

1968, т. 15, № 3. 6. Thorsen G. и др. On the terminal velocity of circulating and oscillating liquid drops. - "Chem Eng Sci", 1968, v. 23, № 5. 7. М а-ленков И.Г. О движении больших пузырей газа, всплывающих в жидкости. - ПМТФ, 1968, № 6. 8. Сахаров В.А. Экспериментальное определение относительной скорости движения газового пузыря в потоке жидкости. - "Изв. вузов. Нефть и газ", 1966, № 6. 9. Бяков В.М. Движение деформированных пузырьков газа в жидкостях. - ЖФК, 1963, т. 37, в. 4.

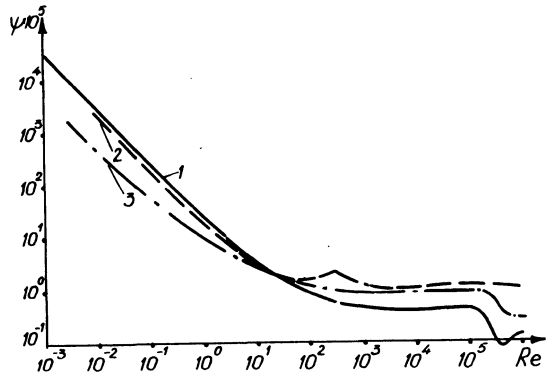
М.В. Кравцов, В.В. Суворов, И.В. Федюкович

### ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ НА СКОРОСТЬ ОСАЖДЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ

Для определения скорости движения некоторых видов частиц чаще всего используют зависимости, выведенные для частиц шарообразной формы. Это вызвано тем, что движение шарообразных частиц изучено наиболее полно. Для использования соотношений, выведенных для шара, вводят так называемый коэффициент формы. Естественно, что здесь многообразию форм частиц будет соответствовать множество коэффициентов форм. Однако, если иметь дело в технологическом процессе с одним видом частиц, то таким образом задача в какой-то степени может быть решена. Отметим, что отличие движения частиц определенной формы от движения шара проявляется для разных чисел Рейнольдса неодинаково. Так, опытные значения коэффициентов сопротивления диска (рис. 1) до чисел  $Re \approx 50$  мало отличается от соответствующих значений коэффициента сопротивления шара [1]. При  $Re > 50$  эти различия становятся весьма существенными. Такая же картина наблюдается и для других форм частиц. При расчетах же коэффициент формы для определенного вида частиц считается постоянным и не зависящим от числа Рейнольдса.

Рассмотрим движение некоторых осесимметричных форм тел и покажем, что выведенные ранее зависимости для случая движения шара можно использовать для определения скоростей движения частиц произвольной формы.

Рис.1. Опытные зависимости  $\Psi = f(Re)$  для шаров (1), удлиненных круглых цилиндров (3) при  $L/d > 100$  и дисков (2).



Исследования движения геометрических форм (конусов, конусов в комбинации с полушариями, полушарий, цилиндров и т.д.) не имеют систематического характера и в большинстве случаев выполнены для определенных рейнольдсовых чисел, соответствующим условиям опыта при продувке в аэродинамических трубах.

Ранние работы в этом направлении были проделаны фон-Леслеем, Ренаром, Кановетти; более тщательные исследования принадлежат Эйфелю [2]. В настоящее время данному вопросу посвящен ряд исследований [3--5].

Из осесимметричных тел разной формы опытным путем наиболее изучено движение бесконечно длинных круглых цилиндров ( $\frac{L_{ц}}{d_{ц}} > 100$ , где  $L_{ц}$ ,  $d_{ц}$  -- длина и диаметр цилиндра). Бесконечно длинные цилиндры движутся так, что их ось направлена перпендикулярно направлению движения.

Опытный график зависимости  $\Psi = f(Re)$  для случая движения бесконечно длинных цилиндров известен давно. Для суждения об этом предмете будем использовать обобщенный график зависимости  $\Psi = f(Re)$ , опубликованный в работе [3].

Из теоретических зависимостей  $\Psi = f(Re)$  для случая бесконечно длинных цилиндров известна лишь формула Ламба [3]

$$(\Psi_{\infty} Re_{\infty})_{d_{ц}/L_{ц} \rightarrow 0} = \frac{8\pi}{\frac{1}{2} - \gamma - \ln \frac{1}{8} Re_{\infty}}, \quad (1)$$

где  $\gamma = 0,577$  -- постоянная Эйлера. Эта формула дает удовлетворительные результаты при  $Re < 1,0$ .

На основе использования зависимостей, выведенных для  
шара, можно получить общее выражение для  $\psi = f(Re)$  при  
движении бесконечно длинных цилиндров.

Будем рассматривать движение равновеликих шаров и ци-  
линдров в одной и той же жидкости при одинаковых условиях.  
Тогда

$$Re_{\text{ц}} = \frac{v_{\text{ц}} d_{\text{ц}} \rho}{\mu}; \quad Re_{\text{ш}} = \frac{v_{\text{ш}} d_{\text{ш}} \rho}{\mu}; \quad \frac{Re_{\text{ц}}}{Re_{\text{ш}}} = \frac{v_{\text{ц}} d_{\text{ц}}}{v_{\text{ш}} d_{\text{ш}}}$$

(все величины с индексом "ц" относятся к цилиндру, с индек-  
сом "ш" - к шару).

Диаметр шара равновеликого цилиндру равен

$$d_{\text{ш}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} d_{\text{ц}}^2 L_{\text{ц}}} .$$

Обозначим  $\frac{v_{\text{ц}}}{v_{\text{ш}}} = x$ ;  $\frac{L_{\text{ц}}}{d_{\text{ц}}} = y$  . Тогда

$$\frac{Re_{\text{ц}}}{Re_{\text{ш}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1,5y}} . \quad (2)$$

Известно, что сила сопротивления движению цилиндра равна

$$F = \psi_{\text{ц}} d_{\text{ц}} L_{\text{ц}} \frac{\rho v_{\text{ц}}^2}{2} = \frac{\pi d_{\text{ц}}^2}{4} L_{\text{ц}} \Delta \rho g ,$$

а шара

$$F = \psi_{\text{ш}} \frac{\pi d_{\text{ш}}^2}{4} \frac{\rho v_{\text{ш}}^2}{2} = \frac{1}{6} \pi d_{\text{ш}}^3 \Delta \rho g ;$$

$$\psi_{\text{ц}} = \frac{\pi d_{\text{ц}} \Delta \rho g}{2 \rho v_{\text{ц}}^2} ; \quad \psi_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \frac{d_{\text{ш}} \Delta \rho g}{\rho v_{\text{ш}}^2} ;$$

$$\frac{\psi_{\text{ц}}}{\psi_{\text{ш}}} = \frac{3}{8} \pi \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{1,5y}} . \quad (3)$$

Предположим, что для эквивалентных цилиндра и шара одному и тому же значению  $x$  всегда соответствует одно и то же значение  $y$ . Тогда для заданных значений  $x$  и  $y$

$$\frac{Re_{\Pi}}{Re_{\text{ш}}} = k_1; \quad \frac{\psi_{\Pi}}{\psi_{\text{ш}}} = k_2,$$

где  $k_1 = \frac{x}{\sqrt[3]{1,5y}}$ ,

а  $k_2 = \frac{3}{8}\pi \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{1,5y}}$ .

Так как при  $Re \leq 7000$  [6]

$$\psi_{\text{ш}} = \frac{A}{Re_{\text{ш}}} + \frac{B}{\sqrt{Re_{\text{ш}}}} + C_{\text{д}}, \quad (4)$$

то подставляя в (4)  $\psi_{\text{ш}} = \frac{\psi_{\Pi}}{k_2}$  и  $Re_{\text{ш}} = \frac{Re_{\Pi}}{k_1}$ , получим

$$\psi_{\Pi} = \frac{Ak_2 k_1}{Re_{\Pi}} + \frac{Bk_2 \sqrt{k_1}}{\sqrt{Re_{\Pi}}} + C_{\text{д}} k_2 \quad (5)$$

или

$$\psi_{\Pi} = \frac{A'}{Re_{\Pi}} + \frac{B'}{\sqrt{Re_{\Pi}}} + C'_{\text{д}}. \quad (6)$$

Значения постоянных коэффициентов  $A' = 4,2$ ;  $B' = 5,0$ ;  $C'_{\text{д}} = 0,8$  определены на основе опытного графика зависимости  $\psi = f(Re)$  [3] с учетом минимума расхождений опытных и расчетных величин.

На рис. 2 сопоставляются расчетные и опытные значения  $\psi$  для соответствующих значений  $Re$ . Совпадение расчетных и опытных значений наблюдается для всего исследованного диапазона чисел Рейнольдса.

В случае движения цилиндров конечных размеров ( $L_{\Pi}/d_{\Pi} < 100$ ) коэффициент сопротивления и скорость зависят не только от диаметра цилиндра, но и от его удлинения  $\frac{L_{\Pi}}{d_{\Pi}}$ . Некоторые данные о влиянии удлинения цилиндра на коэффициент сопротивления  $\psi$  имеются в работе [2]. Известны исследования зависимости  $\psi = f(Re)$  для определенного значения  $L_{\Pi}/d_{\Pi}$

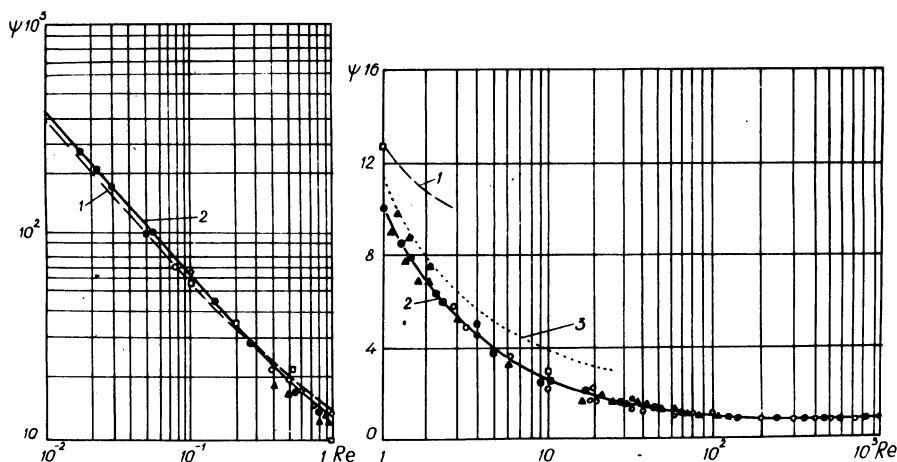


Рис. 2. Сопоставление расчетных и опытных данных [3] о движении удлиненных цилиндров ( $L / d > 100$ ): 1—по формуле Ламба; 2—по формуле (6); 3—по формуле Bairstow.

[4]. Можно показать, что и эти опытные данные удовлетворительно согласуются с расчетными по (6).

Для определения скорости движения цилиндров любого удлинения нами проведены эксперименты, где скорость движения цилиндров различных удлинений сопоставлялась со скоростями равновеликих шаров. Исследовались скорости падения шаров и цилиндров из органического стекла ( $\gamma = 1,187 \text{ г/см}^3$ ) в воде при температуре  $18^\circ\text{C}$ . Шары и цилиндры падали в трубе диаметром 120 см и высотой 340 см. Время падения измерялось с помощью механического секундомера с точностью до 0,1 с на участке 200 см. Первый створ был расположен на расстоянии 120 см от места пуска с тем, чтобы исключить влияние первоначального ускоренного участка движения.

Опытный график зависимости  $\frac{V_{II}}{V_{III}} = f\left(\frac{d_{II}}{L_{II}}\right)$ , построенный по результатам исследований относительных скоростей цилиндров, равновеликих шару (диаметр 1,626 см и скорость падения 30 см/с), приведен на рис. 3. Подобная зависимость

Рис. 3. Опытный график зависимости  $v_{ц}/v_{ш} = f(d_{ц}/L_{ц})$  при движении цилиндров в воде ( $t = 18^{\circ}\text{C}$ ) в различных зонах (I, II, III)

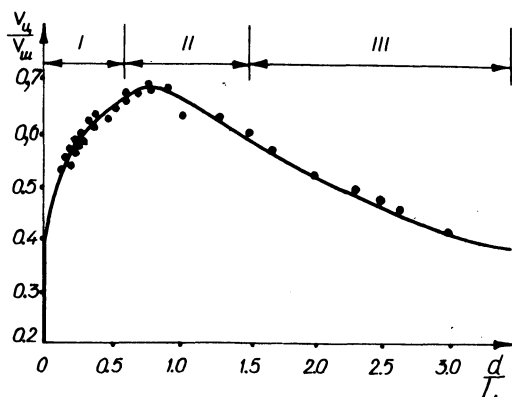
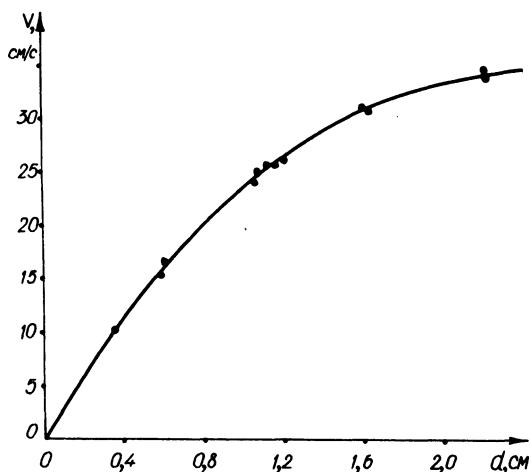


Рис. 4. Опытный график зависимости  $v = f(d)$  для шаров из органического стекла ( $\gamma = 1,187$ ) в воде ( $t = 18^{\circ}\text{C}$ ).



наблюдается и при движении цилиндров других объемов (табл. 1). В этом случае скорости равновеликих цилиндру шаров определялись по опытному графику зависимости  $v_{ш} = f(d_{ш})$  (рис. 4).

При движении цилиндров можно наметить три зоны. В первой зоне цилиндр движется относительно оси перпендикулярно направлению движения. Эта зона охватывает пределы  $d_{ц}/L_{ц}$  до 0,6. Вторая зона лежит в пределах  $d_{ц}/L_{ц}$  от 0,6 до 1,5. В этой зоне цилиндр не имеет определенной ориентации и при движении переворачивается. Третья зона характеризуется отношением  $d_{ц}/L_{ц} > 1,5$ . В этой зоне цилиндры движутся относительно оси по направлению движения.

Таблица 1. Скорости движения цилиндров и шаров

Но- мер п/п	Вес ци- линдра, г	Эквива- лентный диаметр шара, см	$V_{ш}$ , см/с, (опыт)	$\frac{d_{ц}}{L_{ц}}$	$\frac{V_{ц}}{V}$ (опыт)	$\frac{V_{ц}}{V}$ ш (расчет по (7))
1	2,6839	1,6216	30,00	0,259	0,571	0,570
2	3,1323	1,710	30,50	0,298	0,580	0,585
3	5,1334	2,017	32,50	0,514	0,641	0,645
4	3,0207	1,703	30,50	0,390	0,610	0,615
5	2,5432	1,562	29,50	0,359	0,603	0,605
6	2,6826	1,591	29,70	0,527	0,650	0,645
7	1,6504	1,352	27,20	0,286	0,598	0,580
8	3,1447	1,676	30,50	0,570	0,638	0,655
9	5,3607	2,001	32,50	0,808	0,697	0,665
10	3,5877	1,752	31,20	0,707	0,683	0,665
11	3,1696	1,682	30,40	0,833	0,685	0,660
12	3,1138	1,671	30,30	1,016	0,645	0,640
13	1,8953	1,418	28,00	0,876	0,682	0,660
14	1,2908	1,247	26,00	0,754	0,695	0,664
15	0,9686	1,150	25,00	0,578	0,650	0,665
16	3,1265	1,710	30,60	1,733	0,560	0,555
17	3,1611	1,714	30,60	1,705	0,560	0,560
18	3,1012	1,705	30,55	1,830	0,551	0,550
19	3,0842	1,702	30,55	1,520	0,583	0,585
20	2,6524	1,620	30,00	1,980	0,561	0,530
21	1,7949	1,421	28,00	1,415	0,630	0,595
22	1,8215	1,427	28,15	1,402	0,613	0,610
23	0,9042	1,155	25,00	1,020	0,640	0,640
24	1,6654	1,385	27,60	1,225	0,590	0,620
25	1,8811	1,426	28,10	2,050	0,521	0,525
26	1,3324	1,286	26,50	1,885	0,547	0,540
27	2,4645	1,581	29,50	3,000	0,420	0,420
28	0,8350	1,102	24,00	2,290	0,500	0,500
29	0,6991	1,038	23,30	2,250	0,500	0,500
30	0,8418	1,105	24,00	2,730	0,447	0,450
31	0,8918	1,126	24,50	2,940	0,428	0,420

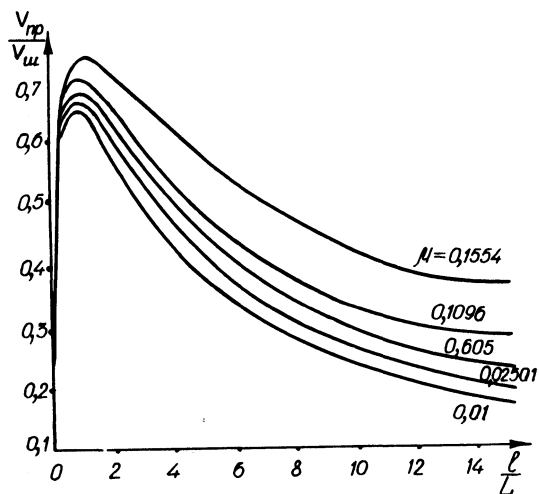


Рис. 5. Сопоставление расчетных данных при падении призматических тел в воде и водно-глицериновых растворах различной вязкости ( $\mu$ ).

Подобная зависимость наблюдается и при движении призматических тел с квадратным поперечным сечением ( $l$  -- сторона квадрата). Нами исследованы относительные скорости призматических тел с различным удлинением из органического стекла в воде и водно-глицериновых растворах различной вязкости. Опытный график зависимости  $\frac{V_{пр}}{V_{ш}} = f\left(\frac{l_{пр}}{L_{пр}}\right)$  представлен на рис. 5.

Опытные графики зависимости

$$\frac{v_{ц}}{v_{ш}} = f\left(\frac{d_{ц}}{L_{ц}}\right), \quad \frac{v_{пр}}{v_{ш}} = f\left(\frac{l_{пр}}{L_{пр}}\right)$$

аппроксимируются зависимостью

$$\frac{v}{v_{ш}} = \frac{z}{az^2 + bz + c}, \quad (7)$$

где  $z$  -- удлинение тела (для цилиндров  $z = d_{ц}/L_{ц}$ , для призматических тел  $z = l_{пр}/L_{пр}$ );  $a, b, c$  -- постоянные



для заданных условий коэффициенты;  $a = 0,31 - 0,01 \mu$ ;  $b = 1,0$ ;  $c = 0,21$  ( $\mu$  -- динамический коэффициент вязкости).

Приближенный расчет скорости осаждения частиц произвольной формы можно свести к расчету скорости движения призматических тел по формуле (7) с разделением всех возможных форм тел на три класса призматических:

1) удлинненные (игольчатые) частицы с отношением поперечного размера к длине менее единицы; 2) частицы, размеры которых примерно равны во всех направлениях; 3) плоские (чешуйчатые) частицы с отношением толщины к длине больше единицы.

Скорость движения шаров, равновеликих цилиндрам, можно определить по формуле (7)

$$V_{ш} = - \frac{2,85 \mu}{\pi(k+d/12)\rho} + \sqrt{\left[ \frac{2,85 \mu}{\pi(k+d/12)\rho} \right]^2 + \frac{d^2 \Delta \rho g}{3(k+d/12)\rho}}, \quad (8)$$

где  $k = \frac{3,68}{\sqrt[3]{\frac{\Delta \rho \rho g}{\mu^2}}}$ ;  $d$  -- диаметр шара;  $\rho, \mu$  -- плотность

и динамический коэффициент вязкости среды;  $\Delta \rho$  -- разность плотностей среды и шара;  $g$  -- ускорение силы тяжести.

## Л и т е р а т у р а

1. Lapple C.E., Shepherd C.B. Calculation of particle Trajectories. - "Ind. Eng. Chem.", 1940, т. 32, № 5.
2. Красноперов Е.В. Экспериментальная аэродинамика, ч. 2. Опытные данные о силах сопротивления тел простейших форм. Л.--М., 1935.
3. Jayaweera K.O.L.F, Mason B.J. The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. -- "J. Fluid Mech.", 1965, v. 22.
4. Chrisiansen E.B., Barker D.H. The effect shape and Density on the Free Settling of Particles at high Reynolds numbers. - "A.J.Ch. Journal", 1965, v. 11, № 1.
5. Marchildon E.K., Clamen A., Janvin W. Drag and Oscillatory Motion of Freely Falling Cylindrical Particles. - "The Canadian Journal of Chem Engineering", 1964, august.
6. Кравцов М.В., Суворов В.В. К вопросу седиментации частиц сферической формы. -- В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып 1. Минск, 1971.