ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

МИНСК 1972

В. Б. Хейнман

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ

Для исследования колебаний речного стока в настоящее время широко применяются методы математической статистики. Фазовооднородные величины речного стока, полученные на основе непосредственных измерений, рассматриваются как случайные величины, подчиняющиеся асимметричным законам распределения.

В Советском Союзе наибольшим распространением пользуются биномиальные кривые распределения (кривые Пирсона III типа) и трехпараметрическое гамма-распределение (кривые С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля).

Указанные кривые характеризуются тремя параметрами (нормой, коэффициентом вариации и коэффициентом асимметрии), которые обычно определяются методом моментов.

Ввиду того, что гидрологические ряды обычно являются короткими (число их членов редко превышает 50), особое значение имеет установление достоверности выборочных оценок параметров кривой обеспеченности. Для этого находят их стандартные ошибки. С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [1, 2] были получены формулы для стандартных ошибок параметров $\overline{x}$, C_v, C_s, найденных по методу моментов, для совокупностей, распределенных по закону кривой Пирсона III типа при условии, что $C_s=2C_v$.

Точность выборочной оценки параметров зависит от числа членов выборки (чем больше членов ряда, тем ближе оценка параметра к его истинному значению). Точность также зависит от величины коэффициента изменчивости исследуемого явления (чем меньше C_v, тем меньше погрешность).

Члены гидрологических рядов не являются независимыми. Анализ колебаний речного стока показывает, что обычно образуются группировки многоводных и маловодных лет, т. е. наблюдается тенденция к сохранению аномалий. Это является ,главным образом, следствием переходящих запасов влаги в бассейне от одного года к другому. Следовательно, между смежными годами должна существовать связь той или иной тесноты. Наиболее сильно она проявляется для озерных рек со значительной естественной зарегулированностью стока.

Вопросами выявления связи между годовым стоком смежных лет, анализом влияния этой связи на характер колебания стока, а также значением тесноты ее для водохозяйственных расчетов впервые занялся П. А. Ефимович [3]. В дальнейшем эти вопросы продолжали исследоваться С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [1, 4], Д. Л. Соколовским [5], Г. Г. Сванидзе [6], А. Ш. Резниковским [7] и другими для рек СССР и Г. П. Калининым для рек Северного полушария [8]. Все эти исследования показали, что выборочные коэффициенты корреляции между стоком рек для смежных лет оказываются невысокими (за исключением озерных рек) и на основании формально-статистических критериев в большинстве являются незначимыми. Тем не менее существенно, что они в подавляющем большинстве положительны и близки друг к другу. Так, по данным Г. Г. Сванидзе [6], коэффициенты корреляции r для 72 рек СССР с рядами наблюдений в 50 лет и более колеблются от 0,04 до 0,69 при среднем $r=0{,}302$ и в 95% случаев от 0,10 до 0,50. Почти такое же среднее значение r (0,298) получено А. Ш. Резниковским [7] для 83 рек СССР и мира и более чем для 80% случаев $r=0{,}10—0{,}50$.

При наличии коррелятивной связи между членами ряда среднегодовых расходов выборочные оценки параметров систематически преуменьшаются по сравнению с параметрами совокупности. Ввиду этого уменьшается точность формул оценки параметров.

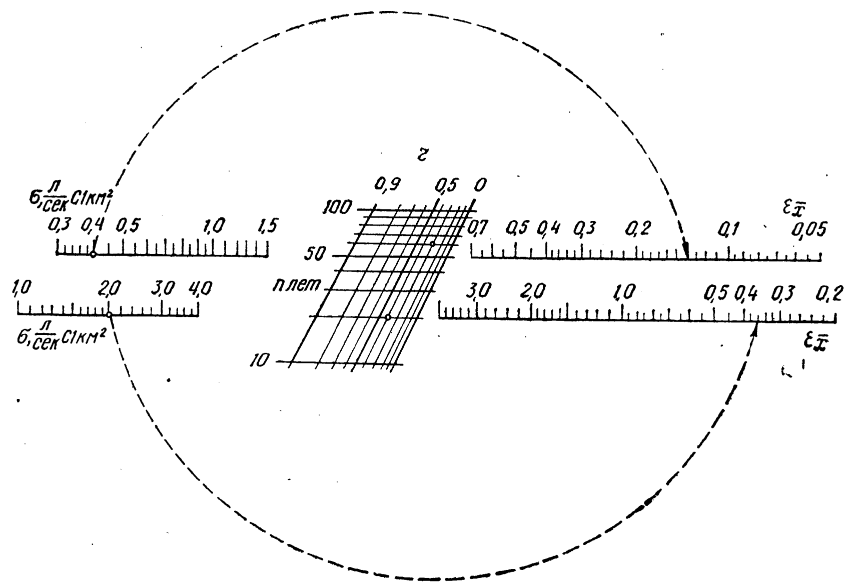

Рис. 1. Номограмма для стандартной ошибки нормы.

Для коррелятивно связанных рядов С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель в качестве модели приняли простую цепь Маркова [1, 4]. В соответствии с этой моделью выведены стандартные ошибки параметров.

Стандартная ошибка нормы ε_x вычисляется по формуле, полученной С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем:

$$\varepsilon_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+\dfrac{2r}{n(1-r)}\left(n-\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)}{1-\dfrac{2r}{n(n-1)(1-r)}\left(n-\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)}}, \qquad (1)$$

где σ — стандарт, выражаемый нами, *л/сек* с 1 *км*²; r — коэффициент корреляции; n — число членов ряда.

Для несвязных рядов ($r=0$) имеем

$$\varepsilon_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Для облегчения расчетов по формуле (1) нами построена номограмма из равноудаленных точек, дающая возможность одной засечкой циркуля находить значения $\varepsilon_{\bar{x}}$ по заданным значениям σ, r и n (рис. 1).

При построении номограммы использовались методы, разработанные Г. С. Хованским [9].

Чтобы построить номограмму, уравнение (1) приводим к канонической форме вида:

$$f_{12} = f_3 + f_4.$$

Для этого прологарифмируем уравнение (1). Получим

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1+\frac{2r}{n(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)}{n\left[1-\frac{2r}{n(n-1)(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)\right]} = \lg\varepsilon_{\bar{x}} - \lg\sigma.$$

Пределы изменения переменных: $0 \leqslant r \leqslant 0{,}9$; $10 \leqslant n \leqslant 100$ лет; $0{,}3 \leqslant \sigma \leqslant 4{,}0$ *л/сек* с 1 *км²*; $0{,}7 \leqslant \varepsilon_{\bar{x}} \leqslant 4$.

Для сокращения размеров номограммы весь интервал изменения σ разбиваем на две части: $0{,}3 \leqslant \sigma \leqslant 1{,}5$ и $1{,}0 \leqslant \sigma \leqslant 4{,}0$. Для каждой части строим свою шкалу засечек.

Уравнения элементов номограммы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты	Поле центров (r, n)	Верхние шкалы		Нижние шкалы	
		шкала засечек $\varepsilon_{\bar{x}}$	шкала засечек σ	шкала засечек $\varepsilon_{\bar{x}}$	шкала засечек σ
x	$-50\lg\frac{1+\frac{2r}{n(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)}{n\left[1-\frac{2r}{n(n-1)(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)\right]}$	$-100\lg\varepsilon_{\bar{x}}+35$	$100\lg\sigma-35$	$100-001\lg\varepsilon_{\bar{x}}$	$100\lg\sigma-100$
y	$50(\lg n - 1)$	35	35	15	15

Пример 1. Дано: $n=20$ лет, $r=0{,}4$, $\sigma=2{,}0$ *л/сек* с 1 *км²*. Найти $\varepsilon_{\bar{x}}$.

В поле (n, r) номограммы находим точку, соответствующую значениям $n=20$ лет и $r=0{,}4$ и помещаем в нее ножку циркуля. Радиусом, равным расстоянию от этой точки до точки нижней шкалы σ с пометкой 2,0, проводим дугу окружности до пересечения с нижней шкалой $\varepsilon_{\bar{x}}$. На последней читаем ответ: $\varepsilon_{\bar{x}}=0{,}36$.

Пример 2. Дано: $n=20$ лет, $r=0{,}4$, $\sigma=0{,}4$ *л/сек* с 1 *км²*. Найти $\varepsilon_{\bar{x}}$.

Для решения поступаем так же, как и в предыдущем примере, только значение $\sigma=0{,}4$ берем на верхней шкале σ и ответ читаем на верхней шкале $\varepsilon_{\bar{x}}$. Ответ: $\varepsilon_{\bar{x}}=0{,}14$.

Относительная стандартная ошибка $\delta_{\bar{x}}$ (в %) *нормы* вычисляется по формуле

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{100C_v}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+\frac{2r}{n(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)}{1-\frac{2r}{n(n-1)(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)}}. \qquad (2)$$

Для вычисления $\delta_{\bar{x}}$ может быть использована номограмма, приведенная на рис. 1. В этом случае на шкале σ берут значения C_v и на шкале $\varepsilon_{\bar{x}}$ читают значения $\delta_{\bar{x}}$. Чтобы найти значения $\delta_{\bar{x}}$ в процентах, надо результат умножить на 100.

Стандартная ошибка коэффициента вариации. Стандартная ошибка ε_{C_v} оценки C_v, вычисленной по формуле моментов, была дана впервые С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [1, 4]:

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{C_v \sqrt{1 + 3C_v^2}}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

В работе [2] эта формула ими же была уточнена и дана в виде

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^2}. \tag{3}$$

Д. Л. Соколовский [5] предлагает для нахождения ε_{C_v} следующую формулу:

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^2}.$$

В работах [7, 10] было показано, что формула (3) дает практически приемлемые результаты для рядов с небольшими значениями C_v. При больших значениях C_v расхождения между значениями ε_{C_v}, найденными по формуле (3), и фактическими, становятся существенными. Так, при $C_v = 1$ это расхождение достигает 18%.

Для того, чтобы привести в соответствие теоретическую формулу (3) с фактическими данными, Е. Г. Блохинов [10] предлагает ввести поправку, установленную им эмпирически:

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{n}{n + 4C_v^2} \cdot \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^2}. \tag{4}$$

Произведенные исследования [7, 10, 11] показывают хорошее соответствие значений ε_{C_v}, вычисленных по формуле (4), с фактическими.

Для связных рядов стандартная ошибка коэффициента вариации зависит от величины коэффициента корреляции r между смежными членами ряда. В этом случае пользуются формулой, учитывающей тесноту связи [7, 10]:

$$\varepsilon C_v = \frac{n}{n+4C_v^2} \cdot \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{(1 + C_v^2)\left(1 + \frac{3C_v r^2}{1+r}\right)}. \tag{5}$$

При отсутствии связи ($r=0$) формула (5) обращается в формулу (4). Для формулы (5) построена номограмма с ориентированным транспарантом в виде линейки.

Прологарифмировав уравнение (5), получаем

$$\lg \varepsilon_{C_v} = \lg\left(\frac{n}{n + 4C_v^2} \cdot \frac{C_v}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{1}{2} \lg(1 + C_v^2)\left(1 + \frac{3C_v r^2}{1+r}\right).$$

Составляем систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\lg(1+C_v^2)\left(1+\frac{3C_v r^2}{1+r}\right)-\lg\varepsilon_{C_v}=-\lg\frac{n}{n+4C_v^2}\cdot\frac{C_v}{\sqrt{2n}},\\ &T_1-T_4=T_1-T_4, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где T_1 — произвольная функция переменной C_v; T_4 — произвольная функция переменной ε_{C_v}.

Мы приняли

$$T_1=100\lg C_v,\ T_4=0.$$

Для системы уравнений вида (6) Г. С. Хованским [12, 13] разработана методика построения номограмм с ориентированным транспарантом в виде линейки.

Уравнения элементов номограммы приведены в табл. 2.

Таблица 2

Неподвижная плоскость		
Координаты	Поле (C_v, r)	Поле (C_v, n)
x	$50\lg(1+C_v^2)\left(1+\frac{3C_v r^2}{1+r}\right)$	$-100\lg\frac{nC_v}{(n+4C_v^2)\sqrt{2n}}$
y	$100\lg C_v$	$100\lg C_v$
Транспарант		
Координаты	Шкала ε_{C_v}	Фиксированная точка
x	$100\lg\varepsilon_{C_v}$	0
y	0	0

Номограмма приведена на рис. 2, где и дан ключ пользования. Направляющими линиями для ориентирования транспаранта являются линии C_v.

Пример 3. Дано: $C_v=0{,}7$, $n=20$ лет, $r=0{,}3$. Найти ε_{C_v}.

Пример может быть решен двумя способами.

Первый способ. Транспарант вырезаем и накладываем на неподвижную плоскость так, чтобы его край совпадал с линией $C_v=0{,}7$ на неподвижной плоскости, и стрелка транспаранта указывала на линию $n=20$. Против линии $r=0{,}3$ на транспаранте читаем ответ: $\varepsilon_{C_v}=0{,}135$.

Второй способ. Весь чертеж помещаем на одной плоскости. В бинарном поле (C_v, n) берем точку, соответствующую значениям $C_v=0{,}7$ и $n=20$, и помещаем в нее ножку циркуля. Вторую ножку помещаем на линию $r=0{,}3$ так, чтобы обе ножки находились на одной линии C_v ($C_v=0{,}7$). Не меняя расстояния между ножками циркуля, одну из них помещаем на стрелку транспаранта. Вторая ножка пересечет шкалу ε_{C_v} в точке $\varepsilon_{C_v}=0{,}135$.

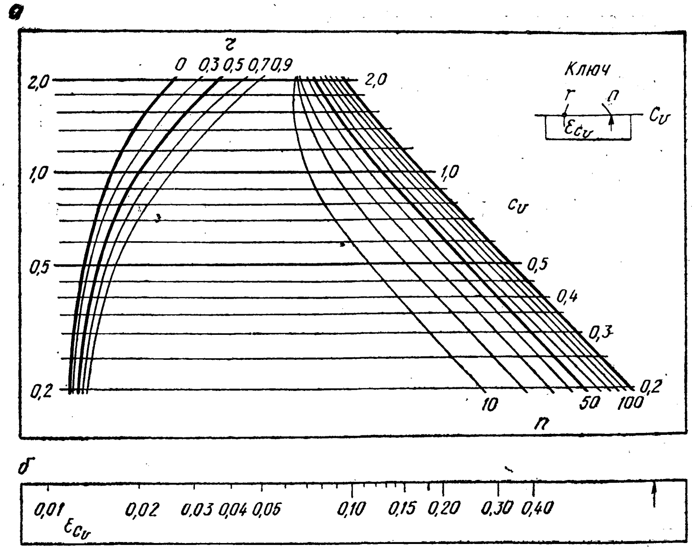

Рис. 2. Номограмма для стандартной ошибки коэффициента вариации:
а — неподвижная плоскость; *б* — транспарант.

Относительная стандартная ошибка δ_{C_v} (в %) может быть найдена по формуле

$$\delta_{C_v} = \frac{100n}{(n+4C_v^2)\sqrt{2n}} \sqrt{(1+C_v^2)\left(1+\frac{3C_v r^2}{1+r}\right)}. \qquad (7)$$

Для этой формулы (табл. 3) построена номограмма с ориентированным транспарантом в виде линейки (рис. 3). Правила пользования номограммой такие же, как и номограммой, приведенной на рис. 2.

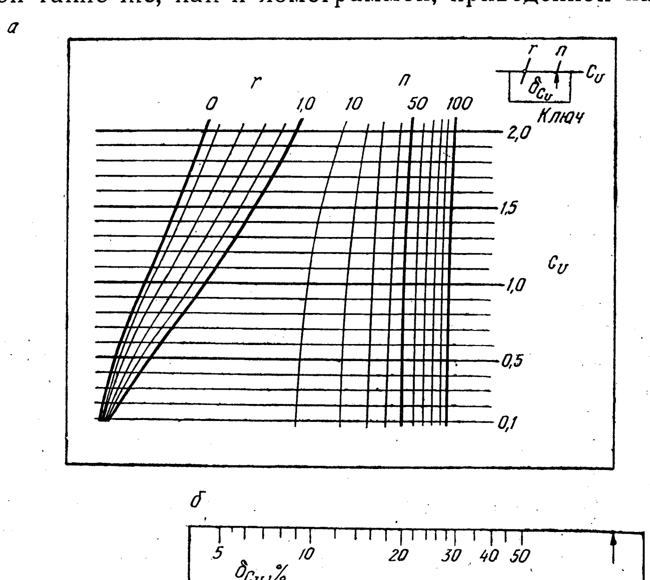

Рис. 3. Номограмма для относительной стандартной ошибки коэффициента вариации:
а — неподвижная плоскость; *б* — транспарант.

Таблица 3

Неподвижная плоскость		
Координаты	Поле (C_v, r)	Поле (C_v, n)
x	$50 \lg (1+C_v^2)\left(1+\frac{3C_v r^2}{1+r}\right)$	$-100 \lg \frac{100n}{n+4C_v^2}$
y	$50\, C_v$	$50\, C_v$
Транспарант		
Координаты	Шкала δ_{C_v}	Фиксированная точка
x	$100 \lg \delta_{C_v}$	0
y	0	0

Стандартная ошибка ε_{C_s} *коэффициента асимметрии* C_s, вычисленного методом моментов, согласно С. Н. Крицкому и М. Ф. Менкелю [1], определяется по формуле

$$\varepsilon_{C_s} = \sqrt{\frac{6}{n}\,(1+6C_v^2+5C_v^4}\,. \qquad (8)$$

Для этой формулы построена номограмма из выравненных точек (рис. 4). Уравнения элементов номограммы приведены в табл. 4.

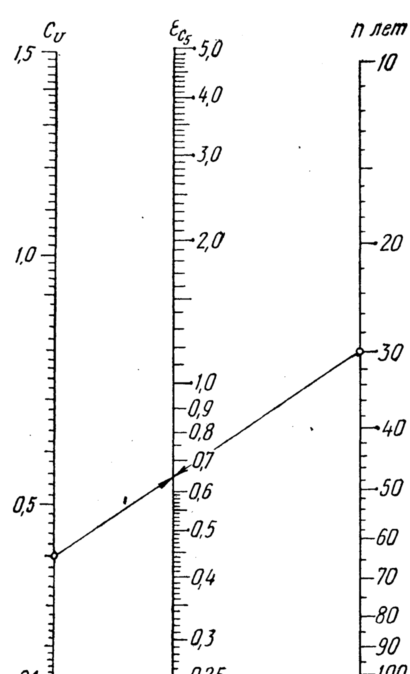

Рис. 4. Номограмма для стандартной ошибки коэффициента асимметрии.

Таблица 4

Координаты	Шкала C_v	Шкала n	Шкала ε_{C_s}
x	0	100	39
y	$130\lg6\left(1+6C_v^2+5C_v^4\right)-104$	$200(2-\lg n)$	$157{,}58\lg\varepsilon_{C_s}+94{,}55$

Пример 4. Дано $n=30$ лет, $C_v=0{,}4$. Найти ε_{C_s}.

Прикладываем край линейки к точке шкалы C_v с пометкой 0,4 и к точке шкалы n с пометкой 30. В точке пересечения края линейки со шкалой ε_{C_s} читаем ответ: $\varepsilon_{C_s}=0{,}65$.

Следует отметить, что согласно Е. Г. Блохинову [10], для значений $C_v\leqslant 0{,}5$ формула (8) дает практически приемлемый результат. При значениях $C_v>0{,}5$ значения ε_{C_s}, вычисленные по формуле (8), существенно преувеличены.

Литература

1. *С. Н. Крицкий, М. Ф. Менкель.* О приемах исследования случайных колебаний речного стока. Тр. НИУ ГМС, сер. IV, вып. 29, 1946. 2. *С. Н. Крицкий, М. Ф. Менкель.* О некоторых приемах статистического анализа гидрологических рядов. Тр. ГГИ, вып. 143, 1968. 3. *П. А. Ефимович.* Вопросы водохозяйственных расчетов и гидрологии. М., 1936. 4. *С. Н. Крицкий, М. Ф. Менкель.* Гидрологические основы речной гидротехники. М., 1950. 5. *Д. Л. Соколовский.* Речной сток. Л., 1968. 6. *Г. Г. Сванидзе.* Основы регулирования речного стока методом Монте-Карло. Тбилиси, 1964. 7. Водноэнергетические расчеты методом Монте-Карло. Под ред. А. Ш. Резниковского. М., 1969. 8. *Г. П. Калинин.* Проблемы глобальной гидрологии. Л., 1968. 9. *Г. С. Хованский.* Приспособляемые номограммы из равноудаленных точек. Номографический сборник, № 4, М., 1967. 10. *Е. Г. Блохинов.* Об особенностях распределения выборочных оценок параметров речного стока. Тр. ГГИ, вып. 134, 1966. 11. *С. Г. Костина, А. Ш. Резниковский.* О влиянии степени связности гидрологических рядов на моментные оценки их параметров распределения. Сб. «Проблемы речного стока». М., 1968. 12. *Г. С. Хованский.* Номограммы с ориентированным транспарантом. М., 1957. 13. *Г. С. Хованский.* Методы номографирования. М., 1964.