Таблица 4. Сравнительная морозостойкость пористых труб и образцов одних и тех же составов

Наименование изделий	Номинальный состав по весу	Состав заполнителя по весу, %, при диаметре, мм			По стандартной методике				В погруженном состоянии			В полупогруженном состоянии		
					Коэффициент морозостойкости, $K_{мрз}$ при количестве циклов замораживания и оттаивания									
		3--2	2--1	1--0,5	15	25	50	75	15	25	35	15	25	35
Образцы	1:6	100	–	–	1,0	0,88	0,73	–	0,98	0,86	0,76	0,90	0,81	0,70
Трубы	1:6	100	–	–	1,0	1,00	0,98	0,91	0,97	0,85	0,76	0,91	0,82	0,69
Образцы	1:6	–	100	–	1,0	0,89	0,79	–	0,96	0,85	0,75	0,89	0,80	0,64
Трубы	1:6	–	100	–	1,0	1,0	0,96	0,90	0,97	0,84	0,73	0,89	0,81	0,63
Образцы	1:6	–	–	100	0,99	0,86	0,69	–	0,93	0,82	0,74	0,86	0,76	0,63
Трубы	1:6	–	–	100	1,0	1,0	0,91	0,84	0,94	0,84	0,73	0,87	0,78	0,64

в зоне промерзания и переменного уровня воды, поэтому такие исследования, проведенные в полупогруженном состоянии, наиболее отвечают действительности.

Испытания пористых труб из бетона на морозостойкость по стандартной методике показали, что они выдерживают большее количество циклов замораживания и оттаивания, чем образцы из того же состава (табл. 4). Это явление связано с вытеснением избыточной воды из пор во время образования льда, которая при этом перемещается не только в свободные поры внутри материала, но и выходит на поверхность трубы. Чем меньше толщина трубы, т.е. чем короче путь прохождения воды, тем скорее протекает процесс ее отжатия на поверхность и тем меньше вероятность возникновения больших напряжений, приводящих к разрушению материала труб.

При определении морозостойкости труб, испытанных в погруженном и полупогруженном состояниях, преимущества последних, как тонкостенных конструкций, перед образцами не обнаружено.

Проведенные исследования морозостойкости пористых труб доказывают пригодность их использования в конструкциях горизонтальных дренажей мелкого заложения, находящихся в условиях сезонного промерзания грунта.

Литература

1. Барекян А.Ш., Челышев А.К., Снегирев И.А. Работоспособность дренажных труб из крупнопористого бетона. — "Гидротехника и мелиорация", 1968, № 4. 2. Восканян В.А. Индустриальное устройство дренажа с помощью трубофильтров. М.—Л., 1963. 3. Низовкин Г.А. Дренажи с дренирующими трубами.—"Путь и путевое хозяйство", 1962, №7. 4. Овсянников Л.Ф. Сооружение дренажей машиной системы ЦНИИ МПС. М., 1967. 5. Дегтярев Б.М. Коринченко И.В. Сборные дренажи из пористых бетонных труб. М., 1968. 6. Дегтярев Б.М., Ляпидевский Б.В. Использование трубофильтров из пористого бетона для дренажей. — "Промышленное строительство", 1968, №9. 7. Мощанский Н.А. О механизме разрушения бетона при замораживании и морозостойкость бетонов в суровых условиях службы сооружений. — В сб.: Морозостойкость бетонов. Вып. 12. М., 1959. 8. Еремеев Г.Г. О морозостойкости бетонов. — "Бетон и железобетон", 1964, N 2. 9. Беркман А.С., Мельникова И.Г. Структура и морозостойкость стеновых материалов. Л.—М., 1962. 10. Михневич Э.И. Крепление откосов осушительных систем фильтрующими материалами. Автореф. канд.дис. Минск, 1967.

И.В. Минаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДРЕНАЖА

Технико-экономический расчет параметров дренажа может быть произведен методом аппроксимации. Для этого формируется функция цели $\overline{P}_э = f\ (h, B, l, \dots)$ от нескольких переменных, которые представляют параметры сооружения (h, B, l, ...) и определяют величину ежегодных затрат или ка-

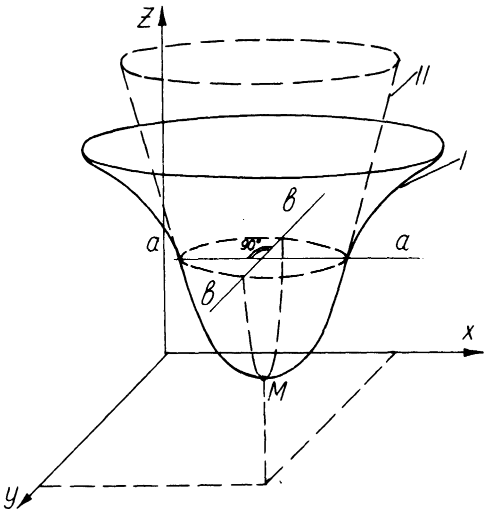

Рис. 1.

питаловложений. Изменяя эти параметры дренажа, можно влиять на размер затрат, определяемых функцией цели. Существование минимума затрат от нескольких переменных обосновывается логически при формировании функции цели и находится в результате решения задачи.

Рассмотрим функцию цели $\overline{P}_э = f\ (h, B)$ от двух переменных, где h — глубина заложения дрен, B — расстояние между дренами. Очевидно, что эти параметры могут принимать только положительные значения, тем не менее при изменении переменных от 0 до $+x_{h,B}$ функция цели может определять достаточно сложную поверхность. В методе аппроксимации выделяется только та часть этой поверхности, которая содержит глобальный минимум (минимумов может быть несколько) и не содержит точек перегиба, т.е. выделяется часть поверхности, при рассечении которой двумя взаимно перпендикулярными плоскостями в сечениях появляются гладкие кривые типа "седло" с одной точкой минимума $a-a$, $b-b$ (рис. 1). Выделение такой поверхности осуществляется сужением пределов изменения переменных. Обычно реальные пределы изменения параметров невелики: для глубин h от 0,7 до 1,5 м, для B от 7—10 до 35—40 м. Отсеченная поверхность с точкой минимума в математическом отношении проще для аппроксимации, так как аппроксимирующая поверхность (I, рис. 1) должна совпадать с отсеченной на ограниченном участке изменения переменной; за пределами этих отрезков аппроксимирующая поверхность не обязана совпадать с аппроксимируемой поверхностью (II, рис. 1). Отметим, что если в сечении получаются две совершенно идентичные кривые, то очевидно, что отсеченная поверхность симметричная и точка этой поверхности находится взятием производной (с приравниванием ее нулю) по одной переменной. Точка минимума несимметричной поверхности может быть найдена взятием частных производных по переменным, если аппроксимирующая поверхность описывается с помощью достаточно простого уравнения от двух (и более) переменных.

Если найдены уравнения для аппроксимации обеих кривых $f_1(h)$ и $f_2(B)$, то можно получить уравнение от двух переменных $F(h, B)$. Предварительно, однако, при аппроксимации кривых удобнее пользоваться относительными координатами на отрезке $[0{,}1—0{,}9]$ с шагом 0,1, т.е. применять девять узлов интерполяции и девять ординат. Перейти от реальных координат к относительным можно по формулам

$$u = \frac{h_u - (h_1 - h_ш)}{10 \cdot h_ш}, \tag{1}$$

$$v = \frac{B_v - (B_1 - B_ш)}{10 \cdot B_ш}, \tag{2}$$

где h_u, B_v — реальные абсциссы; h_1, B_1 — начальные значения переменных на оси абсцисс; $h_ш$, $B_ш$ — шаг изменения переменных; u, v — относительные абсциссы, которые принимают значения 0,1; 0,2; 0,3; ...; 0,9.

Таким образом, если известны пределы изменения реальных ординат, то относительные u и v могут быть всегда вычислены.

Пусть кривая по переменной h аппроксимируется многочленом второй степени

$$y_h = a_{12}u^2 + a_{11}u + a_{10}, \tag{3}$$

а по переменной B многочленом третьей степени

$$y_B = a_{23}v^3 + a_{22}v^2 + a_{21}v + a_{20}. \tag{4}$$

Тогда функция от двух переменных может быть найдена следующим образом [1, 2]. Образуем двумерную матрицу коэффициентов, затем матрицу-строку и матрицу-столбец из неизвестных в уравнениях (3), (4). Матрица-столбец и матрица-строка образуют базовые векторы для уравнения $F_1(u,v)$:

$$y_{h,B}=(u^2 u 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3')$$

После перемножения трех матриц получаем функцию от двух переменных $y_{h,B} = F_1(u,v)$, в которой коэффициенты a_{ij} еще необходимо вычислить. Наиболее важным моментом в данном методе является аппроксимация кривых по каждой из переменных. Остальные вычисления вполне автоматичны.

Аппроксимация кривых разделяется на два этапа: первый — предположение вида аппроксимирующей функции, второй — вычисление коэффициентов уравнения. Рассматриваемый метод, позволяет весьма просто вычислять коэффициенты аппроксимирующей функции и в некоторой мере автоматизировать подбор вида функции. Он применим для вычисления коэффициентов не только многочленов, но и других функций, однако здесь рассматриваются многочлены как наиболее распространенная функция для аппроксимации исходных данных.

Представим многочлен n-й степени в виде возрастающей суммы числа членов; последним в этом ряду будет находиться сам многочлен n-й степени:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_0 x^0 = a_0; \\ y_1 &= a_0 + a_1 x; \\ y_2 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2; \\ y_3 &= a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_3 x^3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Будем далее придавать переменной x равноотстоящие значения $(x_2-x_1=x_3-x_2=\ldots=x_n-x_{n-1}=h)$ и вычислим значения

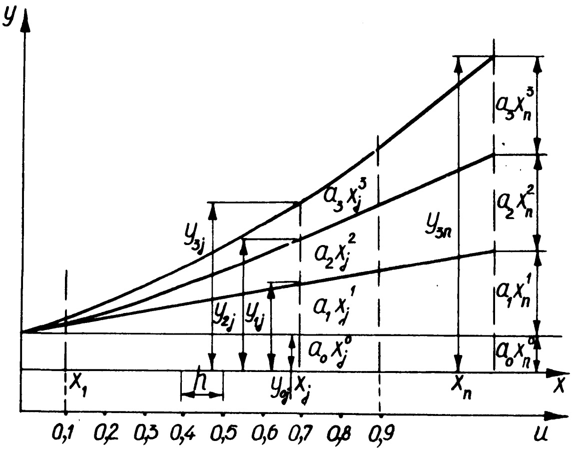

Рис. 2.

y_{ij} по формулам (5). Ординаты y_{ij} имеют двойной индекс, первый из которых означает номер многочлена , а второй — номер узла интерполяции (рис. 2).

Известно, что конечные разности ординат многочлена (m +1)-го порядка равны нулю (где m =0, 1, 2, ..., n для многочленов (5)). Покажем это на примере многочлена третьей степени:

$$y_3 = 1{,}2 + 2{,}2x + 1{,}2x^2 + 0{,}2x^3, \ldots \qquad (6)$$

где x — переменная, принимающая значения натурального ряда чисел (1, 2, 3, ..., n).

Результаты вычислений сведены в табл. 1.

В табл. 1 приводятся значения y_{ij} каждого многочлена и их последовательные разности (от последующих значений отнимаются предыдущие) . В скобки при знаке $\Delta^{(\,)}$ взяты номера конечных разностей (m +1)-го порядка, равные нулю. В развернутом виде эти конечные разности выражаются через ординаты y_{ij} следующим образом:

$$\Delta^{(1)} y_{0j} = y_{02} - y_{01} = 0, \qquad (7)$$

$$\Delta^{(2)} y_{1j} = \Delta^1 y_{12} - \Delta^1 y_{11} = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) =$$
$$= y_3 - 2y_2 + y_1 = 0, \qquad (8)$$

Таблица 1. Конечные разности многочленов

x	$y_0=1{,}2$		$y_1 = 1{,}2 + 2{,}2\ x$			$y_2 = 1{,}2 + 2{,}2x +$			$+1{,}2x^2$	$y_3 = 1{,}2 + 2{,}2x + 1{,}2x^2 + 0{,}2x^3$				
	y_{0j}	$\Delta^{(1)} y_{0j}$	y_{1j}	$\Delta^1 y_{1j}$	$\Delta^{(2)} y_{1j}$	y_{2j}	$\Delta^1 y_{2j}$	$\Delta^2 y_{2j}$	$\Delta^{(3)} y_{2j}$	y_{3j}	$\Delta^1 y_{3j}$	$\Delta^2 y_{3j}$	$\Delta^3 y_{3j}$	$\Delta^{(4)} y_{3j}$
1	1,2		3,4			4,6				4,8				
		0		2,2				5,8			7,2			
2	1,2		5,6		0	10,4	2,4		0	12,0		4,8		
		0		2,2				8,2			12,0		1,2	
3	1,2		7,8		0	18,6	2,4		0	24,0		6,0		0
		0		2,2				10,6			18,0		1,2	
4	1,2		10,0		0	29,2	2,4			42,0		7,2		
		0		2,2				13,0			25,2			
5	1,2		12,2			42,2				67,2				

$$\Delta^{(3)} y_{2j} = \Delta^2 y_{22} - \Delta^2 y_{21} = (\Delta^1 y_{23} - \Delta^1 y_{22}) - (\Delta^1 y_{22} - \Delta^1 y_{21}) = [(y_{24} - y_{23}) - (y_{23} - y_{22})] - [(y_{23} - y_{22}) - (y_{22} - y_{21})] = y_{24} - 3y_{23} + 3y_{22} - y_{21} = 0, \tag{9}$$

$$\Delta^{(4)} y_{3j} = \Delta^3 y_{32} - \Delta^3 y_{31} = (\Delta^2 y_{33} - \Delta^2 y_{32}) - (\Delta^2 y_{32} - \Delta^2 y_{31}) = y_{35} - 4y_{34} + 6y_{33} - 4y_{32} + y_{31}. \tag{10}$$

Конечные разности (7), (8), (9), (10) симметричны (коэффициенты от концов к середине одинаковы), алгебраическая сумма коэффициентов равна нулю.

С помощью конечных разностей можно вычислить коэффициенты аппроксимирующего многочлена [2]. Как видно из рис.2, каждая из ординат y_{3j} многочлена третьей степени состоит из суммы отрезков $a_i x_j^i$ и поэтому для ординат y_{3j} можно записать следующую сумму чисел:

$$y_{3j} = a_3 x_j^3 + a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_o. \tag{11}$$

Для ординат y_{2j} записываем сумму чисел:

$$y_{2j} = a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_o. \tag{12}$$

Заменим левую часть равенства (11) обозначением левой части (12). Получим

$$y_{3j} = a_3 x_j^3 + y_{2j} \tag{13}$$

или

$$y_{2j} = y_{3j} - a_3 x_j^3.$$

Но из ординат y_{2j} можно образовать конечную разность (9), равную нулю:

$$(y_{31} - a_3 x_1^3) - 3(y_{32} - a_3 x_2^3) + 3(y_{33} - a_3 x_3^3) - (y_{34} - a_3 x_4^3) = 0. \tag{14}$$

В равенстве (14) содержится одна неизвестная величина a_3 – старший коэффициент кубического уравнения. Значение a_3 находим из (14):

$$a_3 = \frac{y_{31} - 3y_{32} + 3y_{33} - y_{34}}{x_1^3 - 3x_2^3 + 3x_3^3 - x_4^3} \tag{15}$$

Отметим, что числитель дроби (15) не равен нулю, так как для y_{3j} существует конечная разность, равная нулю, более высокого порядка (10). Знаменатель в (15) также не равен нулю, так как он равен постоянному числу $(-6\,h^3)$. Действительно

$$x_2 = x_1 + h; \quad x_3 = x_1 + 2h; \quad x_4 = x_1 + 3h.$$

Подставив эти равенства в знаменатель (15), получим

$$a_3 = \frac{y_{31} - 3y_{32} + 3y_{33} - y_{34}}{-6\,h^3}. \tag{16}$$

Для нахождения коэффициента a_2 запишем равенство (11) следующим образом:

$$y_{2j} = a_2 x_j^2 + y_{1j}. \tag{17}$$

В равенстве (11) присутствуют ординаты y_{1j}, для которых справедлива конечная разность (8). Выразим y_{1j} из равенства (17) и подставим их значения в разделенную разность (8):

$$(y_{21} - a_2 x_1^2) - 2(y_{22} - a_2 x_2^2) + (y_{23} - a_2 x_3^2) = 0. \tag{18}$$

Из равенства (18) получаем формулу для вычисления коэффициента a_2:

$$a_2 = \frac{y_{21} - 2y_{22} + y_{23}}{x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2}. \tag{19}$$

В формуле (19) значения ординат y_{2j} неизвестны, поэтому их следует выразить через ординаты y_{3j} из (13). Подставляя значения y_{2j}, выраженные через ординаты y_{3j} и коэффициент a_3 в (19), получаем

$$a_2 = \frac{(y_{31} - 2y_{32} + y_{33})}{(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)} - a_3 \frac{(x_1^3 - 2x_2^3 + x_3^3)}{(x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2)} \tag{20}$$

или

$$a_2 = \frac{y_{31} - 2y_{32} + y_{33}}{2h^2} - 3a_3(x_1 + h). \tag{21}$$

Для вычисления коэффициента a_1 используем конечную разность (7):

$$(y_{12} - a_1 x_2) - (y_{11} - a_1 x_1) = 0.$$

Получаем

$$a_1 = \frac{y_{12}-y_{11}}{x_2-x_1} = \frac{y_{12}-y_{11}}{h}. \qquad (22)$$

Выразим y_{1j} через ординаты y_{3j} и коэффициенты a_3 и a_2 :

$$a_1 = \frac{(y_{32}-a_3x_2^3-a_2x_2^2)-(y_{31}-a_3x_1^3-a_2x_1^2)}{(x_2 - x_1)} = \qquad (23)$$

$$= \frac{y_{32}-y_{31}}{h} - a_3\left[3x_1(x_1+h)+h^2\right] - a_2(2x_1+h).$$

Наконец, значение коэффициента a_o, выраженное через ординаты y_{3j} будет найдено следующим образом:

$$a_o=y_o=y_{31}-a_3x_1^3 - a_2x_1^2 - a_1x_1 = y_{31}- \qquad (24)$$
$$-x_1\left[x_1(a_3x_1+a_2)+a_1\right].$$

Таким образом, для вычисления всех коэффициентов многочлена третьей степени получены формулы (16), (21), (23), (24). Формульное вычисление коэффициентов многочлена значительно удобнее и точнее, чем с помощью системы линейных уравнений [3].

Метод построения формул достаточно наглядно изложен на примере многочлена третьей степени. Пользуясь этим методом, можно построить формулы для вычисления коэффициентов многочлена любой степени.

В изложенном методе формульного вычисления коэффициентов многочлена существенно используется одно предложение [2], которое сводится к тому, чтобы плоскость между осью абсцисс и кривой разделить на полосы и образовать сумму ординат (рис. 2), а не сразу аппроксимировать ординаты заданной кривой. Этот прием можно использовать не только для многочленов, но и для других функций. Рассмотрим, например, функцию с отрицательной и положительной степенью неизвестной:

$$y_n = \frac{A_{-1}}{(x+\alpha_{-1})^{n_1}} + A_o + A_{+1}(x+\alpha_{+1})^{n_2}, \qquad (25)$$

где α_{-1}, α_{+1} -- числа; n_1 -- отрицательная степень; n_2 -- положительная степень переменной. Предположим, что $n_2=2$, тогда сумма двух последних слагаемых

$$y_{+2} = A_o + A_{+1}(x+\alpha_{+1})^2 \qquad (26)$$

образует многочлен второй степени, для которого справедлива разделенная разность (9). Ординаты (y_{+2j}) многочлена (26) отсекают часть площади под кривой с ординатами y_{-nj}; коэффициент A_{-1} в равенстве (25) можно найти, пользуясь рассмотренным методом. Запишем (25) в виде

$$y_{-nj} = \frac{A_{-1}}{(x_j+\alpha_{-1})^{n_1}} + y_{+2j}, \qquad (27)$$

Выразив ординаты y_{+2} из (27) и подставив в разделенную разность (9), получим формулу для вычисления A_{-1} :

$$A_{-1}=\frac{y_{-n1}-3y_{-n2}+3y_{-n3}-y_{-n4}}{(x_1+\alpha_{-1})^{n_1}-3(x_2+\alpha_{-1})^{n_1}+3(x_3+\alpha_{-1})^{n_1}-(x_4+\alpha_{-1})^{n_1}}. \qquad (28)$$

Коэффициенты A_o и A_{+1} вычисляются, как для многочлена второй степени. Отметим также, что по ординатам y_{-nj} можно вычислить коэффициенты α_{-1} и α_{+1} .

Из формул (16), (21), (23), (24) видно, что число ординат, применяемых для вычисления коэффициентов, неодинаково. Наибольшее число ординат используется для вычисления старшего члена многочлена -- пять, а затем число ординат сокращается до двух при вычислении коэффициента a_1 и до одной при вычислении a_o .

Как отмечалось, для аппроксимации функции цели можно использовать девять ординат, а симметричные конечные разности, получаемые классическим путем, как это показано в табл. 1, содержат ограниченное количество ординат.

Нами получены несимметричные разделенные разности и метод их формирования для любых степеней многочленов.

Рассмотрим многочлен второй степени на девяти узлах интерполяции, которые на оси абсцисс принимают значения 0,1; 0,2; 0,3; ... , 0,9:

$$y = A_o(x^2 + \alpha_1 x + \alpha_o), \qquad (29)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{A_o}$; $\alpha_o = \dfrac{a_o}{A_o}$; $\alpha_2 = 1$; $A_o = a_2$.

Для узла интерполяции [0,1] запишем

$$y_1 = z_1 = A_o(0{,}1^2 + \alpha_1 0{,}1 + \alpha_o) = A_o \gamma_1, \qquad (30)$$

для узлов интерполяции [0,1; 0,2; 0,3], согласно методу равных сумм [4], подобная же запись для многочлена (29) будет иметь вид

$$y_1 + y_2 + y_3 = A_o(0{,}1^2 + \alpha_1 0{,}1 + \alpha_o) + A_o(0{,}2^2 + \alpha_1 0{,}2 + \alpha_o) +$$
$$+ A_o(0{,}3^2 + \alpha_1 0{,}3 + \alpha_o) = A_o \gamma_2. \qquad (31)$$

Ввиду того, что запись равенств (30) и (31) осуществлена для одной и той же функции (29), коэффициент A_o можно вычислить по одной из них. Коэффициент A_o назовем выравнивающим. Выразив выравнивающий коэффициент из (30) и (31), приравняем правые части:

$$\frac{z_1}{\gamma_1} = \frac{z_2}{\gamma_2} \qquad \text{или} \qquad \gamma_1 = \gamma_2 \frac{z_1}{z_2}. \qquad (32)$$

Подставив в (32) вместо γ_1, γ_2, z_1, z_2 их значения и произведя несложные алгебраические преобразования, получим равенство

$$(0{,}1^2 + \alpha_1 0{,}1 + \alpha_o)\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_2}{z_1} = (0{,}2^2 + \alpha_1 0{,}2 + \alpha_o) +$$
$$+ (0{,}3^2 + \alpha_1 0{,}3 + \alpha_o),$$

где

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\frac{z_2}{z_1} = \frac{y_2 + y_3}{y_1}.$$

Производя дальнейшие алгебраические преобразования, получим следующее уравнение с двумя неизвестными α_1 и α_0 :

$$\alpha_1(-0{,}5y_1+0{,}1y_2+0{,}1y_3)+\alpha_0(-2y_1+y_2+y_3)+(-0{,}13y_1+ +0{,}01y_2+0{,}01y_3)=0. \quad (33)$$

Далее произведем точно такие же алгебраические операции для узлов инетрполяции [0,1] и [0,1; 0,2; 0,4], затем для [0,1] и [0,1; 0,2; 0,5] .В результате получим еще два уравнения с двумя неизвестными:

$$\alpha_1(-0{,}6y_1+0{,}1y_2+0{,}1y_4)+\alpha_0(-2y_1+y_2+y_4) + +(-0{,}20y_1+0{,}01y_2+0{,}01y_4)=0, \quad (34)$$

$$\alpha_1(-0{,}7y_1+0{,}1y_2+0{,}1y_5)+\alpha_0(-2y_1+y_2+y_5) + +(-0{,}29y_1+0{,}01y_2+0{,}01y_5)=0. \quad (35)$$

Исключим одно неизвестное, например α_1, для чего составим результант (определитель) [5] для уравнений (33) и (34) и вычислим его:

$$R_1=\begin{vmatrix} (-5y_1+y_2+y_3)0{,}1 & [\alpha_0(-2y_1+y_2+y_3)+0{,}01(-13y_1+y_2+y_3)] \\ (-6y_1+y_2+y_4)0{,}1 & [\alpha_0(-2y_1+y_2+y_4)+0{,}01(-20y_1+y_2+y_4)] \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_0 y_1(-2y_1+y_2+4y_3-3y_4)+0{,}02(11y_1-3y_2-7y_3+4y_4). \quad (36)$$

В работе [2] более подробно обсуждается вопрос применения результанта для данных многочленов, хотя там результант используется для других целей.

Исключим также неизвестное из уравнений (33) и (35) с помощью результанта:

$$R_2=\begin{vmatrix} (-5y_1+y_2+y_3)0{,}1 & \left[a_0(-2y_1+y_2+y_3)+(-13y_1+y_2+ \right. \\ & \left. +y_3)0{,}01\right] \\ (-7y_1+y_2+y_5)0{,}1 & \left[a_0(-2y_1+y_2+y_5)+(-29y_1+y_2+ \right. \\ & \left. +y_5)0{,}01\right] \end{vmatrix}= \qquad (37)$$

$$=\alpha_0 y_1(-4y_1+2y_2+5y_3-3y_5)+0{,}02y_1(27y_1-7y_2-11y_3+4y_5).$$

Применение результанта позволяет получить два многочлена с одним неизвестным. Для этих двух многочленов также можно написать результант для исключения неизвестного α_0, и, вычислив его, приравнять нулю. Дело в том, что оба многочлена порождены одной и той же функцией (29) и коэффициент α_0 один и тот же в обоих многочленах (36) и (37). Известно, что если два уравнения имеют один общий корень, то их результант равен нулю [5].

Раскрыв результант R_{1-2} для (36) и (37), получим выражение

$$R_{1-2}=-10y_1^2-y_2^2+7y_1y_2+47y_1y_3-65y_1y_4+25y_1y_5- \qquad (38)$$
$$-10y_2y_3-9y_3^2+13y_2y_4-5y_2y_5+13y_3y_4-5y_3y_5=0.$$

После алгебраических преобразований в выражении (38) получаем следующее произведение ординат:

$$R_{1-2}=(-2y_1+y_2+9y_3-13y_4+5y_5)(5y_1-y_2-y_3)=0. \qquad (39)$$

В этом выражении второй множитель не является конечной разностью и не равен нулю. Следовательно, чтобы результант был равен нулю, необходимо, чтобы нулю был равен первый множитель в (39):

$$2y_1-y_2-9y_3+13y_4-5y_5=0. \qquad (40)$$

Заметим, что если бы мы применили результант к уравнениям, содержащим не пять, а четыре ординаты, то получили бы следующее выражение:

$$2y_1^2+3y_2^2-7y_1y_2+6y_1y_3-2y_1y_4-3y_2y_3+y_2y_4=0, \quad (41)$$

которое приводится также к произведению двух линейных множителей:

$$(y_1-3y_2+3y_3-y_4)(2y_1-y_2)=0. \quad (42)$$

Но первый множитель в (42) не что иное,как конечная разность для квадратного многочлена, которая уже использовалась нами (9).

Если бы мы применили результант к уравнениям, содержащим шесть ординат, то получили бы следующую конечную разность:

$$3y_1-y_2-y_3-21y_4+34y_5-14y_6=0, \quad (43)$$

а для девяти ординат

$$6y_1-y_2-y_3-y_4-y_5-y_6-113y_7+203y_8-91y_9=0. \quad (44)$$

Следует однако отметить, что применение результанта к уравнениям, содержащим большое количество ординат, приводит к столь громоздким алгебраическим преобразованиям, что нам пришлось искать другие пути. Такой способ вычисления был найден, он очень практичен, но в данной статье мы не имеем возможности показать его.

Отметим также, что полученные результаты мы по традиции называем конечными разностями, хотя в данном случае первоначальный смысл этого термина теряется, поэтому более точно этот результат следует называть нулевыми комбинациями ординат (НКО).

НКО для большого числа ординат весьма схожи с симметричными конечными разностями, поэтому мы будем их также называть несимметричными конечными разностями (НКР). Алгебраическая сумма коэффициентов НКР равна нулю, но от концов к середине коэффициенты неодинаковы.

Поскольку мы хотим использовать НКО для аппроксимации кривых на девяти узлах интерполяции, то приведем таблицу НКО для многочленов от первой до седьмой степени для девяти ординат (табл. 2).

Таблица 2. Сводка НКО на 9 ординатах

Нулевые комбинации ординат для многочленов	Степень многочлена
$7y_1-y_2-y_3-y_4-y_5-y_6-y_7-29y_8+28y_9=$ $=0$	1
$6y_1-y_2-y_3-y_4-y_5-y_6-113y_7+203y_8-$ $-91y_9=0$	2
$5y_1-y_2-y_3-y_4-y_5-211y_6+545y_7-$ $-475y_8+140y_9=0$	3
$4y_1-y_2-y_3-y_4-225y_5+741y_6-939y_7+$ $+541y_8-119y_9=0$	4
$3y_1-y_2-y_3-141y_4+545y_5-883y_6+$ $+741y_7-319y_8+56y_9=0$	5
$2y_1-y_2-49y_3+203y_4-385y_5+413y_6-$ $-259y_7+89y_8-13y_9=0$	6
$y_1-8y_2+28y_3-56y_4+70y_5-56y_6+28y_7-$ $-8y_8+y_9=0$	7

Как видно из табл. 2, последнюю строку занимает симметричная конечная разность, для которой девять ординат являются минимальным числом для образования линейной НКО. Симметричные конечные разности составляются из минимального количества ординат для образования линейной НКО. Однако здесь нами показано существование НКР, которые расширяют понятие о разделенных разностях; НКР можно записать на любом количестве ординат для любой степени многочлена.

Отметим, что для квадратного одночлена

$$y = A_0(x + \alpha)^2 \qquad (45)$$

нами обнаружена НКО на трех ординатах, но уже имеющая вторую степень:

$$(y_1 - 4y_2 + y_3)^2 - 4y_1y_3 = 0. \qquad (46)$$

Несимметричные разделенные разности более соответствуют успешной аппроксимации заданной кривой по двум причинам: во-первых, они захватывают весь выбранный отрезок кривой, так как теперь мы можем записать НКО на любом числе ординат; во-вторых, применение симметричных разделенных разностей ограничено участками кривых монотонно возрастающих или монотонно убывающих, так как при наличии точки минимума или максимума ординаты с одинаковыми коэффициентами, но разными знаками (до точки экстремума и за ней) будут равны и могут сократиться. В этом случае коэффициенты многочлена будут вычислены неверно. Несимметричные разделенные разности лишены этих недостатков.

Возвращаясь к вычислению коэффициентов многочленов, отметим, что можно применить НКР для вычисления a_3, a_2, a_1, a_0 по формулам, аналогичным формулам (15), (19), (21), (24), только записывать их на девяти узлах интерполяции и девяти ординатах в соответствии с НКР (табл. 2) для многочлена третьей степени. Поскольку эта запись будет почти автоматической, ее здесь не приводим.

Рассмотрим возможность вычисления коэффициентов α_{-1} и α_{+1} в функции (25) с использованием НКР. Аналогично формуле (28) можно записать

$$A_{-1} = \frac{6y_{-n1} - y_{-n2} - y_{-n3} - y_{-n4} - y_{-n5} - y_{-n6} - 113y_{-n7} + 203y_{-n8} - 91y_{-n9}}{6(x_1+\alpha_{-1})^{n_1} - (x_2+\alpha_{-1})^{n_1} + \ldots + (x_6+\alpha_{-1})^{n_1} - 113(x_7+\alpha_{-1})^{n_1} + 203(x_8+\alpha_{-1})^{n_1} - 91(x_9+\alpha_{-1})}. \qquad (47)$$

В формуле (47) использовано девять узлов интерполяции x_j и девять ординат y_{-nj}. Поскольку последние вычисляются по одной и той же функции (25), то значение A_{-1} определяется как по формуле (28), так и (47), следовательно, правые части этих формул можно приравнять. Тогда из соотношения правых частей формул получаем:

$$d_{-n} = \gamma_{-n} ,$$

где

$$d_{-n} = \frac{6y_{-n1} - y_{-n2} - y_{-n3} - y_{-n4} - y_{-n5} - y_{-n6} - 113_{-n7} +}{y_{-n1} - 3y_{-n2} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ 203y_{-n8} - 91y_{-n9}}{+ 3y_{-n3} - y_{-n4}} , \quad (48)$$

$$\gamma_{-n} = \frac{6(x_1+\alpha_{-1})^{n_1} - (x_2+\alpha_{-1})^{n_1} - \ldots - (x_6+\alpha_{-1})^{n_1} - 113(x_7+\alpha_{-1})^{n_1} +}{(x_1+\alpha_1)^{n_1} - 3(x_2+\alpha_{-1})^{n_1} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+203(x_8+\alpha_{-1})^{n_1} - 91(x_9+\alpha_{-1})}{+3(x_3+\alpha_{-1})^{n_1} - (x_4+\alpha_{-1})^{n_1}} . \quad (49)$$

Ординаты в формуле (48) — величины заданные и поэтому вычисляются; γ_{-n} содержит в общем случае три неизвестные: α_{-1}, n_1, n_2, так как степень многочлена n_2 в функции (25) определяет вид НКР. Для нахождения коэффициента α_{-1} следует построить график функции $\gamma_{-n} = \gamma(\alpha_{-1}, n_1)$, причем таких графиков от двух переменных будет столько, сколько испытывается степеней n_2 для аппроксимации заданной функции функцией (25).

В формулах (48) и (49) использованы конечные разности: симметричная и несимметричная; учитывая сказанное об НКР, следует в любом случае пользоваться НКР, например на шести и девяти ординатах для нахождения α_{-1} и n_1. Коэффициент A_{-1} вычисляют затем по формуле (28) или (47).

Найдя подходящие значения α_{-1} и n_1, можно приступить к поискам коэффициента α_{+1} в функции (25). Для этого определяется разность ординат:

$$y_{+2j} = y_{-nj} - \frac{A_{-1}}{(x_j + \alpha_{-1})^{n_1}} . \quad (50)$$

Для ординат y_{+2j} записываются две НКР в соответствии со степенью n_2 и находятся две формулы для вычисления A_{+1} аналогично тому, как это было сделано для коэффициента A_{-1}. Дальнейшие действия для вычисления коэффициента α_{+1} совершенно аналогичны действиям для вычисления коэффициента α_{-1}. Коэффициент A_0 определятся по разности ординат $(y_{-1j} - y_{+2j}) = const$. Таким образом, в этом расчете все величины вычисляются и ни одна не задается априорно.

Для получения функции от двух переменных следует поступить также, как это сказано в пояснениях к равенству (3'). В частности, базовым вектором для аппроксимирующей функции (25) будет вектор

$$\left(\frac{1}{(x + \alpha_{-1})^{n_1}} \quad 1 \quad (x + \alpha_{+1})^{n_2} \right).$$

Воспользовавшись изложенным методом и НКР можно решать задачи по технико-экономическому расчету оптимальных параметров сооружений. Вычисление коэффициентов a_{ij} в функции (3') следует провести способом, изложенным в работе [1].

Литература

1. Минаев И.В. Технико-экономический расчет параметров вертикального дренажа методом аппроксимации. -- В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 2. Минск, 1972. 2. Минаев И.В. Метод аппроксимации и его применение в технико-экономическом расчете дренажей. -- В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 3. Минск, 1973. 3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Изд. 2-е. М., 1963. 4. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. М., 1962. 5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1962.