И. В. Минаев

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ (РАСПОЗНАВАНИЯ) ВИДА ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Известно, что подбор эмпирических формул к данным эксперимента включает две основные операции: 1) определение вида функциональной зависимости (параболическая, гиперболическая, логарифмическая, тригонометрическая и т. д.) и 2) вычисление параметров формулы. В работе [1] приводится один способ вычисления коэффициентов для параболической зависимости, в основу которого положено использование конечных разностей.

Разделенные (на произвольных узлах интерполяции) или конечные (на равноотстоящих узлах интерполяции) разности могут служить для определения (распознавания) вида эмпирической формулы. Действительно, для примера параболической функции, приведенной в работе [1], таблица обрывается на четвертой разности, поскольку эта разность равна нулю (табл. 1). Подставляя в $\Delta^{(i)}$ разности ординат y_i для четвертой разности, найдем

Таблица 1

x_i	y_i	$\Delta^{(1)}=y_{i+1}-y_i$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$
0,1	0,216	0,183			
0,2	0,399	0,241	0,058		
0,3	0,640	0,305	0,064	0,006	
0,4	0,945	0,375	0,070	0,006	0
0,5	1,320	0,451	0,076	0,006	0
0,6	1,771	0,533	0,082	0,006	0
0,7	2,304	0,621	0,088	0,006	0
0,8	2,925	0,715	0,094	0,006	0
0,9	3,640				

$$\Delta^{(4)}=y_1-4y_2+6y_3-6y_4+4y_5-y_6=0, \tag{1}$$

т. е. получена нулевая комбинация ординат для параболы третьей степени. Возьмем эмпирическую зависимость (рис. 1) и попытаемся найти конечные разности для ординат кривой, снятой с графика на узлах интерполяции (N_i) в промежутке [0,1—0,9] с шагом 0,1 (табл. 2). Вид функции позволяет надеяться, что, как и в предыдущем случае, эмпирической формулой может быть многочлен не слишком высокой степени.

Данные табл. 2 показывают, что аппроксимация кривой с помощью достаточно простой зависимости параболического вида невозможна, поскольку пятая конечная (и более высокого порядка) разность не равна нулю. Тем не менее график зависимости, приведенной на рис. 1,

Таблица 2

x_i	y_i	$\Delta^{(1)}=y_{i+1}-y_i$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	$\Delta^{(5)}$
0,1	0,756	0,195	0,049	0,017	0,027	—0,017
0,2	0,951	0,244	0,066	0,044	0,010	0,061
0,3	1,198	0,310	0,110	0,054	0,071	0,107
0,4	1,508	0,420	0,164	0,125	0,178	0,392
0,5	1,928	0,584	0,289	0,303	0,570	
0,6	2,512	0,873	0,592	0,873		
0,7	3,385	1,465	1,465			
0,8	4,850	2,930				
0,9	7,780					

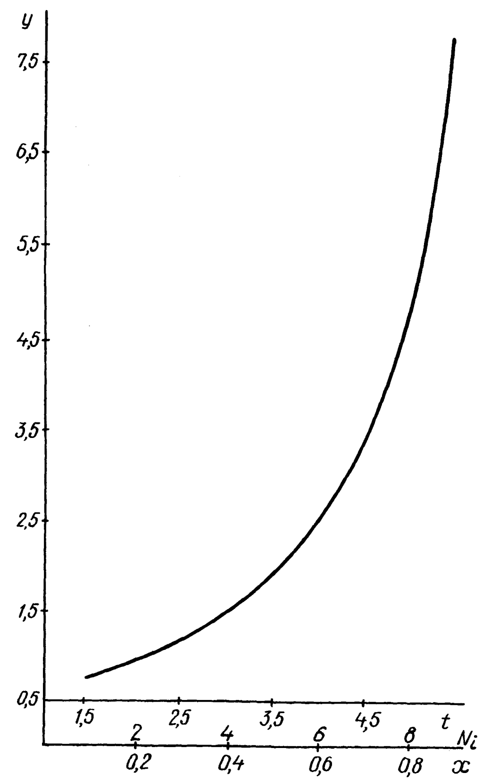

Рис. 1. График эмпирической зависимости.

с высокой степенью точности аппроксимируется дробно-рациональной функцией. Для обнаружения этого факта подставим значения ординат в их комбинацию

$$\bar{y}_1\bar{y}_2-4\bar{y}_1\bar{y}_3+3\bar{y}_1\bar{y}_4+3\bar{y}_2\bar{y}_3-4\bar{y}_2\bar{y}_4+\bar{y}_3\bar{y}_4=$$
$$=1{,}39074-4\cdot 1{,}10690+3\cdot 0{,}87682+3\cdot 0{,}87983-4\cdot 0{,}69695+0{,}55471=0,$$

где $\bar{y}_i$ — обратное значение ординат (табл. 3), снятых с графика (рис. 1); индексы указывают номера узлов интерполяции. На рис. 1 рассматриваются равноотстоящие узлы интерполяции; значения размерной величины t на оси абсцисс приведены к безразмерной шкале переходной формулой

$$x=\frac{t_i-(t_1-t_ш)}{10\,t_ш}, \tag{2}$$

Таблица 3

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_i	0,75600	0,95111	1,19500	1,50857	1,92667	2,51200	3,39000	4,85333	7,78000
$\overline{y}_i=\frac{1}{y_i}$	1,32275	1,05140	0,83682	0,66288	0,51903	0,39809	0,29498	0,20643	0,12853

где $t_1=1{,}5$ — начальная величина переменной (t_i) на рассматриваемом отрезке; $t_ш=0{,}5$ — шаг измерения переменной той же размерности, что и t_i (i — номер узла интерполяции).

Покажем далее, что нулевая комбинация ординат соответствует дробно-рациональной функции, найдем эту функцию и ее коэффициенты. Используем примененный в работе [2] метод нахождения нулевой комбинации ординат для функции вида

$$\beta = A\,\frac{(a_{+1}+x)}{(a_{-1}-x)}\,, \tag{3}$$

де a_{+1}, a_{-1} — коэффициенты, подлежащие определению.

Рассмотрим функцию вида

$$\beta = \frac{A_1}{(a_{-1}-x)}\,, \tag{4}$$

где A_1, a_{-1} — коэффициенты; x — переменная, принимающая значения не отрезке [0,1—0,9] с шагом 0,1.

Выберем два участка (рис. 1) с узлами интерполяции: на первом участке [0,1], на втором [0,1; 0,2]. Определим коэффициент A_1 по методу равных сумм [3]:

$$z_1 = y_1 = A_1\alpha_1 = A_1\,\frac{1}{(a_{-1}+0{,}1)}\,, \tag{5}$$

$$z_2 = (y_1+y_2) = A_1^*\,\alpha_2 = A_1^*\left(\frac{1}{a_{-1}+0{,}1}+\frac{1}{a_{-1}+0{,}2}\right). \tag{6}$$

Отсюда находим

$$A_1 = \frac{z_1}{\alpha_1}\,;\; A_1^* = \frac{z_2}{\alpha_2}\,.$$

Поскольку имеется в виду одна и та же функция (рис. 1), то $A_1=A^*_1$. Получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2\,\frac{z_1}{z_2}\,. \tag{7}$$

Раскрыв α_1 и α_2 в равенстве (7), выразим a_{-1}

$$\frac{1}{a_{-1}+0{,}2}\left(1-\frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{a_{-1}+0{,}2}\,,$$

$$(a_{-1}+0{,}1)\,\frac{y_2}{y_1} = (a_{-1}+0{,}1),$$

$$a_{-1}(y_2-y_1)-0{,}1\,(y_1-2y_2)=0. \tag{8}$$

Точно таким же образом получим линейные уравнения, аналогичные (6), для следующих участков с узлами интерполяции [0,1], [0,1; 0,3] и [0,1; 0,4]:

$$a_{-1}(y_3 - y_1) - 0{,}1\,(y_1 - 3y_3) = 0, \tag{9}$$

$$a_{-1}(y_4 - y_1) - 0{,}1\,(y_1 - 4y_4) = 0. \tag{9'}$$

Составим результант (определитель) из коэффициентов уравнений (8) и (9) и произведем необходимые преобразования. Поскольку для обоих уравнений (8) и (9) исходной является одна и та же функция, то корень каждого из уравнений должен быть одинаковым, т. е. коэффициент a_{-1}, определенный по одному и другому уравнению, должен быть один и тот же. Но если корни уравнений равны, то результант равен нулю [4]:

$$R = \begin{vmatrix} (y_2 - y_1) & 0{,}1\,(2y_2 - y_1) \\ (y_3 - y_1) & 0{,}1\,(3y_3 - y_1) \end{vmatrix} = 0{,}1\,(y_1y_2 - 2y_1y_3 + y_2y_3) =$$

$$= 0{,}1y_1y_2y_3 \left(\frac{1}{y_1} - 2\,\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \right). \tag{10}$$

Для того чтобы результант был равен нулю, комбинация ординат в круглых скобах (10) тоже должна быть равна нулю. Однако, если подставить обратные значения ординат из табл. 3 в (10), то равенства нулю не будет, следовательно, к этим значениям ординат функция (4) не подходит. Попробуем ее дополнить (исправить) введением множителя

$$\theta = (a_{+1} + x). \tag{11}$$

Теперь подбирается эмпирическая формула вида

$$\beta_2 = A_2\,\frac{(a_{+1} + x)}{(a_{-1} - x)}. \tag{12}$$

Все операции, начиная от записи формулы (5), повторяются:

$$z_1 = y_1 = A_1\alpha_1 = A_1 \cdot \frac{\tilde{\theta}_1}{(a_{-1} + 0{,}1)}, \tag{5'}$$

$$z_2 = (y_1 + y_2) = A_1^*\alpha_2 = A_1^* \left(\frac{\tilde{\theta}_1}{a_{-1} + 0{,}1} + \frac{\tilde{\theta}_2}{a_{-1} + 0{,}2} \right), \tag{6'}$$

где $\tilde{\theta}_1 = (a_{+1} + 0{,}1)$; $\tilde{\theta}_2 = (a_{+1} + 0{,}2)$.

Повторяя предыдущие выкладки, получим следующее равенство после преобразования результанта:

$$\bar{y}_1\tilde{\theta}_1 - 2\bar{y}_2\tilde{\theta}_2 + \bar{y}_3\tilde{\theta} = 0,$$

где $\tilde{\theta}_3 = (a_{+1} + 0{,}3)$. (13)

Заметим, что приравнивание нулю выражения (13) основано на предположении точной аппроксимации экспериментальных данных табл. 3 функцией (12).

Введение чисел $\tilde{\theta}_i$ равносильно введению множителей для испытываемых ординат. Так, уравнение (8) будет после этого иметь вид

$$a_{-1}(\tilde{\theta}\overline{y}_2-\tilde{\theta}_2\overline{y}_1)-0,1(\tilde{\theta}_2\overline{y}_1-2\tilde{\theta}_1\overline{y}_2)=0. \qquad (8')$$

Результант для уравнений (8) и (10) дает следующую нулевую комбинацию ординат, исправленную множителями θ_i, $(i=1, 2, 4)$:

$$2\overline{y}_1\theta_1-3\overline{y}_2\tilde{\theta}_2+\overline{y}_4\tilde{\theta}_4=0, \qquad (14)$$

где $\tilde{\theta}_4=(a_{+1}+0,4$:

Подставим значения $\theta_i=(a_{+1}+x_i)$ $(i=1, 2, 3, 4;\ x_1=0,1;\ x_2=0,2;$ $x_3=0,3;\ x_4=0,4)$ в равенства (13) и (14):

$$a_{+1}(\overline{y}_1-2\overline{y}_2+\overline{y}_3)+(-0,1\overline{y}_1+0,4\overline{y}_2-0,3\overline{y}_3)=0, \qquad (15)$$

$$a_{+1}(2\overline{y}_1-3\overline{y}_2+\overline{y}_4)+(-0,2\overline{y}_1+0,6\overline{y}_2-0,4\overline{y}_3)=0. \qquad (16)$$

Определим, при каких условиях коэффициент a_{+1} будет иметь одно и то же значение; для этого составим результант из коэффициентов уравнений (15) и (16) и произведем необходимые алгебраические преобразования. В результате получим следующее значение результанта:

$$R_{1,2,3,4}=0,1(\overline{y}_1\overline{y}_2-4\overline{y}_1\overline{y}_3+3\overline{y}_1\overline{y}_4+3\overline{y}_2\overline{y}_3-4\overline{y}_2\overline{y}_4+\overline{y}_3\overline{y}_4). \qquad (17)$$

Поскольку в равенство (17) необходимо подставить ординаты функции (12), то коэффициент a_{+1} является корнем для уравнений (15) и (16), но тогда результант (17) должен быть равен нулю. Отсюда получаем доказательство справедливости равенства (1), т. е. доказательство того, что существует нулевая комбинация ординат для функции (12). Следует иметь в виду, что изменение знака перед переменной в функции (12) (одновременно или раздельно в числителе и знаменателе) не меняет равенства (1). Поэтому, если для эмпирических данных обнаружена нулевая комбинация ординат (1), то необходимо произвести пробные расчеты для определения знака, с которым переменная входит в функцию (12). Нулевая комбинация ординат (1) обладает свойством симметричности: умножив обе части равенства (1) на произведение ординат (y_1, y_2, y_3, y_4), получим нулевую комбинацию необратных значений ординат функции (12):

$$y_1y_2-4y_1y_3+3y_1y_4+3y_2y_3-4y_2y_4+y_3y_4=0. \qquad (18)$$

Если эмпирические данные дают нулевую комбинацию ординат (1) или (18), то значения коэффициентов в функции (12) находятся таким образом: a_{+1} по уравнению (15) или (16), a_{-1} по уравнению (8'), в которое необходимо подставить множители $\tilde{\theta}_i$, содержащие коэффициент a_{+1}.

Поскольку ординаты табл. 3 в нулевой комбинации ординат (1) дают нуль, в качестве эмпирической формулы возьмем функцию (12):

$$a_{+1}=\frac{-0,1\overline{y}_1+0,4\overline{y}_2-0,3\overline{y}_3}{\overline{y}_1-2\overline{y}_2+\overline{y}_3}=\frac{0,03724}{0,05677}=0,656,$$

$$\tilde{\theta}_1=(0,656+0,1)=0,756;\ \tilde{\theta}_2=(0,656+0,2)=0,856.$$

Из уравнения (8′) определяем коэффициент a_{-1}

$$a_{-1}=\frac{0,1\,(\tilde{\theta}_2 y_1-2\tilde{\theta}_1 y_2)}{\tilde{\theta}_1 y_2-\tilde{\theta} y_1}=\frac{0,07909}{0,0719}=1,1.$$

Коэффициент A находится по формуле (3)

$$A=y_i\,\frac{(a_{-1}-x_i)}{(a_{+1}+x_i)}\,,$$

где i — номер узла интерполяции; y_i — ордината в узле интерполяции i.

Если функция (12) достаточно точно аппроксимирует ординаты табл. 3, то для любого узла интерполяции коэффициент остается числом постоянным. В данном случае $A=1$.

Описанный метод позволяет отыскивать комбинацию ординат и других функций, например $\sin x$, $\cos x$ e^x и т. д.

Покажем, что для функций $y_s=\sin(a+x)$ и $y_c=\cos(a+x)$ существуют нулевые комбинации ординат.

Для функции

$$y_s=A\sin(a+x), \tag{19}$$

где x — абсцисса на отрезке [0,1—0,9], причем $0\leqslant(a+x)\leqslant\leqslant\frac{\pi}{2}$; a — действительное число.

Аналогично (8) получаем равенство

$$y_2\sin(a+0,1)-y_1\sin(a+0,2)=0, \tag{20}$$

где y_1, y_2 — ординаты на узлах интерполяции [0,1] и [0,2]. Выражая значение a из уравнения (20), находим

$$\operatorname{tg}a=\frac{y_2\sin 0,1-y_1\sin 0,2}{y_2\cos 0,1-y_1\cos 0,2}\,. \tag{21}$$

Такое же равенство получим, производя те же самые преобразования для ординат на узлах интерполяции [0,1] и [0,1; 0,3], т. е. для y_1 и y_3

$$\operatorname{tg}a=\frac{y_3\sin 0,1-y_1\sin 0,3}{y_3\cos 0,1-y_1\cos 0,3}\,. \tag{22}$$

Приравняем правые части (21) и (22) и произведем необходимые преобразования над тригонометрическими функциями. Получим

$$y_{1s}\sin 0,1-y_{2s}\sin 0,2+y_{3s}\sin 0,1=0. \tag{23}$$

Учитывая, что для функции

$$y_{si}=\sin x_i, \tag{24}$$

значения ординат выражаем равенствами:

$$y_{1s}=\sin 0,1;\; y_{2s}=\sin 0,2;\; y_{3s}=\sin 0,3.$$

Из (23) получаем

$$\sin^2 0,1-\sin^2 0,2+\sin 0,1\sin 0,3=0. \tag{25}$$

Для любых трех ординат на равностоящих узлах интерполяции справедливо равенство

$$y_{is}\sin 0{,}1 - y_{(i+1)s}\sin 0{,}2 + y_{(i+2)s}\sin 0{,}1 = 0, \tag{26}$$

где i — номер узла интерполяции для отрезка [0,1—0,9]; коэффициенты при ординатах — числа постоянные.

Для функции

$$y_c = A\cos(a+x) \tag{27}$$

справедливо равенство

$$y_{ic}\sin 0{,}1 - y_{(i+1)c}\sin 0{,}2 + y_{(i+2)c}\sin 0{,}1 = 0 \tag{28}$$

на том же отрезке изменения переменной x.

Для функции

$$y = Aa^{(\alpha+x)}, \tag{29}$$

где a, α — действительные числа; x — принимает положительные значения на отрезке [0,1—0,9].

Нулевая комбинация ординат для функции (29) имеет вид

$$\lg y_i - 2\lg y_{i+1} + \lg y_{i+2} = 0, \tag{30}$$

где i — номер узла интерполяции. В частном случае, когда $a=e$, нулевая комбинация ординат имеет вид

$$\ln y_1 - 2\ln y_2 + \ln y_3 = 0. \tag{31}$$

Использование нулевых комбинаций функций состоит в том, что размерная переменная, откладываемая на оси x, приводится к безразмерной шкале, берутся соседние ординаты на равностоящих узлах интерполяции и подставляются в соответствующие комбинации до получения нулевого значения. Если в результате каких-либо комбинаций выражение (31) будет равно нулю, то в качестве аппроксимирующей (эмпирической) формулы принимается соответствующая функция. Следует иметь в виду, что нулевые комбинации ординат справедливы для $\pm a$, а поэтому пробными подсчетами определяется знак коэффициента, входящего в функцию.

Используя изложенный метод, можно получить нулевые комбинации и для других элементарных (и, возможно, неэлементарных) функций. Таким образом, можно сделать следующий вывод: элементарные функции имеют нулевые комбинации ординат; разделенные (конечные) разности — частный случай нулевых комбинаций ординат. Рассмотренный метод распознавания вида эмпирической формулы применим в том случае, когда данные опыта располагаются на одной кривой. При разбросе точек кривая проводится глазомерно и к ней подбирается эмпирическая формула.

Литература

1. *Минаев И. В.* Один способ подбора эмпирических формул к данным эксперимента. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 3. Минск, 1973. 2. *Минаев И. В.* Метод аппроксимации и его применение в технико-экономическом расчете дренажей. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 3. Минск, 1973. 3. *Мелентьев П. В.* Приближенные вычисления. М., 1962. 4. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 1962.