся в пределах от 0,1 до 0,9. Для переменной $\bar{b}$:

$$\bar{b} = \frac{(b_i + b_{ш}) - b_0}{10 \cdot b_{ш}},$$

где b_0 — начальное заглубление скважины под эксплуатационный уровень; $b_{ш}$ — шаг заглубления (разность двух соседних заглублений); b_i— заглубление скважины нарастающим итогом (суммирование шага с начальным заглублением), $i=0—8$.

За начальное заглубление принято 33 *м*. Отсюда заглубление скважины определяется: $b_i = \bar{b} \cdot 10 \cdot b_{ш} + (b_0 + b_{ш})$. Так, при $\bar{b} = 0{,}2$ и шаге $b_{ш} = 7$ *м* получаем $b_1 = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 7 + (33 - 7) = 40$.

Точно так же вычисляются относительные значения для понижения уровня воды в скважине:

$$\bar{s} = \frac{(s_i + s_{ш}) - s_0}{10 \cdot s_{ш}},$$

где $s_0 = 7{,}5$, $s_{ш} = 1{,}5$, $i = 0 - 8$.

Для построения аппроксимирующей функции от двух переменных были вычислены значения для $\bar{s} = 0{,}5$ ($s = 15{,}0$ *м*) и $\bar{b} = 0{,}5$ ($b = 61$ *м*, $l = 65$ *м*) (табл. 3).

Таблица 3

b \ s			s: 7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0	19,5
l	b	$\bar{b}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
37	33	0,1					32,05				
44	40	0,2	37,45	34,51	32,40	31,20	30,50	30,29	30,32	30,55	31,10
51	47	0,3					29,40				
58	54	0,4					28,72				
65	61	0,5	32,55	30,03	28,78	28,26	28,39	28,91	29,74	30,80	32,06
72	68	0,6					28,28				
79	75	0,7	30,35	28,55	27,93	27,85	28,43	29,52	30,70	32,20	34,06
86	82	0,8					28,74				
93	89	0,9					29,25				

В качестве аппроксимирующей функции можно принять многочлены с положительными и отрицательными степенями [13]:

$$Y = \sum_{1}^{n} \frac{A_{-n}}{x^n} + A_0 + \sum_{1}^{n_1} A_{n_1} x^{n_1}, \tag{16}$$

где n, n_1 — целые положительные числа.

При этом следует стремиться к уменьшению числа коэффициентов, что можно достигнуть введением дополнительных коэффициентов. Так, для значений табл. 3, по переменной $\bar{b}$ подобрана функция

$$Y_b = \frac{A_{-3}}{(\bar{b} + 0{,}47)^3} + A_0 + A_2 \bar{b}^2, \tag{17}$$

где A_{-3}, A_0, A_2 — коэффициенты, которые определяются решением системы линейных уравнений для каждого столбца табл. 3.

В частности, для столбца $s=0{,}5$ *м* уравнение (17) имеет следующие коэффициенты:

$$Y_b = \frac{1{,}226}{(\bar{b}+0{,}47)^3} + 26{,}37 + 2{,}73\bar{b}^2. \tag{18}$$

Методом равных сумм получено аппроксимирующее уравнение и по переменной s:

$$Y_s = \frac{A_{-3}}{(\bar{s}+0{,}425)^3} + A_0 + A_2(\bar{s}-0{,}06)^2. \tag{19}$$

Для строки $\bar{b}=0{,}5$ табл. 3 коэффициенты уравнения (19) имеют следующие значения:

$$Y_s = \frac{1{,}084}{(\bar{s}+0{,}425)^3} + 25{,}29 + 8{,}97(\bar{s}-0{,}06). \tag{20}$$

Далее из уравнений (17) и (19) конструируется уравнение от двух переменных по правилам, приведенным выше:

$$Y_{sb} = \left[\frac{1}{(\bar{s}+0{,}425)^3} \quad 1 \quad (s-0{,}06)^2\right] \begin{bmatrix} g_{11}g_{12}g_{13} \\ g_{21}g_{22}g_{23} \\ g_{31}g_{32}g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(\bar{b}+0{,}47)^3} \\ 1 \\ \bar{b}^2 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$Y_{sb} = \frac{g_{11}}{(\bar{s}+0{,}425)^3(\bar{b}+0{,}47)^3} + \frac{g_{21}}{(\bar{b}+0{,}47)^3} + \frac{g_{31}(\bar{s}-0{,}06)^2}{(\bar{b}+0{,}47)^3} +$$
$$+ \frac{g_{12}}{(\bar{s}+0{,}425)^3} + g_{22} + g_{32}(\bar{s}-0{,}06)^2 + \frac{g_{13}\bar{b}^2}{(\bar{s}+0{,}425)^3} +$$
$$+ g_{23}\bar{b}^2 + g_{33}\bar{b}^2(\bar{s}-0{,}06)^2. \tag{21$'$}$$

Для определения коэффициентов уравнения (21′) вычисляются значения еще двух любых строк (табл. 3), для которых справедливо уравнение (19). Получены следующие коэффициенты: $A_{-3}^{02}=1{,}447$; $A_0^{02}=28{,}125$; $A_2^{02}=3{,}110$; $A_{-3}^{07}=0{,}763$; $A_0^{07}=25{,}155$; $A_2^{07}=12{,}157$, где верхние индексы указывают строку табл. 3. Далее в уравнении (21′) придадим значение $\bar{b}=0{,}5$ и получим

$$Y_{sb} = \frac{1{,}096g_{11} + g_{12} + 0{,}25g_{13}}{(\bar{s}+0{,}425)^3} + (1{,}096g_{21} + g_{22} + 0{,}25g_{23}) +$$
$$+ (1{,}096g_{31} + g_{32} + 0{,}25g_{33})(\bar{s}-0{,}06)^2.$$

Сравнивая последнее равенство Y_{sb} с (20), видим, что их коэффициенты можно приравнять:

$$1{,}096g_{11} + g_{12} + 0{,}25g_{13} = 1{,}084;$$
$$1{,}096g_{21} + g_{22} + 0{,}25g_{23} = 25{,}29;$$
$$1{,}096g_{31} + g_{32} + 0{,}25g_{33} = 8{,}97.$$

Полученные линейные формы не являются системой уравнений, так как все коэффициенты g_{ij} различны. Однако если проделать те же операции со строками $b=0{,}2$ и $b=0{,}7$, то можно получить еще шесть линейных форм, которые с уже полученными тремя позволяют найти три системы линейных уравнений с тремя неизвестными в каждом. Решив их, получим все девять коэффициентов уравнения (21′). Для нашей задачи коэффициенты в (21′) равны: $g_{11}=0{,}045$; $g_{12}=1{,}347$; $g_{13}=-1{,}25$; $g_{21}=1{,}497$; $g_{22}=23{,}050$; $g_{23}=2{,}386$; $g_{31}=-1{,}693$; $g_{32}=8{,}341$; $g_{33}=9{,}948$.

Оптимальные значения $\bar{s}$ и $\bar{b}$ по уравнению (21′) можно найти различными способами. Достаточно просто это решить, взяв частные производные по $\bar{s}$ и $\bar{b}$ и приравняв их к нулю. После несложных алгебраических преобразований получаем два равенства:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{g_{11}(\bar{s}+0{,}425)(\bar{s}-0{,}06)+\alpha_s[g_{21}+g_{31}(\bar{s}-0{,}06)^2]}{g_{13}(\bar{s}+0{,}425)(\bar{s}-0{,}06)+\alpha_s[g_{23}+g_{33}(\bar{s}-0{,}06)^2]}=\alpha_b, \qquad (22)$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{g_{11}\bar{b}(\bar{b}+0{,}47)+\alpha_b(g_{12}+g_{13}\bar{b}^2)}{g_{31}\bar{b}(\bar{b}+0{,}47)+\alpha_b(g_{32}+g_{33}\bar{b}^2)}=\alpha_s, \qquad (23)$$

где $a_b=\bar{b}(\bar{b}+0{,}47)^4$; $\alpha_s=(\bar{s}-0{,}06)(\bar{s}+0{,}425)^4$.

Значения α_b и α_s можно определить по графикам (рис. 3). Расчет ведется в следующем порядке: задается произвольное значение $\bar{s}$ и подсчитывается левая часть уравнения (22). По графику для найденного значения α_b находится $\bar{b}$, которое затем подставляется в левую часть уравнения (23). По α_s с графика снимается значение $\bar{s}$; если оно отличается от принятого произвольно, то расчет повторяется при найденном $\bar{s}$. Процесс быстро сходится.

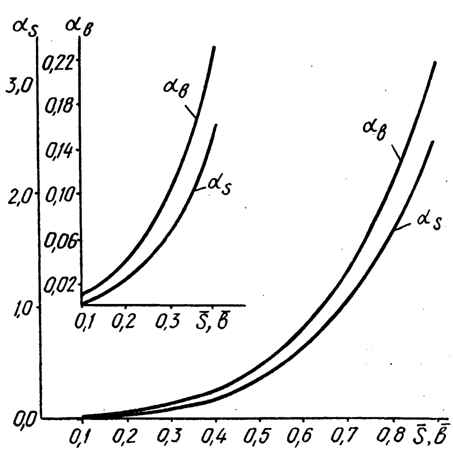

Рис. 3. Графики для определения $\bar{s}$ и $\bar{b}$.

Для рассматриваемого примера получены оптимальные значения: $\bar{s}=0{,}262$, $\bar{b}=0{,}90$, которые позволяют определить абсолютные значения s и b по переходным формулам: $s=9{,}9$ *м*, $b=89$. Подставив найденные значения s и b в уравнение (12), получаем минимальное значение ежегодных затрат: $\bar{P}_э=27{,}70$ руб. на 1 *га*.

Для данной задачи минимальное значение функции практически будет при устройстве совершенных скважин (ввиду льготного тарифа на стоимость электроэнергии $\sigma=0{,}008$ *квт·ч*).

Таким образом, метод аппроксимации позволяет определять оптимальные значения параметров вертикального дренажа при использовании расчетных зависимостей любой сложности. Метод основан на решении задач не только по исходным данным, но и на ограниченном количестве данных, получаемых при подсчете значений целевой функции. Для рассмотренной задачи достаточно точная аппроксимация уравнениями (17) и (19) будет при изменении переменных в пределах s от 7 до 21 *м*, b от 30 до 90 *м* (при шаге $s=1{,}5$ *м*, $b=7{,}0$ *м*). Эти пределы определяют граничные условия в данной задаче.

Для рассмотренной задачи расчета вертикального дренажа подобрано аппроксимирующее уравнение (21′), которое позволяет найти оптимальные значения s и b. Поскольку исходные данные (σ, T, k, D) могут быть различны, то для нахождения коэффициентов g_{ij} в уравнении (21′) нужно вычислить три системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

Таким образом, если в исходное уравнение вводятся данные, не зависящие от выбранных переменных, то полученное аппроксимирующее уравнение (21′) остается в силе. Если же вводятся данные, зависящие от выбранных переменных (т. е. изменяющие производную функции $\bar{P}_э$), то задачу необходимо решать заново, т. е. подбирать новое аппроксимирующее уравнение. Увеличение количества переменных (например, до трех) приводит к использованию пространственных матриц и большему объему вычислительной работы, но не меняет порядка вычислений.

Литература

1. *Н. М. Решеткина.* Вертикальный дренаж на орошаемых землях аридной зоны. «Вопросы гидротехники», вып. 30, 1969. 2. *Н. М. Решеткина.* Развитие вертикального дренажа в Узбекистане. «Вопросы гидротехники», вып. 9, 1962. 3. *Н. М. Решеткина, В. А. Барон, Х. Якубов.* Вертикальный дренаж орошаемых земель. М., 1966. 4. *С. Ф. Аверьянов.* Расчет осушительного действия глубоких дренажей. Науч. зап. МГМИ, т. 15, 1948. 5. *Ф. М. Бочевер и др.* Основы гидрогеологических расчетов. М., 1969. 6. *В. М. Шестаков.* Теоретические основы оценки подпора, водоснабжения и дренажа. М., 1965. 7. *С. Ф. Аверьянов, Т. И. Сурикова.* Основные положения расчета вертикального дренажа орошаемых земель. «Гидротехника и мелиорация», 1966, № 8. 8. *Н. Н. Омелин.* О параметрах водоподъемного оборудования для вертикального дренажа. «Гидротехника и мелиорация», 1964, № 2. 9. *И. В. Минаев.* Экономическое размещение скважин вертикального дренажа. «Гидротехника и мелиорация», 1958, № 10. 10. *В. А. Барон, Х. Я. Якубов.* Технико-экономический расчет оптимальных глубин и диаметров скважин вертикального дренажа. «Вопросы гидротехники», вып. 17, 1964. 11. *М. К. Сабитов.* К вопросу об экономическом расчете насосных скважин. Сб. «Вопросы водного хозяйства и гидротехники». Вып. 1. Фрунзе, 1964. 12. *Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова.* Численные методы анализа. М., 1962. 13. *П. В. Мелентьев.* Приближенные вычисления. М., 1962. 14. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц. Изд. 3-е. М., 1967. 15. *Н. П. Соколов.* Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960. 16. *И. В. Минаев.* Метод аппроксимации и примерный расчет оптимальных параметров водопонижающего дренажа. Сб. «Водные ресурсы и их использование». Минск, 1970. 17. *Г. В. Еременко.* Режим откачек из скважины вертикального дренажа в условиях Ферганы. «Гидротехника и мелиорация», 1964, № 2. 18. *В. А. Барон.* О режиме откачек из скважины вертикального дренажа. Сб. «Вопросы гидротехники». Вып. 9. Ташкент, 1962. 19. *Х. А. Кадыров.* Режим откачек по системе вертикального дренажа в переходный период. Тр. Среднеазиат. НИИ ирригации, вып. 112, 1967. 20. *Т. П. Горезко, И. В. Минаев.* Лабораторные опыты по созданию вакуумированного дренажа для водно-воздушных мелиораций. Сб. «Вопросы осушения (материалы конференции)». Киев, 1969. 21. *С. К. Абрамов, В. Д. Бабушкин.* Методы расчета притока воды к буровым скважинам. М., 1955. 22. *Г. В. Богомолов, А. И. Силин-Бекчурин.* Специальная гидрогеология. М., 1955.