за-регулятора или гасителей энергии глубина в месте слияния $h_1$ получается практически одинаковой, если зафиксированы параметры в принимающем канале $\frac{Q_1}{Q}$, Fr, $\delta$. Глубина $h_1$ с достаточной точностью определяется на основании закона количества движения.


Литература

1. Милович А.Я. Теория деления и соединения потоков жидкости. М., 1947. 2. Аверьянов С.Ф. О вертикальном сопряжении осушительных каналов. — Докл. ВАСХНИЛ, 1948, вып. 2. 3. Петров Г.А. Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути. М., 1951. 4. Ибад-Заде Ю.А. Деление и соединение потоков жидкости. Баку, 1960. 5. Холодок Л.А. Расчет глубин в зоне слияния потоков при проектировании осушительных систем. — В сб.: Гидротехника, мелиорация и использование осушительных земель. Минск, 1968. 6. Дупляк В.Д., Смыслов В.В. Определение подпора в зоне слияния открытых потоков под углом $\frac{\pi}{2}$ с помощью закона количества движения. — "Гидравлика и гидротехника", 1974, вып. 19.



И.В. Минаев


## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В МЕЛИОРАЦИИ

При обработке опытных данных по впитыванию воды почвой применяется известная формула А.Н.Костякова, которая является функцией гиперболического типа. Вычисление коэффициента в числителе этой формулы и показателя степени в знаменателе обычно ведется с построением графика на логарифмической сетке. Эти коэффициенты можно, однако, вычислить по достаточно простым формулам.

Обработка опытных данных при определении коэффициентов фильтрации (например, в зависимости от температуры воды), коэффициентов водоотдачи, коэффициентов расхода при истечении через отверстия сооружений требуют длительной и кропотливой работы. Нами предлагаются формулы для вычисления коэффициентов, входящих в наиболее применимые элементарные функции, используемые в мелиорации и гидротехнике.

В учебных пособиях по вычислительной математике [1—3] можно найти пояснение к конечным разностям, которые мы будем называть симметричными, так как коэффициенты их записываются симметричным образом. В табл.1 приведены конечные разности для многочленов; для равноотстоящих значений ординат многочленов конечные разности равны нулю. Для многочлена третьей степени

$$y_3 = 0{,}2x^3 + 1{,}2x^2 + 2{,}2x + 1{,}2 \ldots \qquad (1)$$

при изменении x от 0,1 до 0,9 ординаты приведены в табл.2. Значения x называют также узлами интерполяции.

Подставим в конечную разность $\Delta^{(4)}y_{3i}$ ординаты многочлена (1) из табл.2:

$$\Delta^{(4)}y_{3i} = 1{,}4322 - 4\cdot 1{,}6896 + 6\cdot 1{,}9734 - 4\cdot 2{,}2848 + 2{,}6250 = 0.$$

Эту конечную разность можно записать и на других узлах интерполяции:

$$\Delta^{(4)}y_{3i} = y_{32} - 4y_{33} + 6y_{34} - 4y_{35} + y_{36} =$$

$$= 1{,}6896 - 4\cdot 1{,}9734 + 6\cdot 2{,}2848 - 4\cdot 2{,}6250 + 2{,}9952 = 0.$$

Таблица 1. Конечные разности для многочленов

| Многочлены | Симметричные конечные разности |
|---|---|
| 1 | 2 |
| $y_1 = a_1x + a_0$ | $\Delta^{(2)}y_{1i} = y_{11} - 2y_{12} + y_{13}$ |
| $y_2 = a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $\Delta^{(3)}y_{2i} = y_{21} - 3y_{22} + 3y_{23} - y_{24}$ |
| $y_3 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $\Delta^{(4)}y_{3i} = y_{31} - 4y_{32} + 6y_{33} - 4y_{34} + y_{35}$ |
| $y_4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $\Delta^{(5)}y_{4i} = y_{41} - 5y_{42} + 10y_{43} - 10y_{44} + 5y_{45} - y_{46}$ |
| $y_5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ | $\Delta^{(6)}y_{5i} = y_{51} - 6y_{52} + 15y_{53} - 20y_{54} + 15y_{55} - 6y_{56} + y_{57}$ |

Примечание. Индекс i – номера узлов интерполяции.

Подобный подсчет можно повторить для любых пяти равноотстоящих ординат табл. 2.

Из приведенных подсчетов следует ,что коэффициенты конечной разности не зависят от значений абсцисс, т.е. они не изменяются и остаются постоянными для группы ординат, составляющей конечную разность.

Запишем конечную разность второго порядка $\Delta^{(2)} y_{1i}$ на разных узлах интерполяции:

$$\Delta^{(2)}_{1-3} y_{1i} = y_{11} - 2y_{12} + y_{13}; \qquad \Delta^{(2)}_{2-4} y_{1i} = y_{12} - 2y_{13} + y_{14}.$$

Далее сложим эти конечные разности, но вторую возьмем со знаком „минус":

$$\Delta^{(3)}_{1-4} y_{2i} = \Delta^{(2)}_{1-3} y_{1i} + (-\Delta^{(2)}_{2-4} y_{1i}) = (y_{11} - 2y_{12} + y_{13}) + $$
$$+ (-y_{12} + 2y_{13} - y_{14}) = y_{21} - 3y_{22} + 3y_{23} - y_{24}. \qquad (2)$$

В результате получена конечная разность третьего порядка (конечная разность для многочлена второй степени).

Сложением (с обратным знаком) конечных разностей третьего порядка можно получить конечную разность четвертого порядка:

$$\Delta^{(4)}_{1-5} y_{3i} = \Delta^{(3)}_{1-4} y_{2i} + (-\Delta^{(3)}_{2-5} y_{2i}) = (y_{21} - 3y_{22} + 3y_{23} - y_{24}) + $$
$$+ (-y_{22} + 3y_{23} - 3y_{24} + y_{25}) = y_{31} - 4y_{32} + 6y_{33} - 4y_{34} + y_{35}. \qquad (3)$$

Конечные разности можно использовать для вычисления коэффициентов различных функций. Обычно для вычисления коэффициентов многочленов используют интерполяционные формулы Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Бесселя и др. [2].

Таблица 2. Ординаты многочлена (1)

| x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_{3i}$ | 1,4322 | 1,6896 | 1,9734 | 2,2848 | 2,6250 | 2,9952 | 3,3966 | 3,8304 | 4,2878 |
| Номера узлов интерполяции | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |



Однако можно применять конечные разности и для вычисления коэффициентов не только многочленов. Мы предлагаем с помощью конечных разностей вычислять коэффициенты функций гиперболического типа и дробно-рациональных. Вычисление коэффициентов многочленов рассмотрено в работах [4, 5].

Коэффициенты функции

$$y_a = \frac{a_{+1} + x}{a_{-1} - x} \qquad (4)$$

можно вычислить следующим образом. Представим формулу (4) в виде

$$y_a (a_{-1} + x) = a_{+1} + x. \qquad (5)$$

Справа в равенстве (5) — функция прямой линии: $y_1 = a_{+1} + x$. Следовательно, для нее справедлива конечная разность второго порядка:

$$\Delta^{(2)}_{1-3} y_{1i} = y_{11} - 2y_{12} + y_{13} = 0.$$

Подставим вместо $y_{1i}$ ($i = 1, 2, 3$) левую часть равенства (5):

$$y_{a1}(a_{-1} + x_1) - 2y_{a2}(a_{-1} + x_2) + y_{a3}(a_{-1} + x_3) = 0.$$

Отсюда найдем коэффициент $a_{-1}$:

$$a_{-1} = \frac{-(y_{a1}x_1 - 2y_{a2}x_2 + y_{a3}x_3)}{y_{a1} - 2y_{a2} + y_{a3}}. \qquad (6)$$

Для вычисления коэффициента $a_{+1}$ представим функцию (4) в виде

$$(a_{-1} + x) = \frac{a_{+1} + x}{y_a}. \qquad (5')$$

Левая часть этого равенства также является линейной функцией. Поэтому можно записать следующее равенство:

$$\frac{(a_{+1} + x_1)}{y_{a1}} - 2\frac{(a_{+1} + x_2)}{y_{a2}} + \frac{(a_{+1} + x_3)}{y_{a3}} = 0.$$

Отсюда найдем коэффициент $a_{+1}$:

$$a_{+1} = \frac{-\left(\frac{1}{y_{a1}} x_1 - 2\frac{1}{y_{a2}} x_2 + \frac{1}{y_{a3}} x_3\right)}{\left(\frac{1}{y_{a1}} - 2\frac{1}{y_{a2}} + \frac{1}{y_{a3}}\right)}. \qquad (7)$$

Таким же образом можно определить коэффициенты функции

$$y_b = \frac{a_{+1}}{a_{-1} + x}. \qquad (8)$$

Представим функцию (8) в виде

$$y_b (a_{-1} + x) = a_{+1}. \qquad (8')$$

В этом равенстве справа — постоянный коэффициент, который рассматриваем как частный случай уравнения прямой, параллельной оси абсцисс. Следовательно, можно использовать конечную разность первого или второго порядка:

$$y_{b1}(a_{-1}+x_1) - 2y_{b2}(a_{-1}+x_2) + y_{b3}(a_{-1}+x_3) = 0.$$

Далее находим формулу для вычисления коэффициента $a_{-1}$:

$$a_{-1} = \frac{-(y_{b1} x_1 - 2y_{b2} x_2 + y_{b3} x_3)}{(y_{b1} - 2y_{b2} + y_{b3})}. \qquad (9)$$

Коэффициент $a_{+1}$ в функции (8) можно найти, представив функцию в виде уравнения

$$y_b - \frac{a_{+1}}{a_{-1}+x} = 0.$$

Справа стоит нуль, который будем рассматривать, как уравнение оси абсцисс. Следовательно, в этом случае справедлива конечная разность первого или второго порядка, поэтому коэффициент вычисляем по формуле

$$a_{+1} = \frac{y_{b1} - 2y_{b2} + y_{b3}}{\frac{1}{a_{-1}+x_1} - 2\frac{1}{a_{-1}+x_2} + \frac{1}{a_{-1}+x_3}}. \qquad (10)$$

Конечная разность первого порядка записывается в виде

$$(y_{02} - y_{01}) + (y_{03} - y_{02}) + \ldots + (y_{0n} - y_{0n-1}) = 0.$$

Для коэффициента $a_{+1}$ в выражении (8) конечная разность первого порядка запишется (на трех ординатах):

$$(y_{02} - y_{01}) + (y_{03} - y_{02}) = 0,$$

а значение коэффициента $a_{-1}$ будет определяться по формуле:

$$a_{-1} = \frac{(y_{b2}\,x_2 - y_{b1}\,x_1) + (y_{b3}\,x_3 - y_{b2}\,x_2)}{(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2)}.$$

Для действительного числа (в том числе и нуля) справедливы конечные разности первого, второго и всех более высоких порядков. Однако в расчетах следует принимать наиболее низкий порядок конечной разности, справедливый для данной функции или числа, так как точность расчетов уменьшается при необоснованном завышении порядка конечной разности.

Другой коэффициент функции (8) можно вычислить также по формуле

$$a_{+1} = \frac{(y_{b2} - y_{b1}) + (y_{b3} - y_{b2})}{\left(\frac{1}{a_{-1}+x_2} - \frac{1}{a_{-1}+x_1}\right) + \left(\frac{1}{a_{-1}+x_3} - \frac{1}{a_{-1}+x_2}\right)}.$$

В работе [6] дается пример вычисления коэффициентов функции (8) путем введения новых переменных. Покажем, что формулы (9) и (10) позволяют вычислить коэффициенты функции непосредственной подстановкой ординат, приведенных в табл. 3.

В табл. 3 дана произвольная нумерация равноотстоящих узлов интерполяции, которые используются для вычисления коэффициентов функции (8):

$$a_1 = \frac{-(0{,}667 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}5 + 0{,}286 \cdot 2{,}5)}{(0{,}667 - 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}286)} = \frac{0{,}1515}{0{,}1530} \approx 1,$$

$$a_{+1} = \frac{0{,}667 + 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}286}{\frac{1}{1+0{,}5} - 2\,\frac{1}{1+1{,}5} + \frac{1}{1+1{,}5}} = \frac{1{,}3530}{1{,}3523} \approx 1.$$

Таблица 3. Результаты измерений аргумента [6]

| x | 0 | 0,2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 0,833 | 0,667 | 0,540 | 0,400 | 0,333 | 0,286 | 0,250 | 0,222 | 0,200 | 0,182 | 0,167 |
| Номера узлов интерполяции | | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |

Вычисления произведены на узлах интерполяции [1, 2, 3]; те же результаты можно получить, используя другие узлы интерполяции. Следовательно, для данных, приведенных в табл. 3, справедлива функция

$$y = \frac{1}{1 + x}\,. \tag{11}$$

Из приведенного примера следует, однако, что симметричные конечные разности не позволяют использовать одновременно все данные или всю информацию табл. 3. Полученные нами несимметричные конечные разности дают возможность более полно применять исходную информацию.

Конечные разности для многочленов можно находить с помощью специального определителя — результанта [5]. При этом в отличие от классического способа получения конечных разностей (вычитанием предыдущих ординат из последующих на равноотстоящих узлах интерполяции), с помощью которого определяют только симметричные конечные разности, метод использования результанта позволяет получать несимметричные конечные разности. Эти разности мы также называем нулевыми комбинациями ординат (НКО). Несимметричные конечные разности могут содержать любое количество ординат и поэтому дают возможность более полно использовать исходную информацию результатов измерений.



Покажем один искусственный прием получения НКО для любой степени многочлена.

Непосредственным раскрытием результанта для линейной функции на равноотстоящих узлах интерполяции определены конечные разности второго порядка

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 - 2y_2 + y_3 = 0,\\
&2y_1 - y_2 - 4y_3 + 3y_4 = 0,\\
&3y_1 - y_2 - y_3 - 7y_4 + 6y_5 = 0,\\
&4y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - 11y_5 + 10y_6 = 0,\\
&5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - 16y_6 + 15y_7 = 0,\\
&6y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - 22y_7 + 21y_8 = 0,\\
&7y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - 29y_8 + 28y_9 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Как в симметричной, так и в несимметричной конечной разности алгебраическая сумма коэффициентов равна нулю.

С помощью результанта получена несимметричная конечная разность для многочлена второй степени:

$$2y_1 - y_2 - 9y_3 + 13y_4 - 5y_5 = 0. \tag{13}$$

Как уже говорилось, сумма (с обратным знаком) конечных разностей второго порядка позволяет получить конечную разность третьего порядка ( $\Delta^{(3)}_{1-4}\, y_{2i} = \Delta^{(2)}_{1-3}\, y_{1i} + (-\Delta^{(2)}_{2-4} \times y_{1i}$ ). Этот прием можно использовать и для определения несимметричных конечных разностей. Действительно, НКО (13) можно найти из НКО второго порядка на четырех ординатах с суммой симметричной конечной разности на трех ординатах, сдвинутой при сложении на два порядка вправо:

$$
\begin{array}{l}
\Delta^{(2)}_{1-4}\, y_i = 2y_1 - y_2 - 4y_3 + 3y_4 \\
+ \\
\underline{\Delta^{(2)}_{3-5}\, y_i = \qquad\qquad -5y_3 + 10y_4 - 5y_5} \\
\Delta^{(3)}_{1-5}\, y_i = 2y_1 - y_2 - 9y_3 + 13y_4 - 5y_5
\end{array}
$$

Второе слагаемое $5(-y_3 + 2y_4 - y_5)$ известно потому, что заранее мы знаем НКО для квадратного многочлена –(13). Поскольку на шести ординатах коэффициент второго слагаемого неизвестен, то берем несимметричную конечную разность на пяти ординатах и складываем ее с симметричной конечной разгостью на трех ординатах, но сдвинутых на три порядка:

$$
\Delta^{(2)}_{4-6}\, y_i = N(-y_4 + 2y_5 - y_6).
$$

Коэффициент $N$ можно найти, вычислив ординаты любого многочлена второй степени, так как несимметричная конечная разность ординат также равна нулю:

$$
\begin{array}{l}
\Delta^{(2)}_{1-5}\, y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 7y_4 + 6y_5 \\
+ \\
\underline{\Delta^{(2)}_{4-6}\, y_i = \qquad\qquad N(-y_4 + 2y_5 - y_6)} \\
\Delta^{(3)}_{1-6}\, y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 7y_4 + 6y_5 + N(-y_4+2y_5-y_6)=0
\end{array}
\tag{14}
$$

Подставив ординаты многочлена второй степени в (14), можно вычислить коэффициент $N = 14$ и получить НКО на шести узлах интерполяции для многочлена 2-ой степени:

$$\overset{(3)}{\Delta}_{1-6} y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 21y_4 + 34y_5 - 14y_6 = 0. \qquad (15)$$

Несимметричные конечные разности для кубического многочлена можно получить сложением несимметричных и симметричной конечных разностей третьего порядка, а коэффициент $N$ вычислить, подсчитав ординаты любого кубического многочлена.

Найдем несимметричную конечную разность для кубического многочлена на семи ординатах:

$$\overset{(3)}{\Delta}_{1-6} y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 21y_4 + 34y_5 - 14y_6$$

$$+ \quad \overset{(3)}{\Delta}_{4-7} y_i = \qquad N\,(-y_4+3y_5-3y_6+y_7)$$

$$\overset{(4)}{\Delta}_{1-7} y_i = 3y_1-y_2-y_3-21y_4+34y_5-14y_6+ N\,(-y_4+3y_5-3y_6+y_7)=0$$

Для вычисления коэффициента $N$ воспользуемся данными табл. 2 для кубического многочлена (1):

$$N = \frac{3y_1 - y_2 - y_3 - 21y_4 + 34y_5 - 14y_6}{y_4 - 3y_5 + 3y_6 - y_7} =$$

$$= \frac{3,1,4322 - 1,6896 - 1,9734 - 21\cdot 2,2848 + 34\cdot 2,6250 - 14\cdot 2,9952}{2,2848 - 3\cdot 2,6250 + 3\cdot 2,9952 - 3,3966} =$$

$$= \frac{93,5466 - 93,5766}{11,2704 - 11,2716} = 25.$$

Подставив полученное значение $N=25$ в $\overset{(4)}{\Delta}_{1-7} y_i$, получим следующее НКО для кубического многочлена на семи ординатах:

$$3y_1 - y_2 - y_3 - 46y_4 + 109y_5 - 89y_6 + 25y_7 = 0. \qquad (16)$$

Приведем сводку несимметричных конечных разностей для многочленов до пятой степени включительно и для количества ординат, не превосходящих девяти.

Конечные разности тертьего порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^{(3)}_{1-4} y_i = y_1 - 3y_2 + 3y_3 - y_4 = 0,\\
&\Delta^{(3)}_{1-5} y_i = 2y_1 - y_2 - 9y_3 + 13y_4 - 15y_5 = 0,\\
&\Delta^{(3)}_{1-6} y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 21y_4 + 34y_5 - 14y_6 = 0,\\
&\Delta^{(3)}_{1-7} y_i = 4y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - 41y_5 + 70y_6 - 30y_7 = 0,\\
&\Delta^{(3)}_{1-8} y_i = 5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - 71y_6 + 125y_7 - 55y_8 = 0,\\
&\Delta^{(3)}_{1-9} y_i = 6y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - 113y_7 + 203y_8 - 91y_9 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Конечные разности четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^{(4)}_{1-5} y_i = y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = 0,\\
&\Delta^{(4)}_{1-6} y_i = 2y_1 - y_2 - 16y_3 + 34y_4 - 26y_5 + 7y_6 = 0,\\
&\Delta^{(4)}_{1-7} y_i = 3y_1 - y_2 - y_3 - 46y_4 + 109y_5 - 89y_6 + 25y_7 = 0,\\
&\Delta^{(4)}_{1-8} y_i = 4y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - 106y_5 + 265y_6 - 225y_7 + 65y_8 = 0,\\
&\Delta^{(4)}_{1-9} y_i = 5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - 211y_6 + 545y_7 - 475y_8 + 140y_9 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Конечные разности пятого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^{(5)}_{1-6} y_i = y_1 - 5y_2 + 10y_3 - 10y_4 + 5y_5 - y_6 = 0,\\
&\Delta^{(5)}_{1-7} y_i = 2y_1 - y_2 - 25y_3 + 70y_4 - 80y_5 + 45y_6 - 9y_7 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^{(5)}_{1-8}\,y_i = 3y_1-y_2-y_3-85y_4+265y_5-323y_6+181y_7-39y_8 = 0,\\&\Delta^{(5)}_{1-9}\,y_i = 4y_1-y_2-y_3-y_4-225y_5+741y_6-939y_7+541y_8-119y_9=0\end{aligned}\right\}(19)$$

Конечные разности шестого порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^{(6)}_{1-7}\,y_i = y_1-6y_2+15y_3-20y_4+15y_5-6y_6+y_7 = 0,\\&\Delta^{(6)}_{1-8}\,y_i = 2y_1-y_2-36y_3+125y_4-190y_5+153y_6-64y_7+11y_8=0,\\&\Delta^{(6)}_{1-9}\,y_i = 3y_1-y_2-y_3-141y_4+545y_5-883y_6+741y_7-319y_8+56y_9=0\end{aligned}\right\}(20)$$

Как видно из равенств (17), (18), (19) и (20) на первом месте в списках стоят симметричные конечные разности; они являются минимальными, т.е. содержащими минимальное количество ординат для образования конечной разности. Получены и общие выражения для НКО различных порядков и произвольного количества ординат, но они здесь не приводятся.

Несимметричные конечные разности можно использовать для вычисления коэффициентов различных функций, как показано для симметричных конечных разностей (формулы (6), (7), (9), (10) ). При вычислении коэффициентов функций необходимо брать ординаты (на отрезках их графиков), монотонно возрастающие или монотонно убывающие.

В табл.4 приведены формулы для вычисления коэффициентов некоторых часто применяемых для аппроксимации функций. В развернутой записи формул применены симметричные (минимальные) конечные разности, в краткой записи показано, что может быть использована любая НКО, в том числе и первого порядка, например для функций 5, 6, 7 из табл. 4 можно применить НКО первого порядка.

В тех случаях, когда имеется разброс точек и их значительно больше, чем необходимое количество ординат в конечной разности, можно прибегать к искусственным приемам. Один из таких приемов рассматривается на примере. В табл.5 приведены данные измерений, к которым необходимо подобрать эмпирическую формулу. Данные табл.5 нанесены на координатную сетку (рис.1).

Таблица 4. Значения коэффициентов функций

| № п/п | Функция | Формулы для вычисления коэффициентов функций | Ограничения | Краткая запись формул |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $y = \frac{a_{+1}}{x}$ | $a_{+1} = \frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)}{(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})+(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2})}$. | $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 9, \ldots$ | $a_{+1} = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(y_i - y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i-1}})}$. |
| 2 | $y = \frac{a_{+1}}{x^t}$ | $t = \frac{(\lg y_2 - \lg y_1)+(\lg y_3 - \lg y_2)}{(\lg x_2 - \lg x_1)+(\lg x_3 - \lg x_2)}$. $a_{+1} = \frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)}{(x_2^t - x_1^t)+(x_3^t - x_2^t)}$, | $x_i \neq 0$, $t$ – десятичная дробь, $i = 1, 2, \ldots, 9, \ldots$ | $t = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(\lg y_i - \lg y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(\lg x_i - \lg x_{i-1})}$. $a_{+1} = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(y_i - y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(\frac{1}{x_i^t}-\frac{1}{x_{i-1}^t})}$. |
| 3 | $y = \frac{a_{+1}}{x^n} + a_0$ | $a_{+1} = \frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)}{(\frac{1}{x_2^n}-\frac{1}{x_1^n})+(\frac{1}{x_2^n}-\frac{1}{x_1^n})}$; $a_0 = \frac{(y_2 x_2^n - y_1 x_1^n)+(y_3 x_3^n - y_2 x_2^n)}{(x_2^n - x_1^n)+(x_3^n - x_2^n)}$. | $x_i \neq 0$; $n \geq 2$; $n$ – целое число; $i = 1, 2, 3, \ldots, 9, \ldots$ | $a_{+1} = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(y_i - y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(\frac{1}{x_i^n}-\frac{1}{x_{i-1}^n})}$; $a_0 = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(y_i x_i^n - y_{i-1} x_{i-1}^n)}{\Delta^{(1)}_{1-9}(x_i^n - x_{i-1}^n)}$. |
| 4 | $y = a_{+1} x^t$ | $t = \frac{(\lg y_2 - \lg y_1)+(\lg y_3 - \lg y_2)}{(\lg x_2 - \lg x_1)+(\lg x_3 - \lg x_2)}$; $a_{+1} = \frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)}{(x_2^t - x_1^t)+(x_3^t - x_2^t)}$. | $x_i > 0$, $t$ – десятичная дробь; $i = 1, 2, \ldots, 9, \ldots$ | $t = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(\lg y_i - \lg y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(\lg x_i - \lg x_{i-1})}$; $a_{+1} = \frac{\Delta^{(1)}_{1-9}(y_i - y_{i-1})}{\Delta^{(1)}_{1-9}(x_i^t - x_{i-1}^t)}$. |

Продолжение табл. 4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | $y = \frac{a_{+1}}{(a_{-1} \pm x)^n}$ | $a_{-1} = \frac{\mp(\sqrt[n]{y_1 x_1} - 2\sqrt[n]{y_2 x_2} + \sqrt[n]{y_3 x_3})}{\sqrt[n]{y_1} - 2\sqrt[n]{y_2} + \sqrt[n]{y_3}}$<br>$a_{+1} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\frac{1}{(a_{-1} \pm x_1)^n} - 2\frac{1}{(a_{-1} \pm x_2)^n} + \frac{1}{(a_{-1} \pm x_3)^n}}$, | $n$ – целое число;<br>1) при $(+x_i)$<br>$a_{-1} \geqslant 0$,<br>$x_i > 0$,<br>2) при $(-x_i)$<br>$a_{-1} > x_i$,<br>$i = 1, 2, 3, \ldots 9, \ldots$ | $a_{-1} = \frac{\mp(\Delta^{(2)}_{1-9}(\sqrt[n]{y_i x_i}))}{\Delta^{(2)}_{1-9}(\sqrt[n]{y_i})}$<br>$a_{+1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-9} y_i}{\Delta^{(2)}_{1-9} \frac{1}{(a_{-1} \pm x_i)^n}}$ |
| 6 | $y = \frac{a_{+1}}{a_{-1} \pm x^n}$ | $a_{-1} = \frac{\mp(y_1 x_1^n - 2y_2 x_2^n + y_3 x_3^n)}{y_1 - 2y_2 + y_3}$,<br>$a_{+1} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\frac{1}{a_{-1} \pm x_1^n} - 2\frac{1}{a_{-1} \pm x_2} + \frac{1}{a_{-1} \pm x_3}}$ | 1) при $(+x)$<br>$a_{-1} \geqslant 0$,<br>$x_i > 0$,<br>$n$ – целые числа,<br>2) при $(-x)$<br>$a_{-1} > x_i$ | $a_{-1} = \frac{\mp(\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i x_i^n))}{\Delta^{(2)}_{1-9} y_i}$<br>$a_{+1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-9} y_i}{\Delta^{(2)}_{1-9}\left(\frac{1}{{a_{-1} \pm x_i}^{n}}\right)}$ |
| 7 | $y = \frac{a_{+1}}{a_{-1} \pm x} + a_o$ | $a_{-1} = \frac{\mp(y_1 x_1 - 2y_2 x_2 + y_3 x_3)}{(y_1 - 2y_2 + y_3)}$,<br>$a_{+1} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\frac{1}{a_{-1} \pm x_1} - 2\frac{1}{a_{-1} \pm x_2} + \frac{1}{a_{-1} \pm x_3}}$,<br>$a_o = \frac{(-a_{+1})\left(\frac{1}{y_1} - 2\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right)}{a_{-1}\left(\frac{1}{y_1} - 2\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right) \pm \left(\frac{1}{y_1} x_1 - 2\frac{1}{y_2} x_2 + \frac{1}{y_3} x_3\right)}$ | 1) при $(+x)$<br>$a_{-1} \geqslant 0$,<br>$x_i > 0$,<br>2) при $(-x)$<br>$a_{-1} > x_i$ | $a_{-1} = \frac{\mp(\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i x_i))}{\Delta^{(2)}_{1-9} y_i}$,<br>$a_{+1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-9} y_i}{\Delta^{(2)}_{1-9}\left(\frac{1}{a_{-1} \pm x_i}\right)}$,<br>$a_o = \frac{(-a_{+1})(\Delta^{(2)}_{1-9} \frac{1}{y_i})}{a_{-1}(\Delta^{(2)}_{1-9} \frac{1}{y_i}) \pm \Delta^{(2)}_{1-9}(\frac{1}{y_i} x_i)}$ |

Продолжение табл.4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | $y = \frac{a_{+1} \pm x}{a_{-1} + x}$ | $a_{-1} = \frac{-(y_1x_1 - 2y_2x_2 + y_3x_3)}{(y_1 - 2y_2 + y_3)}$, <br> $a_{+1} = \frac{\mp(\frac{1}{y_1}x_1 - 2\frac{1}{y_2}x_2 + \frac{1}{y_3}x_3)}{(\frac{1}{y_1} - 2\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3})}$ | 1) при (+ x) <br> $a_{+1} \geq 0$, <br> $a_{-1} \geq 0$, <br> 2) при (– x) <br> $a_{+1} > x_i$, <br> $a_{-1} \geq 0$ | $a_{-1} = \frac{-(\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i\ x_i))}{\Delta^{(2)}_{1-9}\ y_i}$, <br> $a_{+1} = \frac{\mp(\Delta^{(2)}_{1-9}(\frac{1}{y_i}\ x_i))}{\Delta^{(2)}_{1-9}\ \frac{1}{y_i}}$ |
| 9 | $y = \frac{a_{+1} + x}{a_{-1} - x}$ | $a_{-1} = \frac{y_1x_1 - 2y_2x_2 + y_3x_3}{y_1 - 2y_2 + y_3}$, <br> $a_{+1} = \frac{-(\frac{1}{y_1}x_1 - 2\frac{1}{y_2}x_2 + \frac{1}{y_3}x_3)}{(\frac{1}{y_1} - 2\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3})}$ | $a_{+1} \geq 0$, <br> $a_{-1} > x_i$, <br> $a_{-1} > 0$ | $a_{-1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i\ x_i)}{\Delta^{(2)}_{1-9}\ y_i}$, <br> $a_{+1} = \frac{-(\Delta^{(2)}_{1-9}(\frac{1}{y_1}\ x_i))}{\Delta^{(2)}_{1-9}\ \frac{1}{y_i}}$ |
| 10 | $y = \frac{x(a_{+1}+x)}{(a_{-1} - x)}$ | $a_{-1} = \frac{y_1x_1 - 3y_2x_2 + 3y_3x_3 - y_4x_4}{y_1 - 3y_2 + 3y_3 - y_4}$, <br> $a_{+1} = \frac{-(\frac{1}{y_1}x_1^2 - 2\frac{1}{y_2}x_2^2 + \frac{1}{y_3}x_3^2)}{(\frac{1}{y_1}x_1 - 2\frac{1}{y_2}x_2 + \frac{1}{y_3}x_3)}$ | $a_{+1} \geq 0$, <br> $a_{-1} > x_i$, <br> $a_{-1} > 0$ | $a_{-1} = \frac{\Delta^{(3)}_{1-9}(y_i\ x_i)}{\Delta^{(3)}_{1-9}\ y_i}$, <br> $a_{+1} = \frac{-(\Delta^{(2)}_{1-9}(\frac{1}{y_1}x_i^2))}{\Delta^{(2)}_{1-9}(\frac{1}{y_i}x_i)}$ |
| 11 | $y = \frac{(a_{+1} - x)}{x(a_{-1}+x)}$ | $a_{-1} = \frac{-(y_1x_1^2 - 2y_2x_2^2 + y_3x_3^2)}{y_1x_1 - 2y_2x_2 + y_3x_3}$, <br> $a_{+1} = \frac{(\frac{1}{y_1}x_1 - 3\frac{1}{y_2}x_2 + 3\frac{1}{y_3}x - \frac{1}{y_4}x_4)}{(\frac{1}{y_1} - 3\frac{1}{y_2} + 3\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_4})}$ | $a_{+1} > x_i$ <br> $a_{+1} > 0$, <br> $a_{-1} > 0$ | $a_{-1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i\ x_i^2)}{\Delta^{(2)}_{1-9}(y_i\ x_i)}$, <br> $a_{+1} = \frac{\Delta^{(3)}_{1-9}(\frac{1}{y_i}x_i)}{\Delta^{(3)}_{1-9}\ \frac{1}{y_i}}$ |

Примечание. Обозначение $\Delta^{(2)}_{1-9}\ y_i$ означает конечную разность второго порядка на любом количестве (до девяти) ординат по равенствам (12); $\Delta^{(3)}_{1-9}\ y_i$ – то же, третьего порядка; ${}^{(1)}_{1-9}y_i$ – то же, первого порядка; обозначение $(y_i\ x_i)$ означает конечную разность, составленную из произведений y и x.

Таблица 5. Данные эксперимента, разбитые на группы

| $x$ | 0,1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,05 | 0,06 | 0,075 | 0,085 | 0,11 | 0,115 | 0,12 | 0,13 |
| $y$ | 26,50 | 25,61 | 22,00 | 24,03 | 20,10 | 17,61 | 18,01 | 16,00 |

| $x$ | 0,2 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,14 | 0,15 | 0,160 | 0,180 | 0,185 | 0,215 | 0,225 | 0,24 |
| $y$ | 16,00 | 14,00 | 15,63 | 14,21 | 16,62 | 14,06 | 13,43 | 12,04 |

| $x$ | 0,3 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,265 | 0,265 | 0,275 | 0,300 | 0,305 | 0,325 | 0,335 | 0,345 |
| $y$ | 13,46 | 11,69 | 13,01 | 10,45 | 12,62 | 11,84 | 10,08 | 9,23 |

| $x$ | 0,4 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,36 | 0,37 | 0,40 | 0,40 | 0,42 | 0,425 | 0,445 | 0,445 |
| $y$ | 11,01 | 9,40 | 11,09 | 8,64 | 10,03 | 9,02 | 8,29 | 9,67 |

| $x$ | 0,5 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,46 | 0,495 | 0,55 | 0,525 | 0,535 | 0,54 |
| $y$ | 8,21 | 7,63 | 9,01 | 9,43 | 8,28 | 8,81 |

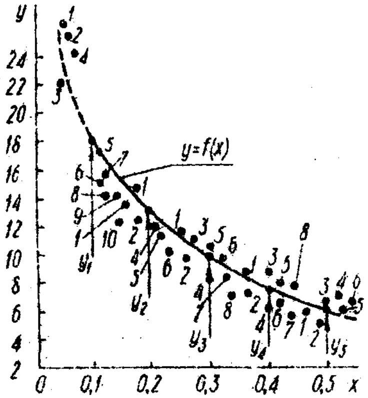


Рис. 1. График эмпирической формулы, аппроксимирующей данные эксперимента.

Идея использования аппроксимирующих формул табл.4 состоит в том, что все точки измерения разделяются на несколько групп, в нашем случае пять; для каждой группы методом наименьших квадратов находится уравнение прямой. Каждая прямая имеет в качестве средней абсциссы равноотстоящие узлы интерполяции 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. По уравнению прямой находят значение ее средней ординаты для соответствующего узла интерполяции. Затем, используя эти ординаты, вычисляют коэффициенты аппроксимирующей функции.



Методом наименьших квадратов получены следующие линейные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 32{,}89 - 124{,}89x; & 0{,}06 \le x \le 0{,}15, \\ y_2 &= 22{,}40 - 40{,}14x; & 0{,}15 \le x \le 0{,}25, \\ y_3 &= 16{,}20 - 15{,}50x; & 0{,}25 \le x \le 0{,}35, \\ y_4 &= 18{,}76 - 22{,}21x; & 0{,}35 \le x \le 0{,}45, \\ y_5 &= 2{,}87 + 11{,}0x; & 0{,}45 \le x \le 0{,}55. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

По уравнениям отрезков прямых (21) находятся ординаты середин этих отрезков; результаты вычислений представлены в табл. 6.

Таблица 6. Значения ординат по формулам (2) и (23)

| $x$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ по (21) | 20,41 | 14,37 | 11,55 | 9,88 | 8,37 |
| $y_i$ по (23) | 20,65 | 15,05 | 11,85 | 9,79 | 8,34 |

В качестве аппроксимирующей принята функция

$$y = \frac{a_{+1}}{a_{-1} + x} + a_0. \quad (22)$$

По формулам табл. 4 вычисляем коэффициенты в функции (22):

$$a_{-1} = \frac{-(\Delta^{(2)}_{1-5}(y_i\, x_i)}{\Delta^{(2)}_{1-5}\; y_i} = \frac{-(3y_1x_1-y_2x_2-y_3x_3-7y_4x_4+6y_5x_5)}{(3y_1-y_2-y_3-7y_4+6y_5)} =$$

$= 0{,}164$,

$$a_{+1} = \frac{\Delta^{(2)}_{1-5}\; y_i}{\Delta^{(2)}_{1-5}\left(\frac{1}{a_{-1}+x_i}\right)} = \frac{3y_1-y_2-y_3-7y_4+}{3\frac{1}{a_{-1}+x_1}-\frac{1}{a_{-1}+x_2}-\frac{1}{a_{-1}+x_3}-}\times$$

$$\times\frac{+\;6y_5}{-7\frac{1}{a_{-1}+x_4}+6\frac{1}{a_{-1}+x_5}} = 5{,}4;$$

$$a_0 = \frac{(-a_{+1})\left(\Delta^{(2)}_{1-5}\frac{1}{y_i}\right)}{a_{-1}\left(\Delta^{(2)}_{1-5}\frac{1}{y_i}\right)+\left(\Delta^{(2)}_{1-5}\frac{1}{y_i}x_i\right))} =$$

$$= \frac{(-a_{+1})(3\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}-}{a_{-1}(3\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}-7\frac{1}{y_4}+6\frac{1}{y_5})+(3\frac{1}{y_1}x_1-\frac{1}{y_2}x_2-}\times$$

$$\times\frac{-7\frac{1}{y_4}+6\frac{1}{y_5})}{\frac{1}{y_3}x_3-7\frac{1}{y_4}x_4+6\frac{1}{y_5}x_5)} = 0{,}2.$$

Таким образом, аппроксимирующей будет функция (22) с числовыми коэффициентами

$$y = \frac{5{,}4}{0{,}164+x} + 0{,}2\,. \tag{23}$$

В табл.6 (последняя строка) приведены ординаты, вычисленные по формуле (23). Корреляционное отношение между ординатами табл.6 составляет 0,93, т.е. представляет высокую степень корреляции. Идея изложенного приема состоит в том, чтобы найти приближенные центры тяжести некоторого количества точек, и для ординат этих центров тяжести подобрать аппроксимирующую функцию. Однако мы не утверждаем, что такой прием применим в любых случаях разброса точек по отношению к осредняющей их кривой; очевидно, успех будет зависеть также и от количества точек на каждом участке. Количество таких точек на участке должно быть репрезентативным в смысле выяснения общей тенденции изменения двух величин.

Изложенный способ вычисления коэффициентов функций весьма прост для реализации на автоматических клавишных машинах и ЭЦВМ (при массовых вычислениях).

Другое применение формул возможно для аппроксимации сложных кривых, имеющих максимумы и минимумы. Для сложных кривых мы предлагаем метод рассечения плоскости между кривой и осью абсцисс более простыми кривыми, ординаты которых в сумме дают ординаты сложной кривой (или метод разложения сложных функций на простые). Приведем пример, демонстрирующий реализацию этого способа.

Задана функция ( $f_1$ (x) ), своими ординатами на отрезке $[0{,}1;\ 0{,}9]$ с шагом 0,1 (табл.7). Плоскость между кривой и осью абсцисс рассекается кривой $f_2$ (x) с произвольными

Таблица 7. Аппроксимация функции

| x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ (x) | 11,45 | 5,78 | 4,06 | 3,76 | 3,98 | 4,85 | 6,73 |
| $f_2(x) = \frac{x(1,7+x)}{1-x}$ | 0,20 | 0,475 | 0,857 | 1,40 | 2,20 | 3,450 | 5,60 |
| $f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$ | 11,25 | 5,305 | 3,203 | 2,36 | 1,78 | 1,40 | 1,13 |
| $f_3(x) = \frac{3,7-x}{x(3,1+x)}$ | 11,25 | 5,303 | 3,204 | 2,36 | 1,777 | 1,40 | 1,128 |

коэффициентами (рис.2). Далее находится разность ординат $[f_1(x)-f_2(x)] = f_3(x)$, а затем подбирается аппроксимирующая функция для ее ординат. Отсюда ясно, что чем удачнее будет взята функция $f_2(x_3)$ и ее коэффициенты, тем проще характер аппроксимируемой кривой $f_3(x)$.

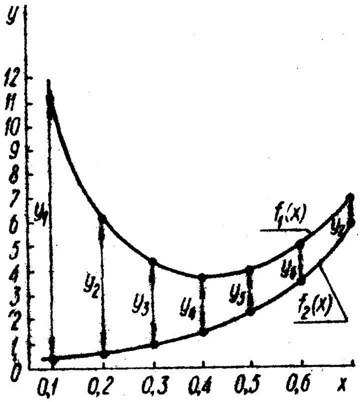


Рис. 2. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

В табл.7 приведены вычисленные ординаты для произвольной функции $f_2(x)$ и разности ординат между двумя функциями, а также ординаты, вычисленные по аппроксимирующей функции $f_3(x)$. Коэффициенты в функции $f_2(x)$ взяты произвольно, но с таким расчетом, чтобы разности ординат $[f_1(x_i)-f_2(x_i)]$ не имели отрицательных значений.

Для аппроксимации функции $f_3(x)$ взята функция

$$f_3(x) = \frac{\bar{a}_{+3} - x}{x(\bar{a}_{-1}+x)}. \qquad (24)$$

Коэффициенты в функции (24) вычислены с использованием конечных разностей (табл.4) первого и второго порядка на семи ординатах. В результате получено: $\bar{a}_{+1} = 3{,}7$; $\bar{a}_{-1} = 3{,}1$.

Значения ординат, вычисленные по (24), приведены в последней строке табл.7.

Таким образом, функция $f_1(x)$ аппроксимируется суммой функций:

$$f_1(x) = \frac{x\,(1{,}7 + x)}{(1 - x)} + \frac{3{,}7 - x}{X\,(3{,}1 + x)}, \qquad (25)$$

где $0{,}9 \geq x \geq 0{,}1$.

Разложение функций на более простые (две, три и более) позволяет получать эмпирические зависимости для очень сложных функций.

## Литература

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М., 1967. 2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., 1963. 3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Минск, 1972. 4. Минаев И.В. Один способ подбора эмпирических формул к данным эксперимента. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып.3. Минск, 1973. 5. Минаев И.В. Использование несимметричных конечных разностей для расчета оптимальных параметров дренажа. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып.5. Минск, 1975. 6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М., 1962.

В.П. Сельченок, Б.Ш. Мордухович

# К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕГУЛИРОВАНИИ УРОВНЕЙ ВОДЫ В МЕЛИОРАТИВНЫХ КАНАЛАХ

Одна из важнейших гидротехнических задач, которая возникает при решении мелиоративных вопросов в зоне избыточного увлажнения, состоит в создании системы автоматического регулирования уровней грунтовых вод с помощью взаимосвязанной сети открытых каналов и подпорных сооружений с автоматической аппаратурой. Элементарное звено такой системы схематично можно представить в следующем виде: участок канала с боковыми отводами — подпорные сооружения с регулирующей аппаратурой — межканальное пространство (почва). Для создания совершенной системы управления уровенным режимом грунтовых вод необходимо исследовать динамические (переходные) процессы, которые протекают в каждом из ее блоков (канал, сооружение, почва), с учетом гидравлической