И. В. Минаев

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДРЕНАЖА МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ (ТРИ ПЕРЕМЕННЫЕ)

В работе горизонтального дренажа имеются такие периоды, когда дренаж должен отвести избыточную воду в заданные сроки. Наиболее важным периодом считается весна: от даты схода снега до начала посевного периода. В это время дренаж должен отвести такое количество воды, чтобы уровень грунтовых вод понизился на глубину, при которой сельскохозяйственная техника может производить весенние полевые работы на осушенной территории. Для успешного выполнения этой задачи важно правильно определить глубину заложения и расстояние между дренами, а также время начала полевых работ, так как опоздание со сроком сева приводит к снижению урожайности культур.

Таким образом, необходимо найти три параметра дренажной сети: h — глубину закладки дрен, B — расстояние между дренами, T — время от даты схода снега до начала полевых работ. Однако определение этих величин — задача не только технического расчета, а и технико-экономического, поскольку обеспечение глубины уровня грунтовых вод возможно при различных сочетаниях величин h, B, T. Если же наложить условия наименьших затрат при строительстве дренажа, то перечисленные параметры будут единственными (оптимальными) для конкретных условий осушаемого участка. Для нахождения оптимальных параметров дренажа должна быть составлена функция цели, определяющая капитальные затраты [1] на строительство дренажа в зависимости от указанных параметров. В данном случае имеется в виду некоторая функция (h, B, T) от трех переменных и ставится задача найти оптимальные значения параметров, которые позволили бы вычислить минимальную сумму капитальных затрат.

Решение данной задачи в математическом плане достаточно сложно. Существующие способы решения этой задачи неудобны для расчета, поэтому мы применяем метод аппроксимации.

Аппроксимация функции от трех переменных. Предполагается, что задана некоторая функция $F(x, y, z)$ (функция цели) от трех переменных x, y, z. Функция может быть весьма сложной для дифференцирования, трансцендентной, а также может включать данные, снятые с графиков и табличные. Другими словами, невозможно определить точку минимума, если брать частные производные, приравнивания их к нулю и совместно решая три уравнения.

Метод аппроксимации предполагает замену функции F некоторой функцией P (u, v, l), которая достаточно точно аппроксимирует функцию F на отрезках изменения переменных u, v, l, в общем случае имеющих более узкие границы, чем переменные x, y, z, т. е. часть пространственной фигуры (содержащей и глобальный минимум), описываемой функцией $F(x, y, z)$, будет представлена другой функцией $P(u, v, l)$

Ввиду ограниченных пределов изменения переменных u, v, l функция P оказывается проще и удобнее для нахождения точки минимума. В данном случае рассматриваются функции только с одной точкой минимума, которая и является глобальной. Функция $P(u, v, l)$ задана в табличной форме на отрезке изменения переменных [1—4] (табл. 1). Задача состоит в восстановлении аналитического вида функции P по табличным данным.

Таблица 1

$l=1$					$l=2$				
$u \backslash v$	1	2	3	4	$u \backslash v$	1	2	3	4
1	2	5	10	17	1	3	6	11	18
2	3	6	11	18	2	5	8	13	20
3	4	7	12	19	3	7	10	15	22
4	5	8	13	20	4	9	12	17	24

$l=3$					$l=4$				
$u \backslash v$	1	2	3	4	$u \backslash v$	1	2	3	4
1	4	7	12	19	1	5	8	13	20
2	7	10	15	22	2	9	12	17	24
3	10	13	18	25	3	13	16	21	28
4	13	16	21	28	4	17	20	25	32

Строку по переменной u аппроксимирует функция

$$P_u = a_0 + a_1 u, \tag{1}$$

а по переменной v функция [2]

$$P_v = b_0 + b_2 v^2. \tag{2}$$

Вид функции по каждой переменной устанавливается из предположений о степени аппроксимирующего многочлена, а коэффициенты (a_0, a_1, b_0, b_2) — методом равных сумм или методом последовательного вычисления коэффициентов [2].

Аппроксимирующей функцией по переменной l будет функция

$$P_l = c_0 + c_1 l. \tag{3}$$

Действительно, предположив постоянными две другие переменные $u_0=2$, $v_0=2$, получим строку (табл. 1) значений P_l при изменении переменной l (табл. 2).

Таблица 2

l	1	2	3	4
P_l	6	8	10	12

Определим коэффициенты c_0 и c_1 методом равных сумм [3]:

$$\left.\begin{aligned} Z_{1l} &= P_{1l} + P_{2l} = 6 + 8 = 2c_0 + (1+2)c_1, \\ Z_{2l} &= P_{3l} + P_{4l} = 10 + 12 = 2c_0 + (3+4)c_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решив систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными c_0 и c_1, получим: $c_0=4$, $c_1=2$. Если принять другую строку значений P_l, то вид функции (3) сохранится, а численные значения коэффициентов изменятся. Так, для строки значений P_l при $u_0=3$, $v_0=1$ коэффициенты $c_1=3$, $c_0=1$.

Систему линейных уравнений (4) можно представить в матричном виде

$$\begin{bmatrix} Z_{1l} \\ Z_{2l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Выразим коэффициенты c_0, c_1 в явном виде через квадратную матрицу коэффициентов и матрицу-столбец z_{il} $(i=1;\ 2)$. Для этого необходимо найти обратную матрицу для матрицы коэффициентов [4]. Обратной будет матрица

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты будут найдены из матричного равенства

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} z_{1l} \\ z_{2l} \end{bmatrix} \tag{6}$$

или

$$[c_t] = C\,[z_{il}];\ t = 1;\ 0;\ i = 1;\ 2. \tag{6'}$$

Аналогично в матричном виде можно представить и две другие аппроксимирующие функции (по u и v):

для переменной v

$$[b_k] = B\,[z_{iv}], \tag{7}$$

для переменной u

$$[a_m] = A\,[z_{iu}], \tag{8}$$

где $k = 0;\ 2;\quad m = 0;\ 1;\quad i = 1;\ 2;$

$$z_{1v} = P_{1v} + P_{2v};\quad z_{2v} = P_{3v} + P_{4v};$$

$$z_{1u} = P_{1u} + P_{2u};\quad z_{2u} = P_{3u} + P_{4u}.$$

Функция P по каждой из переменных в матричном виде представляется так:

$$P_l = [l^t]\,C\,[z_{il}], \tag{9}$$

$$P_v = [v^k]\,B\,[z_{iv}], \tag{10}$$

$$P_u = [u^m]\,A\,[z_{iu}], \tag{11}$$

где $[l^t]$, $[v^k]$, $[z_{iu}]$ — матрицы-строки из двух элементов; $[z_{il}]$, $[z_{iv}]$, $[z_{iu}]$ — матрицы-столбцы из двух элементов.

Матрицы B и A получены так же, как и матрица C; их численные значения для функции P следующие:

$$B=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Получены три уравнения по каждой переменной для функции P. В четырехмерном пространстве $\{P, u, v, l\}$ функция $P(u, v, l)$ описывает некоторую пространственную поверхность. Если эту поверхность рассечь взаимно-ортогональными плоскостями, то следы поверхности на этих плоскостях будут теми линиями, для которых математическими выражениями служат равенства (9), (10), (11).

Задача состоит в том, чтобы объединить равенства (9), (10), (11) в одно, которое и станет функцией $P(u, v, l)$ от трех переменных.

В табл. 1 значения функции P аппроксимируются по строкам (по направлению v) уравнением (2), а по столбцам (по направлению u) — уравнением (1); другими словами, одни и те же числа (например, при $l_0=1$), прочитанные по строкам, аппроксимируются одним уравнением, а прочитанные по столбцам, — другим (коэффициенты уравнения (1) от столбца к столбцу меняются). В работе [2] показано, что для двух переменных u и v (например, при $l_0=1$) действительно равенство

$$P_{vu}=[1 v^2]\, B\, [z_{ij}]'\, A' \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где A' — транспонированная матрица A; $[z_{ij}]'$ — транспонированная матрица,

$$[z_{ij}]=\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Здесь $z_{11}=(2+5)+(3+6)$; $z_{21}=(4+7)+(5+8)$; $z_{12}=(10+17)+(11+$ $+18)$; $z=(12+9)+(13+20)$ (для табл. 1 при $l_0=1$).

Перемножение всех матриц, входящих в равенство (12), дает аппроксимирующее уравнение по двум переменным u и v. Действительно, подставив численные значения всех матриц, входящих в равенство (12), получим уравнение

$$P_{uv}=u+v^2. \tag{14}$$

Если же найден вид функции по строкам и столбцам исходной таблицы (табл. 1), можно другим способом найти аппроксимирующее уравнение по двум переменным. Перемножение трех матриц в равенстве (12) дает одну матрицу, результирующую (в общем виде):

$$G=B\,[z_{ij}]'\,A'=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

$$P_{vu}=[1 \ v^2]\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}=g_{21}uv^2+g_{22}v^2+g_{11}u+g_{12}. \tag{15}$$

Для того чтобы найти коэффициенты уравнения (15), можно задаваться значениями u и v такими, чтобы получить числа табл. 1 (при

$l_0=1$), стоящие на диагонали, к которым и приравнивается правая часть этого уравнения:

$$\left.\begin{aligned} g_{21}+g_{22}+g_{11}+g_{12}&=2,\\ 8g_{21}+4g_{22}+2g_{11}+g_{12}&=6,\\ 27g_{21}+9g_{22}+3g_{11}+g_{12}&=12,\\ 64g_{21}+16g_{22}+4g_{11}+g_{12}&=20. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Решив эту систему уравнений, получим следующие значения коэффициентов: $g_{21}=0$; $g_{22}=1$; $g_{11}=1$; $g_{12}=0$. Аппроксимирующая функция будет иметь такой же вид, как и при перемножении матриц.

Таким образом, если имеется какая-либо сложная функция F от двух переменных, то для построения аппроксимирующей ее функции P нужно вычислить одну строку по одной переменной и один столбец по другой, найти вид аппроксимирующих функций по этим переменным, а затем вычислить значения F, стоящие на диагонали. Этих вычислений будет достаточно, чтобы построить аппроксимирующую функцию по двум переменным.

Рассмотренный способ аппроксимации по двум переменным может быть обобщен и на большее число переменных. Рассмотрим процесс получения интерполяционного уравнения от трех переменных.

Представим $[z_{il}]$ вначале как функцию от v при постоянном значении u_0

$$[z_{il}] = [b_{ki}]\,[v^k] \quad (i=1{,}2). \tag{17}$$

Как следует из (7), коэффициенты системы уравнений (17) могут быть представлены матричным равенством

$$\begin{bmatrix} b_{01} & b_{21} \\ b_{02} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix}^{\overset{\to l}{\downarrow v}} B', \tag{18}$$

где z_{ij} $(i,\ j=1{,}2)$ — суммы значений функции P по l и v при постоянном u_0.

Из (17) и (18) можно также получить следующее матричное равенство:

$$[z_{il}] = [z_{ij}]'\,B' \begin{bmatrix} 1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Если теперь придавать значения в выбранном промежутке переменной u, то поступая так же, как и при выводе равенства (12), получим

$$[z_{11}\ \ z_{21}] = [u^m]\ A \begin{bmatrix} z_{111} & z_{121} \\ z_{112} & z_{122} \end{bmatrix}^{\overset{\overset{\to l}{\to v}}{\downarrow u}}. \tag{20}$$

Матрица z_{1ij} является обычной квадратной матрицей и одновременно сечением ориентации l [5] для пространственной (кубической) матрицы z_{lvu}.

Продолжая таким же образом, получим

$$[z_{12}\ \ z_{22}] = [u^m]\ A \begin{bmatrix} z_{211} & z_{221} \\ z_{212} & z_{222} \end{bmatrix}^{\overset{\overset{\to l}{\to v}}{\downarrow u}}, \tag{21}$$

а имея в виду (19), находим

$$[z_{il}] = [u^m]\,A\,z_{lvu}^{\overset{\overset{\to l}{\to v}}{\downarrow u}}\ B'\,[v^k]. \tag{22}$$

Окончательный вид аппроксимирующей функции по трем переменным получим, подставив правую часть (22) в (9):

$$P_{lvu} = [l^t]\ C\ [u^m]\ A\,z_{lvu}B'\,[v^k], \tag{23}$$

где $[l^t]$, $[u^m]$ — матрицы-строки; $[v^k]$ — матрица-столбец; A, B' — обычные двумерные квадратные матрицы (табл. 1); матрица z_{ivu} — пространственная кубическая матрица. Подсчет элементов кубической матрицы второго порядка производится в последовательности возрастания индексов соответствующего направления, как это показано в пространственной таблице (рис. 1).

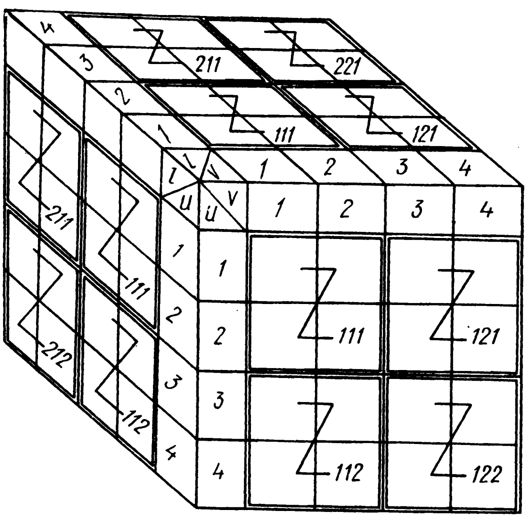

Рис. 1.

Порядок следования индексов в матрице z_{lvu} имеет существенное значение, поскольку строки направления пространственной матрицы должны согласовываться с порядком следования матриц-сомножителей в уравнении (23). Если бы второй аппроксимирующей функцией при выводе уравнения (23) была функция по переменной u, то кубическая матрица, получающаяся из пространственной таблицы (рис. 1), имела бы каноническое следование индексов. По отношению к этому каноническому виду матрица z_{lvu} в уравнении (23) транспонирована относительно вторых индексов. Соответственно изменилось бы следование и других матриц в уравнении (23), имеющих связь с переменными v и u.

Отметим, что в аппроксимирующей функции P_{lvu} по (23) не соблюдаются законы коммутативности и ассоциативности умножения. Первое видно из того, что умножение матриц в общем случае не коммутативно, второе — из того, что умножение квадратной матрицы C невозможно на матрицу-строку $[u^m]$. Это связано с порядком умножения по альтернативным направлениям пространственной и двумерной матриц. Порядок умножения в (23) следующий: вычисляется пространственная матрица

$$G = A\, z_{lvu} B',$$

затем она умножается по направлению v на матрицу-столбец $[v^k]$. Получающаяся обычная двумерная матрица перемножается с матрицей-строкой $[u^m]$ по направлению u (их порядок следования при перемножении тот же, что и в (23). Наконец, перемножаются три матрицы: $[l^t]$, C и одномерная матрица (результат предыдущих действий) по направлению v.

Численные значения элементов пространственной квадратной матрицы представлены на рис. 2.

Используя возможность записи пространственных матриц двумерными сечениями [5], находим матрицу G_1:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 & 118 & 62 & 142 \\ 62 & 142 & 118 & 198 \end{bmatrix}^{\substack{\to l \\ \to v \\ \downarrow u}} \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{20} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Полученную пространственную матрицу умножаем по направлению v на матрицу-столбец $[v^k]$:

$$Az_{lvu}B'\,[v^k] = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2v & 2v \end{bmatrix}^{\to l}_{\downarrow u}.$$

В результате получаем обычную двумерную матрицу с направлениями l и u. Эта матрица перемножается с матрицей-строкой $[u^m]$, в результате чего получим матрицу-строку с порядком следования элементов по направлению l

$$[3u + 2v^2 \quad 7u + 2v^2]^{\to l}.$$

Далее находим аппроксимирующий многочлен по трем переменным в результате перемножения следующих матриц:

$$P_{lvu} = [l \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 3u + 2v^2 \\ 7u + 2v^2 \end{bmatrix}^{\downarrow l} = (ul + v^2). \qquad (24)$$

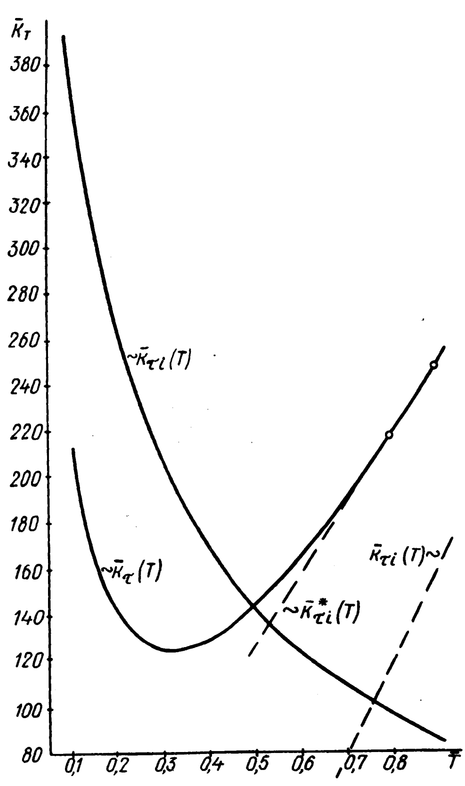

Рис. 2.

Уравнение (24) и есть аппроксимирующая функция $P(u, v, l)$.

Увеличение количества переменных в исходной функции приводит к получению уравнений в матричном виде, содержащих одномерные обыкновенные квадратные матрицы и многомерные пространственные матрицы.

Для получения аппроксимирующей функции можно также применить второй способ (выражения (15) и (16) для двух переменных).

Определение оптимальных параметров дренажа. В качестве примера рассматривается вариант задачи, приведенный в работе [6]. По двум переменным (h — глубина закладки дрен; B — расстояние между дренами) подобраны следующие аппроксимирующие функции:

по h

$$\overline{k_h} = A_{-1h}\alpha_h + A_{+1h}\beta_h, \qquad (25)$$

по B

$$\overline{k_B} = A_{-1B}\,\alpha_B + A_{+1B}\,\beta_B\,, \qquad (26)$$

где h, B — относительные (безразмерные) переменные, изменяющиеся на промежутке [0,1—0,9] с шагом 0,1, полученные по переходным формулам [2], $\overline{k_h}$, $\overline{k_B}$ — капиталовложения, зависящие от соответствующей переменной;

$$\alpha_h = \frac{1}{(0{,}2+\bar{h})^2}; \quad \beta_h = (1{,}6+\bar{h});$$

$$\alpha_B = \frac{1}{(0{,}4+\bar{B})^3}; \quad \beta_B = \frac{1}{(2{,}4-\bar{B})};$$

$$A_{-1h} = 14{,}727; \; A_{+1h} = 43{,}997; \; A_{-1B} = 25{,}452; \; A_{+1B} = 189{,}073.$$

В работе [6] показано, как получить аппроксимирующее уравнение от двух переменных, аналогичное уравнению (12). Далее необходимо определить еще один параметр дренажа — оптимальное время T от даты схода снега до начала посевного периода. Для иных природных условий рассматриваются и функции ущерба [1].

Для функции, определяющей переменную T, задана таблица значений, содержащая и точку минимума по этой переменной, т. е. вычислены значения $\bar{k}_T$ на всем отрезке изменения $\bar{T}$: [0,1—0,9]. Таким образом, необходимо подобрать аппроксимирующую функцию для значений $\bar{k}_T$, приведенных в табл. 3.

Таблица 3

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\bar{k}_T$	210,8	141,0	124,4	129,1	143,0	163,7	188,6	217,1	247,7
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Для подбора такой аппроксимирующей функции применим следующий прием, который можно сформулировать как метод разложения сложной функции на сумму более простых. Иногда подбор функции к заданным ординатам приводит к очень сложным зависимостям, в то время как суммой достаточно простых функций можно аппроксимировать сложную функцию.

Сущность метода разложения заключается в том, что ординаты $\bar{k}_T$ делятся на отрезки, составляющие в сумме ординату $\bar{k}_T$. Например: $\bar{k}_{Ti} = k_{ti} + \bar{k}_{\tau i}$, где i — номера узлов интерполяции (талб. 3). Если удается к отрезкам ординат $\bar{k}_{ti}$ и $\bar{k}_{\tau i}$ подобрать достаточно простые зависимости f_{ti} (T) и f_{τ} (T), то аппроксимирующей функцией будет сумма $\bar{k}_{Ti} = f_{ti}(T) + f_{\tau i}(T)$. Сложность задачи заключается в том, чтобы найти такое разбиение ординат, которое давало бы простые функции-слагаемые. Наиболее легкий способ отыскания функций-слагаемых заключается в том, что предполагается какая-либо простая зависимость для одной функции-слагаемого, а другая подбирается для разности, например

$$f_{ti}(T) = \bar{k}_{Ti}(T) - f_{\tau i}(T).$$

Применим этот метод для данных табл. 3. Предположим, что возрастающая ветвь графика (рис. 2) близка к прямой. Тогда

$$f_{\tau i}(T) = a_1\bar{T} + a_0, \tag{26}$$

где $\bar{T}$ — безразмерная переменная [2], принимает значения [0,1—0,9] с шагом 0,1; a_1, a_0 — коэффициенты, подлежащие определению (применяется метод последовательного вычисления коэффициентов [2]);

$$a_1 = \frac{\bar{k}_{T9}(T) - \bar{k}_{T8}(T)}{0{,}9-0{,}8} = \frac{247{,}7-217{,}9}{0{,}1} = 306;$$

$$a_0 = k_{T9}(T) - a_1 09 = 247{,}7 - 306 \cdot 0{,}9 = -27{,}7.$$

Отсюда

$$\overline{k}^*_{\tau i}(T) = 306\,\overline{T} - 27{,}7. \qquad (26')$$

Далее находится разность ординат на всех узлах интерполяции $\overline{k}_{Ti}(T) - f_{\tau i}(T) = f_{ti}(T)$. Разность ординат дает уменьшающиеся отрезки, причем на последних двух узлах интерполяции — точные нули. Такая последовательность ординат неудобна для аппроксимации; необходимо получить такую последовательность, которая монотонно уменьшалась бы на всем отрезке изменения переменной [0,1—0,9]. Для этого переместим вначале прямую параллельно самой себе, например до такого положения, когда эта прямая будет пересекать ось абсцисс в узле интерполяции. Разность ординат в этом случае также неудобна для аппроксимации, так как на последних двух узлах интерполяции будут две равные ординаты. Поэтому сделаем еще поворот прямой таким образом, чтобы точка пересечения прямой и кривой была вне пределов отрезка [0,1—0,9]. Достаточно удобной в расчетах будет прямая со следующими коэффициентами, удовлетворяющая постоянным условиям:

$$f_{\tau i}(T) = 398\,T - 199 = 398\,(T - 0{,}5). \qquad (27)$$

В табл. 4 приводятся значения ординат по уравнению (27) и разность ординат

$$f_{ti} = \overline{k}_T - f_{\tau i}. \qquad (28)$$

Для этой последней разности ординат подбирается аппроксимирующая функция способом, описанным в работе [6]. Достаточно хорошо аппроксимацию дает следующее уравнение:

$$\overline{k}_{ti} = \frac{A_{-1T}}{(\overline{T} + 0{,}15)}\,, \qquad (29)$$

где $A_{-1T} = 92{,}80$.

Разность ординат представлена в табл. 4.

Таблица 4

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\overline{k}_T$	210,8	141,0	124,4	129,1	143,0	163,7	188,6	217,1	247,7
$\overline{k}_{\tau i}$	—159,2	—119,4	—79,6	—39,8	0	39,8	79,6	119,4	159,2
$f_{ti} = \overline{k}_T - f_{\tau i}$	370,0	260,4	204,0	168,9	143,0	123,9	109,0	97,7	88,5

Таким образом, для всех трех переменных получены аппроксимирующие уравнения: (25), (26) и (30):

$$\overline{k}_T = A_{-1T}\,\alpha_T + A_{+1T}\,\beta_T\,, \qquad (30)$$

где

$$\alpha_T = \frac{1}{(\overline{T} + 0{,}15)}; \quad \beta_T = (\overline{T} - 0{,}5),$$

$$A_{-1T} = 92{,}80; \; A_{+1T} = 398.$$

Запишем функцию по трем переменным в соответствии с рассмотренным методом аппроксимации, т. е. формулу, аналогичную (23):

$$P_{hBT} = [\alpha_h \beta_h] \begin{bmatrix} A_{-11h} & A_{+12h} \\ A_{-12h} & A_{+22h} \end{bmatrix} [\alpha_B \beta_B] \left[\begin{array}{cc|cc} A^*_{111} & A^*_{112} & A^*_{211} & A^*_{212} \\ A^*_{121} & A^*_{122} & A^*_{221} & A^*_{222} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \alpha_T \\ \beta_T \end{bmatrix}. \quad (31)$$

После перемножения матриц в уравнении (31) получим аппроксимирующее уравнение в общем виде:

$$P_{hBT} = A_{111}\alpha_h \alpha_B \alpha_T + A_{112}\alpha_h \alpha_B \beta_T + A_{121}\alpha_h \alpha_T \beta_B + A_{211}\alpha_B \alpha_T \beta_h +$$
$$+ A_{122}\alpha_h \beta_B \beta_T + A_{212}\alpha_B \beta_T \beta_h + A_{221}\alpha_T \beta_h \beta_B + A_{222}\beta_h \beta_B \beta_T, \quad (32)$$

где

$$A_{111} = (A^*_{111}A_{-11h} + A^*_{211}A_{-12h}), \quad A_{122} = (A^*_{122}A_{-11h} + A^*_{222}A_{+22h}),$$

$$A_{112} = (A^*_{112}A_{-11h} + A^*_{212}A_{+12h}), \quad A_{212} = (A^*_{112}A_{-12h} + A^*_{212}A_{+22h}),$$

$$A_{121} = (A^*_{121}A_{-11h} + A^*_{221}A_{+12h}), \quad A_{221} = (A^*_{121}A_{-12h} + A^*_{221}A_{22h}),$$

$$A_{211} = (A^*_{111}A_{-12h} + A^*_{211}A_{+12h}), \quad A_{222} = (A^*_{122}A_{-12h} + A^*_{222}A_{+22h}).$$

Коэффициенты A_{ijk} являются также элементами пространственной матрицы, и они должны быть найдены. Поскольку α_h, α_B, α_T, β_h, β_B, β_T — известные выражения, то придадим в них значения переменным (всем трем одновременно) от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1. Очевидно, в этом случае уравнение (32) превращается в уравнение от одного неизвестного

$$x = \overline{h} = \overline{B} = \overline{T}.$$

Геометрически такой прием означает, что четырехмерная фигура, описываемая уравнением

$$P_{hBT} = f(\overline{h}, \overline{B}, \overline{T}),$$

рассекается гиперплоскостью, на которой остается след пространственной фигуры. Придавая соответствующие (значениям узлов интерполяции) значения h, B, T в функции $\overline{k}(h, B, T)$ и вычисляя их, получим ординаты следа на гиперплоскости, т. е. кривую, которую описывает уравнение (32) при $x = \overline{h} = \overline{B} = \overline{T}$ одновременно. Эти значения для нашего примера приведены в табл. 5.

Таблица 5

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\overline{k}(h, B, T)$	588,7	240,2	156,9	128,9	122,6	129,2	146,0	170,6	204,3
Номер узла и интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Для нахождения численных значений коэффициентов A_{ijk} в уравнении (32) составляется система линейных уравнений, аналогичная системе (16). Для уравнения (32) все базовые векторы α_h, α_B, α_T, β_h, β_B, β_T становятся числами k_{ij}, если им придавать значения узлов интерполяции; при этом следует подставить последовательно восемь значений (пропустив, например, восьмой узел), так как необходимо определить восемь коэффициентов. Система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{ijk} будет иметь вид

$$A_{111}k_{1j} + A_{112}k_{2j} + A_{121}k_{3j} + A_{211}k_{4j} + A_{122}k_{5j} + A_{212}k_{6j} + + A_{221}k_{7j} + A_{222}k_{8j} = z_j, \tag{33}$$

где $j=1, ..., 7, 9$ — номера узлов интерполяции; z_j— значения ординат $\overline{k}(h, B, T)$ (табл. 5).

Решение на ЭЦВМ «Минск-22» системы линейных уравнений (33) восьмого порядка позволяет получить следующие значения коэффициентов: $A_{111}=2{,}85$; $A_{112}=25{,}5$; $A_{121}=12{,}5$; $A_{211}=5{,}55$; $A_{122}=35{,}55$; $A_{212}=10{,}2$; $A_{221}=38{,}387$; $A_{222}=170{,}5$.

Таким образом, получено аппроксимирующее уравнение от трех переменных, которое описывает пространственную фигуру с одним глобальным экстремумом (минимумом). Чтобы найти оптимальные параметры $\overline{h}$, $\overline{B}$, $\overline{T}$, при которых функция $k(h, B, T)$ принимает минимальное значение, можно применить различные способы. Поскольку слагаемые уравнения (32) достаточно просты и имеют числовые коэффициенты, то весьма удобно составить программу для ЭЦВМ «Минск-22», например, на языке АКИ. Другой способ заключается в том, чтобы, используя уравнение (32), взять частные производные по $\overline{h}$, $\overline{B}$, $\overline{T}$ и приравнять их нулю. Расчет оптимальных параметров осуществляется методом последовательных приближений, как для двух переменных в работе [2].

Полученное аппроксимирующее уравнение значительно проще в математическом отношении, является общим для решения конкретных задач. Если в функции цели изменяются параметры, не влияющие на частные производные по переменным, то вид базовых векторов также не изменяется; коэффициенты же находятся весьма просто с использованием функции цели. Коэффициенты в уравнении (32) определяются подсчетом ординат (диагонального разреза пространственной фигуры), аналогичных приведенным в табл. 5. В ходе вычисления ординат имеется возможность корректировать исходные данные в функции цели еще до получения окончательного результата, определяющего оптимальные параметры.

Литература

1. *Минаев И. В.* Технико-экономический расчет параметров дренажа. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 1. Минск, 1971. 2. *Минаев И. В.* Технико-экономический расчет оптимальных параметров вертикального дренажа методом аппроксимации. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 2. Минск, 1972. 3. *Мелентьев П. В.* Приближенные вычисления. М., 1962. 4. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., 1966. 5. *Соколов Н. П.* Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960. 6. *Минаев И. В.* Метод аппроксимации и его применение в технико-экономическом расчете дренажей. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 3. Минск, 1973.