Е. Г. Шешуков, Д. А. Козлов

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

При исследовании движения тела под свободной поверхностью тяжелой жидкости, при глиссировании на поверхности жидкости, а также при движении жидкости в канале в основном применялась линеаризированная теория. Считалось, что свободная поверхность бесконечно мало отклоняется от невозмущенного уровня и условия на границе сносились на этот уровень.

К фундаментальным работам по линеаризированной теории относятся работы Н. Е. Кочина, М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева. С помощью методов, предложенных в этих работах, выполнено большое количество исследований как в нашей стране, так и за рубежом. В основе всех этих работ лежит функция

$$\Phi = i\,\frac{d^2w}{dz^2} - \nu\,\frac{dw}{dz},$$

введенная М. В. Келдышем [1]. Известны решения задач в нелинейной постановке. На основе аппроксимации Леви-Чивита введем одну функцию, с помощью которой можно будет решить ряд задач о течении тяжелой жидкости.

Метод решения. Рассмотрим некоторое установившееся потенциальное движение тяжелой жидкости. Причем на бесконечности вверх по течению это движение плоскопараллельное.

Пусть на свободной поверхности выполняется условие Леви-Чивита, записанное в безразмерном виде

$$\frac{dr}{d\varphi} + \alpha\theta = 0, \tag{1}$$

где θ, $r = \ln v$ — вещественная и мнимая части функции Н. Е. Жуковского $F = i\ln\frac{dw}{dz} = \theta + ir$; $\alpha = \frac{1}{\mathrm{Fr}}$ — величина, обратная числу Фруда.

Это условие Леви-Чивита получено при предположениях, что r и θ малы.

Введем в рассмотрение регулярную на бесконечности функцию

$$\Phi = i\,\frac{dF}{dw} - \alpha F, \tag{2}$$

причем

$$\mathrm{Re}\,\Phi = -\frac{\partial r}{\partial\varphi} - \alpha\theta,$$

$$\mathrm{Im}\,\Phi = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \alpha r.$$

Оказывается, что на свободной поверхности

$$\operatorname{Re}\Phi = 0. \tag{3}$$

На других границах области течения могут быть различные условия. Например, если отыскивается граница по заданному распределению давления, скорости или угла наклона θ как функции потенциала скорости φ, то на ней будут соответственно условия

$$\operatorname{Re}\Phi = f_1(\varphi), \quad \frac{d\operatorname{Re}\Phi}{d\varphi} + \alpha \operatorname{Im}\Phi = f_2(\varphi), \quad \frac{d\operatorname{Im}\Phi}{d\varphi} - \alpha \operatorname{Re}\Phi = f_3(\varphi),$$

где $f_1, f_2, f_3,$ — известные функции.

Предположим, что по условиям на свободной поверхности и на других границах области течения определена функция Φ в области изменения комплексного потенциала w. Тогда, решая линейное неоднородное уравнение

$$i\frac{dF}{dw} - \alpha F = \Phi(w),$$

найдем функцию $F(w)$.

Общим решением однородного уравнения

$$i\frac{dF}{dw} - \alpha F = 0$$

является $F = Ae^{-\alpha wi}$.

Применяя для решения неоднородного уравнения обычный метод вариации произвольных постоянных, приходим к уравнению

$$i\frac{dA}{dw}e^{-i\alpha w} = \Phi(w),$$

откуда

$$A = -i\int_{-\infty}^{w} e^{i\alpha w}\Phi(w)\,dw + B.$$

Общим решением неоднородного уравнения будет

$$F = e^{-i\alpha w}\left[B - i\int_{-\infty}^{w} e^{i\alpha w}\cdot\Phi(w)\,dw\right].$$

Постоянная B определяется из условия $F=0$ при $w \to -\infty$. Тогда $B=0$ и для функции F получаем окончательное выражение

$$F = -ie^{-i\alpha w}\int_{-\infty}^{w} e^{i\alpha w}\cdot\Phi(w)\,dw. \tag{4}$$

Так как $F = i\ln\dfrac{dw}{dz} = \theta + ir$, то $dz = e^{-r+i\theta}dw$.

Пусть на свободной поверхности $\psi=0$, тогда, так как r и θ малы, для определения вида свободной поверхности получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} dx &= (1-r)\,d\varphi, \\ dy &= \theta d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для нахождения r и θ на свободной поверхности нужно воспользоваться формулой (4).

На свободной поверхности функция F имеет вид

$$F=-ie^{-i\alpha\varphi}\int\limits_{-\infty}^{\varphi} e^{i\alpha t}\,\mathrm{Im}\,\Phi(t)\,dt.$$

Исследуем поведение этой функции на бесконечности.

Ясно, что при $\varphi=-\infty$ $F=0$ $(\theta=r=0)$, т. е. свободная поверхность при $x\longrightarrow-\infty$ имеет асимптоту $y=\mathrm{const}$.

При $\varphi\longrightarrow+\infty$ имеем

$$\theta+ir=-ie^{-i\alpha\varphi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\,\mathrm{Im}\,\Phi(t)\,dt.$$

Пусть

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\,\mathrm{Im}\,\Phi(t)\,dt=H(\alpha).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\theta&=|H(\alpha)|\cdot\sin(\alpha\varphi+\omega),\\ r&=-|H(\alpha)|\cdot\cos(\alpha\varphi+\omega),\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

где $\mathrm{tg}\,\omega=-\dfrac{\mathrm{Im}\,H(\alpha)}{\mathrm{Re}\,H(\alpha)}$.

Теперь, воспользовавшись формулами (5), (6) и интегрируя, получим вид свободной поверхности на бесконечности вниз по течению

$$y=-\frac{1}{\alpha}\,|H(\alpha)|\cos(\alpha x+\omega).\tag{7}$$

Амплитуда волн на бесконечности вниз по течению равна

$$a=\frac{1}{\alpha}\,|H(\alpha)|.$$

Свободные волновые движения жидкости. Рассмотрим установившиеся свободные волновые движения тяжелой жидкости бесконечной глубины. Область изменения комплексного потенциала, соответствующая физической области течения, представляет собой нижнюю полуплоскость. Функция $\Phi=i\dfrac{dF}{dw}-\alpha F$ равна нулю. Тогда

$$F=Ae^{-i\alpha w},\tag{8}$$

где $(A=A_1+iA_2)$.

Выделим вещественную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned}\theta&=A_1e^{\alpha\psi}\cos\alpha\varphi+A_2e^{\alpha\psi}\sin\alpha\varphi,\\ r&=-A_1e^{\alpha\psi}\sin\alpha\varphi+A_2e^{\alpha\psi}\cos\alpha\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

На свободной поверхности имеем:

$$\left.\begin{aligned}\theta&=A_1\cos\alpha\varphi+A_2\sin\alpha\varphi,\\ r&=-A_1\sin\alpha\varphi+A_2\cos\alpha\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Пусть при $\varphi=0$ $r=0$. Тогда $A_2=0$. Из (10) находим:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= A_1 \cos \alpha\varphi, \\ r &= -A_2 \sin \alpha\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Переходя к физической области течения по формулам (5) и интегрируя, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi - \frac{A_1}{\alpha} \cos \alpha\varphi, \\ y &= \frac{A_1}{\alpha} \sin \alpha\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Считая амплитуду волн $a=\dfrac{A_1}{\alpha}$ малой, получим значение свободной поверхности в форме волн Эри

$$y = a \sin \alpha x. \tag{13}$$

Движение жидкости в канале. Рассмотрим задачу в плоском движении тяжелой несжимаемой жидкости в открытом канале с криволинейным дном. Область изменения комплексного потенциала будет представлять бесконечную полосу, ширина которой пусть равна 1.

Определим форму дна канала по некоторым заданным на нем характеристикам, а также вид свободной поверхности.

1. На поверхности дна канала известно распределение давления как однозначная, непрерывная функция потенциала скорости φ:

$$P = P(\varphi)\,(-\infty < \varphi < +\infty). \tag{14}$$

Причем считаем, что допущения Леви-Чивита о малости r и θ верны для всего потока жидкости.

Регулярную функцию $\Phi(w)$ в бесконечной полосе будем определять по граничным условиям

$$\operatorname{Re}\Phi(w) = \begin{cases} 0, & (\psi = 0,\ -\infty < \varphi < +\infty), \\ f(\varphi), & (\psi = -1,\ -\infty < \varphi < +\infty), \end{cases}$$

где $f(\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{dP}{d\varphi}$.

По формуле Вудса для полосы находим

$$\Phi(w) = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi(t-w)}{2}\,dt. \tag{15}$$

2. На поверхности дна задано распределение скорости как функция дуговой абсциссы s:

$$v = v(s)\,(-\infty < s < +\infty). \tag{16}$$

Из (16) и соотношения $d\varphi = v\,ds$ видно, что можно считать известным $r=\ln v$ как функцию потенциала скорости φ:

$$r = r(\varphi)\,(-\infty < \varphi < +\infty). \tag{17}$$

Тогда для нахождения функции $\Phi(w)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\Phi(w) = 0 \qquad (\psi = 0, \ -\infty < \varphi < +\infty), \\ &\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{Re}\Phi) + \alpha \operatorname{Im}\Phi = f_1(\varphi) \quad (\psi = -1, \ -\infty < \varphi < +\infty), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $f_1(\varphi) = -\dfrac{d^2 r}{d\varphi^2} - \alpha^2 r$.

Представим регулярную в бесконечной полосе функцию в виде

$$\Phi(w) = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) \operatorname{th} \frac{\pi(t-w)}{2}\, dt, \tag{19}$$

где $\gamma = \operatorname{Re}\Phi(\varphi - i)$.

Воспользовавшись второй формулой из (18), приходим к интегро-дифференциальному уравнению для определения γ

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} - \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(t-\varphi)}{2}\, dt = f_1(\varphi). \tag{20}$$

Применяя к этому уравнению двустороннее преобразование Лапласа, получим

$$\pi p \Gamma(p) + \alpha \Gamma(p) \operatorname{cth} \pi p = F(p), \quad \operatorname{Re} p = 0, \tag{21}$$

где $\Gamma(p) \doteqdot \gamma(\pi\varphi)$, $F(p) \doteqdot f_1(\pi\varphi)$.

Отсюда

$$\Gamma(p) = \frac{F(p)}{\pi p + \alpha \operatorname{ctg} \pi p}. \tag{22}$$

Искомое решение $\gamma(\pi\varphi)$ получается из (22) определением оригинала по данному изображению

$$\gamma(\pi\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{p\pi\varphi} F(p)\, dp}{p(\pi p + \alpha \operatorname{ctg} \pi p)}. \tag{23}$$

3. Если на поверхности дна задано распределение угла наклона Θ как функции потенциала скорости φ:

$$\theta = \theta(\varphi) \quad (-\infty < \varphi < +\infty), \tag{24}$$

то для нахождения регулярной функции $\Phi(w)$ в области комплексного потенциала имеем следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\Phi = 0 \quad (\psi = 0, \ -\infty < \varphi < +\infty), \\ &\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{Im}\Phi) - \alpha \operatorname{Re}\Phi = f_2(\varphi), \quad (\psi = -1, \ -\infty < \varphi < +\infty), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $f_2(\varphi) = \alpha^2\theta + \dfrac{d^2\theta}{d\varphi^2}$.

В области изменения комплексного потенциала функцию $\Phi(w)$ будем искать в виде (19).

Для нахождения функции $\gamma(\pi\varphi)$ из (25) имеем

$$\alpha\gamma+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\gamma}{dt}\operatorname{cth}\frac{\pi(t-\varphi)}{2}\,dt=-f_2. \tag{26}$$

Применяя двустороннее преобразование Лапласа, получаем

$$\Gamma(p)=\frac{F(p)}{\alpha-\pi p\operatorname{ctg}\pi p},\quad \operatorname{Re}p=0, \tag{27}$$

где $\Gamma(p)\doteqdot\gamma(\pi\varphi)$, $F(p)\doteqdot-f_2(\pi\varphi)$.

Переходя к оригиналу, находим искомую функцию γ

$$\gamma(\pi\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{p\pi\varphi}\cdot F(p)\cdot dp}{p(\alpha-\pi p\operatorname{ctg}\pi p)}. \tag{28}$$

В рассмотренных задачах форма дна и вид свободной поверхности определяются по формулам $dx=\exp(-r)\cos\varphi d\Theta$; $dy=\exp(-r)\sin d\theta$. При этом r и θ, входящие в формулы, надо взять из (4) при $\psi=0$ для нахождения свободной поверхности и при $\psi=-1$ для дна канала.

Нахождение формы подводного крыла по заданному распределению скорости. Рассмотрим обратную краевую задачу о движении подводного крыла под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Форма профиля находится по заданному на нем распределению величины скорости как функции дуговой абсциссы s

$$v=v(s)\quad 0\leqslant s\leqslant l, \tag{29}$$

где l — длина контура профиля.

Решение задачи ищем во вспомогательной области кругового кольца $D_u, u=\operatorname{Re}^{i\gamma}$. Пусть $w=w(u)$ — известная функция, отображающая область изменения комплексного потенциала w на D_u. На одной границе кольца — окружности единичного радиуса, соответствующей свободной поверхности, $\operatorname{Re}\Phi(e^{i\gamma})=0$. На окружности радиуса H, соответствующей контуру профиля, представим

$$\operatorname{Im}\Phi(He^{i\gamma})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\gamma+b_k\sin k\gamma). \tag{30}$$

Коэффициенты a_k и b_k пока неизвестны.

Решая смешанную краевую задачу в области D_u, получим:

$$\operatorname{Re}\Phi(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^{-k}(R^k-R^{-k})}{1+H^{-2k}}(b_k\cos k\gamma-a_k\sin k\gamma),$$

$$\operatorname{Im}\Phi(u)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^{-k}(R^k+R^{-k})}{1+H^{-2k}}(a_k\cos k\gamma+b_k\sin k\gamma). \tag{31}$$

При $R=H$ находим значение $\operatorname{Re}\Phi$ на окружности, соответствующей контуру профиля

$$\operatorname{Re}\Phi(He^{i\gamma})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-H^{-2k}}{1+H^{-2k}}(b_k\cos k\gamma-a_k\sin k\gamma). \tag{32}$$

Таким образом, на окружности радиуса H имеем следующие два представления:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} - \alpha r &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma) = f_1, \\ \frac{dr}{d\varphi} + \alpha\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - H^{-2k}}{1 + H^{-2k}} (b_k \cos k\gamma - a_k \sin k\gamma) = f_2. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Исключая из этих выражений функцию θ, получим

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} + \alpha^2 r = \frac{df_2}{d\varphi} - \alpha f_1. \quad (34)$$

Видно, что левая часть равенства (34) является известной функцией угла γ. Раскладывая левую и правую части равенства (34) в ряды Фурье и затем приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах дуг одинаковой кратности, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных a_k, b_k. Таким образом, функция $\Phi = \Phi(w)$ будет найдена. По формулам перехода к физической плоскости определяем форму профиля и вид свободной поверхности жидкости.

Аналогично могут быть решены обратные краевые задачи о нахождении формы подводного крыла по условию на его контуре:

$$P = P(\varphi) \text{ или } v = v(\varphi), \text{ или } \theta = \theta(\varphi).$$

Литература

1. *Келдыш М. В.* Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. — «Технические заметки ЦАГИ», 1935, № 52.