$$f_1(x) = \frac{x\,(1,7 + x)}{(1 - x)} + \frac{3,7 - x}{X\,(3,1 + x)}, \qquad (25)$$

где $0,9 \geq x \geq 0,1$.

Разложение функций на более простые (две, три и более) позволяет получать эмпирические зависимости для очень сложных функций.

Литература

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М., 1967. 2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., 1963. 3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Минск, 1972. 4. Минаев И.В. Один способ подбора эмпирических формул к данным эксперимента. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып.3. Минск, 1973. 5. Минаев И.В. Использование несимметричных конечных разностей для расчета оптимальных параметров дренажа. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып.5. Минск, 1975. 6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М., 1962.

В.П. Сельченок, Б.Ш. Мордухович

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕГУЛИРОВАНИИ УРОВНЕЙ ВОДЫ В МЕЛИОРАТИВНЫХ КАНАЛАХ

Одна из важнейших гидротехнических задач, которая возникает при решении мелиоративных вопросов в зоне избыточного увлажнения, состоит в создании системы автоматического регулирования уровней грунтовых вод с помощью взаимосвязанной сети открытых каналов и подпорных сооружений с автоматической аппаратурой. Элементарное звено такой системы схематично можно представить в следующем виде: участок канала с боковыми отводами — подпорные сооружения с регулирующей аппаратурой — межканальное пространство (почва). Для создания совершенной системы управления уровенным режимом грунтовых вод необходимо исследовать динамические (переходные) процессы, которые протекают в каждом из ее блоков (канал, сооружение, почва), с учетом гидравлической обратной связи. При этом необходимо учитывать все возмущающие воздействия, имеющие место в реальных условиях.

В настоящей работе рассматривается подход к исследованию переходных процессов в мелиоративных каналах с боковыми отводами с позиций оптимального управления. Ставится цель найти структуру оптимальных управляющих воздействий — отклонений затворов регуляторов, которые приводят к переходным процессам наилучшего качества. Критерии качества, которые положены в основу задач оптимизации, определяются из мелиоративных соображений. Строится математическая модель процесса оптимального регулирования уровней воды на участке канала, позволяющая привлечь к решению гидротехнических задач методы теории оптимального управления. Предлагаемый подход даст возможность оценить с позиций оптимального управления наилучшие расстояния между подпорными сооружениями и минимальное число сооружений в автоматизированной системе, которые способны обеспечить заданное качество регулирования.

Рассмотрим участок мелиоративного канала с боковыми отводами, ограниченный с обеих сторон подпорными сооружениями. Регулирование уровней воды в канале осуществляется

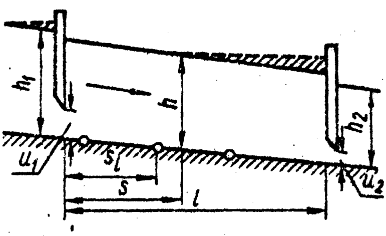

Рис. 1. Схема участка канала с боковыми отводами.

с помощью затворов подпорных сооружений.

Схема рассматриваемого объекта регулирования изображена на рис.1, где приняты следующие обозначения: s — расстояние вдоль канала от рассматриваемого створа до верхнего сооружения; l — расстояние между сооружениями; s_i — координата i-го отвода ($i = 1, \dots, n$); h — глубина потока (уровень воды в канале); u_1, u_2 — открытие затвора соответственно верхнего и нижнего сооружений; h_1 — уровень воды в верхнем бьефе верхнего сооружения; h_2 — уровень воды в нижнем бьефе нижнего сооружения.

Под действием различных возмущений на участке канала происходит процесс перехода от одного установившегося состояния к другому. В реальных условиях имеют место следующие типы возмущений, которые необходимо учитывать при составлении математической модели: 1) отклонения затворов подпорных сооружений; 2) изменение уровней воды в верхнем и нижнем бьефе соответственно верхнего и нижнего подпорных сооружений; 3) приток от грунтовых вод; 4) поверхностный сток с мелиорируемой площади.

Перечисленные типы воздействий неравнозначны по своему влиянию на переходные процессы в канале. Наиболее сильные возмущения поступают от отклонений затворов подпорных сооружений, которые являются управляющими воздействиями, т.е. могут выбираться целенаправленно. Любому допустимому выбору управляющих воздействий соответствует свой переходный процесс. Возникает задача о нахождении таких управляющих воздействий, которые порождают переходные процессы, являющиеся наилучшими в смысле заданного качества регулирования. Требования к качеству регулирования и критерии оптимизации будут определяться особенностями работы мелиоративных систем с двусторонним регулированием.

При решении большинства задач, связанных с регулированием уровней воды в канале, доминирующими являются следующие два критерия: а) поддержание максимальной точности регулирования уровней воды у отводов в течение заданного промежутка времени; б) минимизация времени переходных процессов, обеспечивающих заданную точность регулирования уровней воды у отводов.

Сформулированным критериям качества соответствуют две задачи оптимального управления переходными процессами, каждая из которых имеет свой круг мелиоративных приложений.

Построим теперь математическую модель процесса оптимального управления уровнями воды в канале, исходя из изложенных соображений.

Переходный процесс на рассматриваемом участке канала представляет собой процесс неустановившегося движения воды, при котором изменения гидравлических элементов зависят не только от расстояния s (от данного створа канала до начального сечения), но и от времени t.

Известно [1], что для случая открытых каналов без боковых отводов, в которых нет потерь по длине и путевых возмущений, неустановившееся движение воды описывается системой уравнений Сен-Венана. При исследовании реальных мелиоративных систем необходимо учитывать расходы через боковые отводы и потери на фильтрацию из канала, которые оказывают существенное влияние на переходный процесс. Эти факторы, а также путевые возмущения третьего и четвертого типа учтены в следующих уравнениях, являющихся обобщением классических уравнений Сен-Венана для случая мелиоративных каналов:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = F(t,s) - \Phi(s,\ h) - q\ (t,\ s,\ h); \qquad (1)$$

$$J - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g}\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{g}\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{Q^2}{K^2}\ . \qquad (2)$$

Здесь ω (t, s) — площадь живого сечения; Q (t, s) — расход потока; v (t, s) — средняя скорость потока; K (t, s) — модуль расхода; g — ускорение силы тяжести; J — уклон канала; F (t, s) —путевые возмущения; Φ (s,h,H,K,μ)— расход воды на фильтрацию; H — глубина грунтовых вод; k — коэффициент фильтрации грунта; μ — коэффициент водоотдачи; q (t, s_i, h) — расход воды через i -й отвод,

$$q\ (t,\ s,\ h) = 0,\ s \neq s_i,\ i=1,\ldots,\ n\ . \qquad (3)$$

При выводе уравнений (1), (2) мы использовали обычные рассуждения и предпосылки гидравлики (как и в случае классических уравнений Сен-Венана). Основное из них состоит в предположении о медленной изменяемости движения [1]. Эти допущения достаточно оправданы для мелиоративных каналов, характеризующихся геометрически правильными формами русел. При дополнительных предположениях теории волн малой амплитуды [1], которые также приемлемы для мелиоративных систем, уравнения (1), (2) можно линеаризовать. С помощью классических гидравлических преобразований [1], используя показательную зависимость для модуля расхода, приходим к системе линейных уравнений

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial h} + \frac{\partial q}{\partial h}\right) \Delta h + B\frac{\partial \Delta h}{\partial t} + VB\frac{\partial \Delta h}{\partial s} + \omega\ \frac{\partial \Delta v}{\partial s} = F\ (t,\ s) -$$

$$- \Phi\ (s,\ h^{o}) - q(t,\ s,\ h^{o}); \qquad (4)$$

$$J\left(\frac{2B}{\omega} - \frac{x}{h}\right)\Delta h + \frac{\partial \Delta h}{\partial s} + 2J\frac{\Delta v}{v} +$$

$$+ \frac{1}{g}\ \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \frac{v}{g}\ \frac{\partial \Delta v}{s} = 0, \qquad (5)$$

в которых коэффициенты и правая часть (4) вычислены при начальном равномерном режиме. Знак Δ здесь и далее обозначает абсолютное отклонение соответствующих переменных от значений при начальном режиме; h^{o} — начальное состояние уровня воды в канале; B — ширина потока поверху; x — гидравлический показатель русла [1].

С помощью математических преобразований с учетом (3) можно показать, что система дифференциальных уравнений первого порядка (4), (5) эквивалентна следующему дифференциальному уравнению второго порядка относительно Δh — основной регулируемой величины:

$$\frac{\partial^2 \Delta h}{\partial t^2} + \left(v^2 - \frac{\omega g}{B}\right)\frac{\partial^2 \Delta h}{\partial s^2} + 2v\frac{\partial^2 \Delta h}{\partial t\,\partial s} + A(t,s)\frac{\partial \Delta h}{\partial t} +$$

$$+ C(t,s)\frac{\partial \Delta h}{\partial s} + D(t,s)\,\Delta h = E(t,s), \qquad (6)$$

где

$$A = \frac{2Jg}{v} + \frac{1}{B}\frac{\partial \Phi}{\partial h} + \frac{1}{B}\frac{\partial q}{\partial h}; \qquad (7)$$

$$C = \frac{Jx\omega g}{Bh} + \frac{v}{B}\frac{\partial \Phi}{\partial h} + \frac{v}{B}\frac{\partial q}{\partial h}; \qquad (8)$$

$$D = \frac{2Jg}{Bv}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial h} + \frac{\partial q}{\partial h}\right) + \frac{v}{B}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h\,\partial s} + \frac{1}{B}\frac{\partial^2 q}{\partial h\,\partial t}; \qquad (9)$$

$$E = \frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{v}{B}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{v}{B}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{2Jg}{Bv}(F - \Phi - q). \qquad (10)$$

Таким образом, переходные процессы в канале описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа при старших (вторых) производных. Из формул (7)—(10) видно, что остальные коэффициенты уравнения (6) и свободный член зависят от параметров канала, первоначального равномерного движения, путевых возмущений и расходов на фильтрацию и через боковые отводы, вычисленных при начальном режиме. Для вычисления последних величин можно воспользоваться результатами работ [2, 3], а также экспериментальными исследованиями, проведенными на конкретных объектах.

Начальные условия для уравнения (6) записываются в виде

$$\Delta h(0, s) = 0, \quad \frac{\partial \Delta h}{\partial t}(0, s) = f(s), \quad 0 \le s \le 1, \qquad (11)$$

где $f(s)$ имеет смысл начальной скорости движения уровня воды и находится из уравнения (4) при $t = 0$. Для определения переходных процессов из уравнения (6) необходимо знать режимы работы у сооружений — граничные условия объекта регулирования, т.е. величины $\Delta h(t, 0)$ и $\Delta h(t, 1)$, $t \geq 0$.

Специфика рассматриваемых задач состоит в том, что граничные условия объекта регулирования являются переменными, они зависят от отклонений затворов подпорных сооружений. По существу мы управляем граничными условиями у сооружений для получения оптимального уровенного режима у боковых отводов.

Для каналов с трапецеидальной формой сечения зависимость между отклонениями затвора и изменением гидравлических элементов для верхнего (и аналогично для нижнего) сооружения может быть выражена в виде

$$\Delta h(t,0)=\frac{\frac{\partial Q_1}{\Delta u_1}\Delta u_1(t)-\omega\Delta v(t,0)+\frac{\partial Q_1}{\partial h_1}\Delta h_1(t)}{\frac{BQ_1}{\omega}-\frac{\partial Q_1}{\partial h}}. \tag{12}$$

Производные от расхода в формуле (12) вычисляются при начальном установившемся режиме по формулам истечения из-под щита с использованием исследований Н.Е.Жуковского [4] и графо-аналитических результатов Э.Э.Маковского [5].

Для описания математической модели процесса оптимального управления уровнями воды в канале осталось составить целевые функции, критерии оптимизации. Иначе говоря, необходимо перевести на математический язык те требования к качеству переходных процессов, которые были сформулированы выше, исходя из мелиоративных потребностей. Для задачи о поддержании максимальной точности регулирования уровней воды у отводов в течение заданного промежутка времени целевая функция (критерий качества) имеет вид

$$I_1(u_1, u_2)=\int_T^{T+\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}(h(t,s_i)-\bar{h}_i)^2\right]dt \longrightarrow \min, \tag{13}$$

где $\bar{h}_i$ — заданные уровни у отводов, $i=1,\ldots,n$; τ — период поддержания заданных уровней; T — время регулирования.

Ограничения на ресурсы управления и время регулирования можно записать следующим образом:

$$\alpha \le u_1(t) \le \beta, \ \sigma \le u_2(t) \le \delta, \ 0 \le t \le T, \quad T \le T_{max}. \qquad (14)$$

Таким образом, задача оптимального управления уровнями воды в канале по критерию (13) состоит в нахождении таких управляющих воздействий $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, которые удовлетворяют ограничениям (14) и порождают в силу (6), (11), (12) переходный процесс $h^*(t,s)$, минимизирующий (13) среди всех допустимых решений уравнения (6).

Задача оптимального быстродействия (минимизация времени переходных процессов) может быть формализована так:

$$\tilde{T}(u_1,u_2)=\min\left\{T: \int_T^{T+\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}(h(t,s_i)-\bar{h}_i)^2\right]dt \le \eta\right\}; \qquad (15)$$

$$I_2(u_1,u_2)=\tilde{T}(u_1,u_2) \longrightarrow \min, \qquad (16)$$

где η — заданная точность регулирования, которая указывает ограничения на класс допустимых траекторий уравнения (6).

Полученные математические задачи относятся к теории оптимального управления [6]. При этом динамика объекта описывается системой с распределенными параметрами, и управления входят в граничные условия. Методы теории оптимального управления, предназначенные для нахождения оптимальных управляющих воздействий, позволяют обойти ряд принципиальных трудностей, связанных с решением уравнений сен-венановского типа, которые, как известно, допускают полное исследование лишь в исключительных случаях [1, 5]. Пользуясь методом приращения функционала качества [7], можно заключить, что оптимальные управляющие воздействия в рассматриваемых нами задачах удовлетворяют аналогу принципа максимума Понтрягина [6].

Отсюда вытекает, что для каждого оптимального управления $u_j^*(t)$, $j = 1, 2$ выполняется соотношение

$$\psi_j(t)\, u_j^*(t) = \max_{u_{min} \le u \le u_{max}} \psi_j(t)u, \quad j=1,2; \ 0 \le t \le T^*, \qquad (17)$$

где u_{min}, u_{max} — ограничения на ресурсы управления; T — время оптимального регулирования; функции $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ специальным образом строятся по параметрам рассматриваемых задач.

В силу соотношения (17) можем заключить, что оптимальное управление в рассматриваемых задачах регулирования уровней воды в канале имеет релейный тип, т.е. в каждый момент времени принимает крайние значения из множества своих ресурсов. Структура оптимального управления изображена на рис. 2.

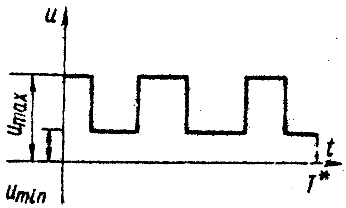

Рис. 2. Структура оптимального управления.

Полученные результаты позволяют утверждать, что автоматические регуляторы, предназначенные для оптимального управления уровенным режимом воды в канале, должны быть релейного типа.

Литература

1. Чертоусов М.Д. Гидравлика. Специальный курс.М.—Л., 1963. 2. Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалов Ф.И. Гидравлика. М., 1954. 3. Костяков А.Н. Основы мелиорации. М., 1960. 4. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. Полн. собр. соч., т. III, 1936. 5. Маковский Э.Э. Автоматизация гидротехнических сооружений в системах каскадного регулирования расходов воды. Фрунзе, 1972. 6. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969. 7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

В.А. Пенькевич, И.В. Филиппович

ВАКУУМНОСТЬ КОМБИНИРОВАННОГО ВОДОСЛИВА

Вакуумные водосливы, обладая рядом преимуществ по сравнению с безвакуумными (больший коэффициент расхода, меньшая площадь поперечного сечения и др.), имеют тот недостаток, что пазы рабочих затворов, расположенные на гребне водослива, способствуют срыву вакуума.