

Л и т е р а т у р а

1. Бочеввер Ф.М. и др. Основы гидрогеологических расчетов. М., 1969.
2. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М., 1973.
3. Жернов И.Е., Шестаков В.М. Моделирование фильтрации подземных вод. М., 1971.
4. Шаманский В.Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. Киев, 1969.
5. Абуталиев Ф.Б. и др. Методы математического моделирования гидрогеологических процессов. М., 1972.
6. Бочеввер Ф.М. и др. Рекомендации по применению ЭВМ для фильтрационных расчетов. М., 1971.
7. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.
9. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. - В сб.: Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М., 1956.
10. Тихонов А.А., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.
11. Злотник В.А., Мурашко М.Г., Усенко В.С. К описанию фильтрации вблизи берегового водозабора, состоящего из произвольно-го числа скважин и бассейнов. - В сб.: Гидромеханика. Вып. 33. Киев, 1976.
12. Злотник В.А., Мурашко М.Г., Усенко В.С. О применении разностной схемы к описанию фильтрации при наличии сосредоточенных и распределенных источников. - В сб.: Комплексное использование водных ресурсов. Вып. 3. М., 1975.
13. Neuman Sh., Witherspoon P. Variational principles for confined and unconfined flow of ground water. - "Water Resour. Res.", 1970, v. 6, N 5.
14. Remson J., Hornberger G., Molz F. Numerical methods in subsurface hydrology with an introduction to the finite element method. N.-Y., 1971.
15. Verruijt A. Theory of ground water flow. N.-Y., 1970.

УДК 551.49:631.62:628:113

В. С. Усенко (докт. техн. наук)

К РАСЧЕТУ ВЕРТИКАЛЬНОГО СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ДРЕНАЖА И ПРОГНОЗНЫХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАПАСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ ИНФИЛЬТРАЦИОННОГО ПИТАНИЯ

При расчете вертикального систематического дренажа и прогнозной оценке эксплуатационных запасов подземных вод обычно рассматривают действие одиночной скважины в изолиро-

ванном пласте, имеющем в плане форму прямоугольника, который приводится к равновеликому по площади кругу. Большинство расчетных схем, используемых в практических расчетах, не учитывают действие инфильтрационного питания с поверхности земли или притока из ниже расположенных пластов. Здесь предлагаются зависимости, учитывающие такое питание.

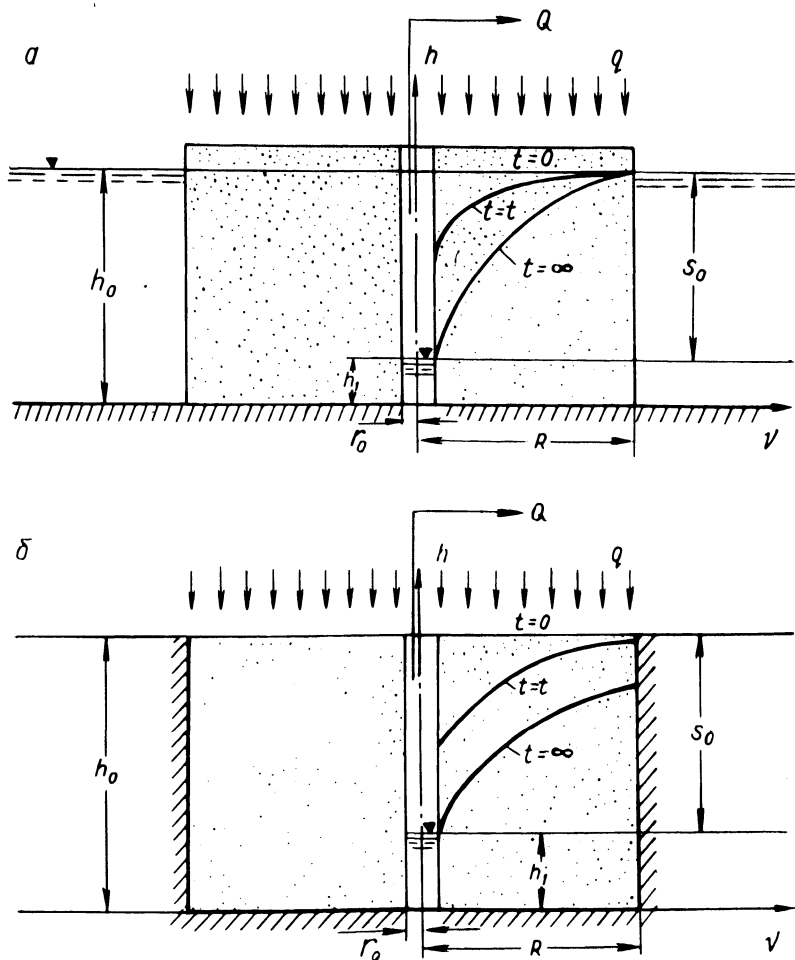


Рис. 1. Расчетные схемы водопритока к скважинам для открытого пласта (а) и изолированного (б).

Осесимметричная фильтрация с учетом инфильтрационного питания описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{q}{\delta}, \quad (1)$$

где h - напор; $a = \frac{m}{\delta}$ - коэффициент урвнeпpовoднoсти, а для напорных пластов - коэффициент пьезопроводности ($m = kh_{cp}$, k - коэффициент фильтрации, h_{cp} - средняя мощность потока грунтовых вод); δ - коэффициент водоотдачи; q - интенсивность инфильтрационного питания; r - радиальная координата; t - время.

Уравнение (1) для понижений уровня грунтовых вод $s = h_0 - h$ можно переписать для безразмерных координат и параметров в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 s}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial s}{\partial \bar{r}} - \eta, \quad ,$$

где $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$; $\tau = \frac{\delta R^2}{kh_{cp}}$; $\bar{r} = \frac{r}{R}$; $\eta = \frac{qR^2}{kh_{cp}}$; R -

радиус пласта.

Последнее уравнение подстановкой $s = s^* - \eta \bar{t}$ приводит к виду

$$\frac{\partial s^*}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 s^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial s^*}{\partial \bar{r}}. \quad (3)$$

Теперь для нахождения решений, соответствующих схемам, представленным на рис. 1, можно воспользоваться общим решением Маскета [2,3]. Рассмотрим отдельно четыре разных случая.

1. Для схемы, приведенной на рис. 1,а, когда на обоих контурах пласта заданы напоры, общее решение Маскета имеет вид

$$s^* = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 I_0(\mu_n \bar{r}_0) u(\mu_n \bar{r}) e^{-\mu_n^2 \bar{t}}}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_0^2(\mu_n)} \left[\frac{\pi}{2} I_0(\mu_n \bar{r}_0) \times \right. \\ \left. \times \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{r} g(\bar{r}_0) u(\mu_n \bar{r}) d\bar{r} - I_0(\mu_n) \int_0^{\bar{t}} f_1(\lambda) e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda + \right. \\ \left. + I_0(\mu_n \bar{r}_0) \int_0^{\bar{t}} f_2(\lambda) e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda \right], \quad (4)$$

где $u(\mu_n \bar{r}) = Y_0(\mu_n) I_0(\mu_n \bar{r}) = I_0(\mu_n) Y_0(\mu_n \bar{r})$;

μ_n - корни уравнения (5) при $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\bar{r}_0 = r_0 / R$;
 I_0 , Y_0 - символы функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; $g(\bar{r})$, $f_1(\bar{t})$ и $f_2(\bar{t})$ - функции, задающие напоры (понижения) в начальный момент времени ($t = 0$) и соответственно на контуре скважины и пласта.

Значение корней приведено в табл. 1*.

Найдем вид решения уравнения (4) для следующих предельных условий

$$\left. \begin{aligned} 1) t=0, r_0 \leq r \leq R, h=h_0, s=0, s^* = g(\bar{r}) = 0; \\ 2) t>0, r=r_0, h=h_1, s=h_0-h_1=s_0, s^* = f_1(\bar{t}) = s_0 + \eta \bar{t}; \\ 3) t>0, r=R, h=h_0, s=0, s^* = f_2(\bar{t}) = \eta \bar{t}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Подставляя значение этих предельных условий в (4) и интегрируя, получим

$$s = s_0 \left(\varphi_1 - \frac{\eta}{s_0} \varphi_2 \right), \quad (7)$$

где $\varphi_1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}})$, $\varphi_2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - A_n^0}{\mu_n^2} (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}})$,

$$A_n = \frac{I_0(\mu_n \bar{r}_0) I_0(\mu_n) U(\mu_n \bar{r})}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_0^2(\mu_n)}, \quad A_n^0 = - \frac{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) u(\mu_n \bar{r})}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_0^2(\mu_n)}, \quad (8)$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \ln \bar{r} / \ln \bar{r}_0.$$

Дебит скважины можно вычислить из следующего выражения

$$Q = -2\pi k h_{cp} r_0 \frac{\partial s}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial r} = - \frac{\partial s}{\partial r} \right). \quad (9)$$

* В составлении программы принимал участие И.Д.Трухан.

Таблица 1. Корни характеристических уравнений

Номер схемы	Номер корня	$\bar{F}_0 = 0,1$	0,08	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
$u(\mu_n \bar{F}_0) = I_0(\mu_n \bar{F}_0) Y_0(\mu_n) - Y_0(\mu_n \bar{F}_0) I_0(\mu_n) = 0$								
I	1	3,3139	2,9506	2,3009	2,7418	2,6548	2,6297	2,5871
	2	6,8575	6,2398	6,0108	5,9265	5,8089	5,7768	5,7235
	3	10,3774	9,5136	9,2142	9,1087	9,0678	8,9901	8,8968
	4	13,8864	12,7779	12,4113	12,2868	12,1251	12,0833	12,0170
	5	17,3896	16,0363	15,6043	15,4618	15,2811	15,2355	15,1641
	6	20,8883	19,2908	18,7942	18,6341	18,4360	18,3868	18,3109
$u(\mu_n \bar{F}_0) = I_0(\mu_n \bar{F}_0) Y_1(\mu_n) - Y_0(\mu_n \bar{F}_0) I_1(\mu_n) = 0$								
II	1	1,1026	0,8435	0,7166	0,6607	0,5687	0,5394	0,4857
	2	4,9788	4,4832	4,2899	4,2163	4,1108	4,0812	4,0317
	3	8,5542	7,8120	7,5463	7,4507	7,3202	7,2850	7,2277
	4	12,0867	11,1000	10,7663	10,6509	10,4989	10,4590	10,3954
	5	15,6028	14,3717	13,9719	13,8381	13,6666	13,6228	13,5538
	6	19,1107	17,6346	17,1700	17,0185	16,8289	16,7814	16,7076
$u(\mu_n \bar{F}_0) = I_1(\mu_n) Y_1(\mu_n \bar{F}_0) - Y_1(\mu_n) I_1(\mu_n \bar{F}_0) = 0$								
III	1	2,4481	2,4088	2,4052	2,4049	2,4048	2,4048	2,4048
	2	5,7257	5,5409	5,5224	5,5206	5,5201	5,5200	5,5200
	3	9,0955	8,7034	8,6595	8,6551	8,6537	8,6537	8,6537
	4	12,5099	11,8803	11,8022	11,7942	11,7916	11,7915	11,7915
	5	15,9489	15,0673	14,9479	14,9352	14,9310	14,9309	14,9309
	6	19,4027	18,2623	18,0957	18,0773	18,0713	18,0711	18,0748
$u(\mu_n \bar{F}_0) = I_0(\mu_n) Y_1(\mu_n \bar{F}_0) - Y_0(\mu_n) I_1(\mu_n \bar{F}_0) = 0$								
IV	1	3,9409	3,8421	3,8328	2,8319	3,8317	3,8317	3,8317
	2	7,3305	7,0491	7,0194	7,0165	7,0156	7,0155	7,0155
	3	10,7483	10,2412	10,1815	10,1754	10,1735	10,1734	10,1734
	4	14,1886	13,4350	13,3373	13,3271	13,3238	13,3237	13,3236
	5	17,6433	16,6334	16,4912	16,4759	16,4708	16,4706	16,4706
	6	21,1073	19,8386	19,6447	19,6233	19,6181	19,6159	19,6158

Дифференцируя (7) по \bar{r} и принимая во внимание следующее равенство [2]

$$u'(\mu_n \bar{r}_0) = -\frac{2}{\pi \bar{r}_0} \frac{I_0(\mu_n)}{I_0(\mu_n \bar{r}_0)},$$

находим

$$Q = 2\pi k h_{cp} s_0 \left(\psi_1 - \frac{\eta}{s_0} \psi_2 \right), \quad (10)$$

$$\text{где } \psi_1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}) = \frac{1}{\ln \bar{r}_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 \bar{t}},$$

$$\psi_2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n - B_n^0}{\mu_n^2} (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \quad B_n = \frac{I_0^2(\mu_n)}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_0^2(\mu_n)},$$

$$B_n^0 = \frac{I_0(\mu_n) I_0(\mu_n \bar{r}_0)}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_0^2(\mu_n)}. \quad (11)$$

Для возможного практического использования зависимостей (7) и (10) входящие в них функции протабулированы. Они приводятся в табл. 2 (функция ψ) и на рис. 2 (функция Ψ).

2. Обращаясь к схеме рис. 1, б для случая, когда на контуре скважины задан напор, а на контуре пласта - нулевой расход (изолированный пласт), запишем общее решение Маскета для рассматриваемого случая

$$s^* = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 I_0(\mu_n \bar{r}_0) u(\mu_n \bar{r}) e^{-\mu_n^2 \bar{t}}}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_1^2(\mu_n)} \left[\frac{\pi}{2} I_0(\mu_n \bar{r}_0) \times \right.$$

Таблица 2. Значение функций φ_1 и φ_2

r_0	t	$\varphi_1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1 - e^{-\mu n^2 t})$					$\varphi_2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - A_0}{\mu^2 n} (1 - e^{-\mu n^2 t})$					
		r					r					
		0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	
0,03	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	0,01	0,295	0,026	0,017	0,000	0,003	0,007	0,010	0,010	0,010	0,010	
	0,02	0,372	0,037	0,022	0,002	0,005	0,013	0,020	0,020	0,019	0,019	
	0,04	0,436	0,105	0,046	0,004	0,010	0,023	0,037	0,039	0,033	0,033	
	0,06	0,468	0,149	0,072	0,013	0,013	0,032	0,053	0,054	0,045	0,045	
	0,08	0,488	0,180	0,094	0,024	0,017	0,039	0,067	0,068	0,054	0,054	
	0,10	0,503	0,203	0,113	0,035	0,020	0,046	0,079	0,079	0,062	0,062	
	0,20		0,341	0,132	0,091	0,028	0,066	0,115	0,113	0,086	0,086	
	0,01	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		0,01	0,227	0,012	0,009	0,001	0,006	0,008	0,009	0,010	0,010	0,010
0,02		0,296	0,015	0,012	0,001	0,011	0,016	0,020	0,020	0,019	0,019	
0,04		0,358	0,063	0,027	0,003	0,021	0,029	0,038	0,039	0,033	0,033	
0,06		0,391	0,096	0,044	0,009	0,029	0,041	0,055	0,055	0,045	0,045	
0,08		0,412	0,120	0,060	0,017	0,037	0,052	0,070	0,069	0,055	0,055	
0,10		0,428	0,139	0,075	0,025	0,044	0,062	0,083	0,081	0,063	0,063	
0,20			0,233	0,098	0,063	0,066	0,094	0,127	0,118	0,088	0,088	
0,30			0,288	0,117	0,068	0,079	0,111	0,145	0,135	0,100	0,100	
0,50			0,304	0,131	0,072	0,086	0,121	0,158	0,146	0,107	0,107	
0,005	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	0,01	0,189	0,009	0,007	0,001	0,007	0,009	0,010	0,010	0,010	0,010	
	0,02	0,251	0,011	0,009	0,001	0,013	0,017	0,020	0,020	0,019	0,019	
	0,04	0,308	0,051	0,021	0,003	0,024	0,031	0,039	0,039	0,033	0,033	
	0,06	0,338	0,079	0,035	0,008	0,035	0,045	0,056	0,055	0,045	0,045	
	0,08	0,359	0,100	0,049	0,014	0,044	0,057	0,071	0,069	0,055	0,055	
	0,10	0,374	0,117	0,061	0,021	0,053	0,068	0,085	0,081	0,063	0,063	
	0,20		0,200	0,084	0,053	0,080	0,104	0,131	0,119	0,089	0,089	
	0,30		0,245	0,100	0,054	0,096	0,125	0,151	0,138	0,101	0,101	
	0,50		0,261	0,113	0,063	0,106	0,137	0,165	0,151	0,110	0,110	

Продолжение

		0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7
0,001	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,148	0,133	0,009	0,004	0,001	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010
	0,02	0,193	0,180	0,007	0,005	0,001	0,015	0,018	0,020	0,020	0,019
	0,04	0,233	0,226	0,035	0,013	0,002	0,029	0,034	0,039	0,039	0,033
	0,06	0,257	0,251	0,056	0,024	0,005	0,042	0,049	0,057	0,065	0,045
	0,08	0,272	0,269	0,073	0,034	0,010	0,054	0,063	0,073	0,069	0,055
	0,10	0,283	0,282	0,085	0,042	0,015	0,065	0,076	0,087	0,082	0,063
	0,20			0,145	0,063	0,038	0,102	0,119	0,137	0,122	0,090
	0,30			0,182	0,075	0,041	0,124	0,144	0,159	0,142	0,103
	0,50			0,195	0,086	0,048	0,138	0,161	0,177	0,157	0,113
0,0005	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,133	0,117	0,005	0,003	0,001	0,008	0,009	0,010	0,010	0,010
	0,02	0,116	0,160	0,006	0,005	0,001	0,018	0,018	0,020	0,020	0,019
	0,04	0,215	0,202	0,031	0,012	0,002	0,030	0,035	0,039	0,039	0,033
	0,06	0,236	0,225	0,050	0,021	0,005	0,044	0,050	0,056	0,055	0,045
	0,08	0,251	0,241	0,065	0,030	0,009	0,057	0,065	0,073	0,061	0,055
	0,10	0,261	0,253	0,077	0,038	0,013	0,068	0,078	0,088	0,082	0,063
	0,20			0,130	0,057	0,034	0,108	0,123	0,138	0,123	0,090
	0,30			0,164	0,068	0,037	0,132	0,150	0,162	0,144	0,104
	0,50			0,177	0,078	0,044	0,148	0,168	0,181	0,159	0,114
0,0001	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,109	0,091	0,003	0,002	0,000	0,008	0,009	0,010	0,010	0,010
	0,02	0,145	0,126	0,004	0,003	0,001	0,016	0,018	0,020	0,020	0,019
	0,04	0,178	0,161	0,025	0,009	0,002	0,032	0,036	0,039	0,039	0,033
	0,06	0,197	0,181	0,040	0,016	0,004	0,047	0,052	0,057	0,055	0,045
	0,08	0,210	0,195	0,052	0,023	0,007	0,061	0,068	0,074	0,070	0,055
	0,10	0,219	0,205	0,061	0,030	0,010	0,074	0,082	0,089	0,082	0,063
	0,20		0,207	0,105	0,046	0,027	0,118	0,131	0,141	0,124	0,091
	0,30		0,221	0,120	0,058	0,035	0,142	0,157	0,168	0,145	0,104
	0,50			0,144	0,064	0,036	0,164	0,171	0,187	0,162	0,115

$$\times \int_{r_0}^{\bar{r}} \bar{r} g(\bar{r}) u(\bar{r}) d\bar{r} - I_1(\mu_n) \int_0^{\bar{t}} f_1(\lambda) e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda - \frac{I_0(\mu_n \bar{r}_0)}{\mu_n} \int_0^{\bar{t}} f_2(\lambda) \times e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda \quad (12)$$

где $U(\mu_n \bar{r}) = Y_1(\mu_n) I_0(\mu_n \bar{r}) - I_1(\mu_n) Y_0(\mu_n \bar{r})$, (13)

I_1, Y_1 - символы функций Бесселя первого и второго рода первого порядка.

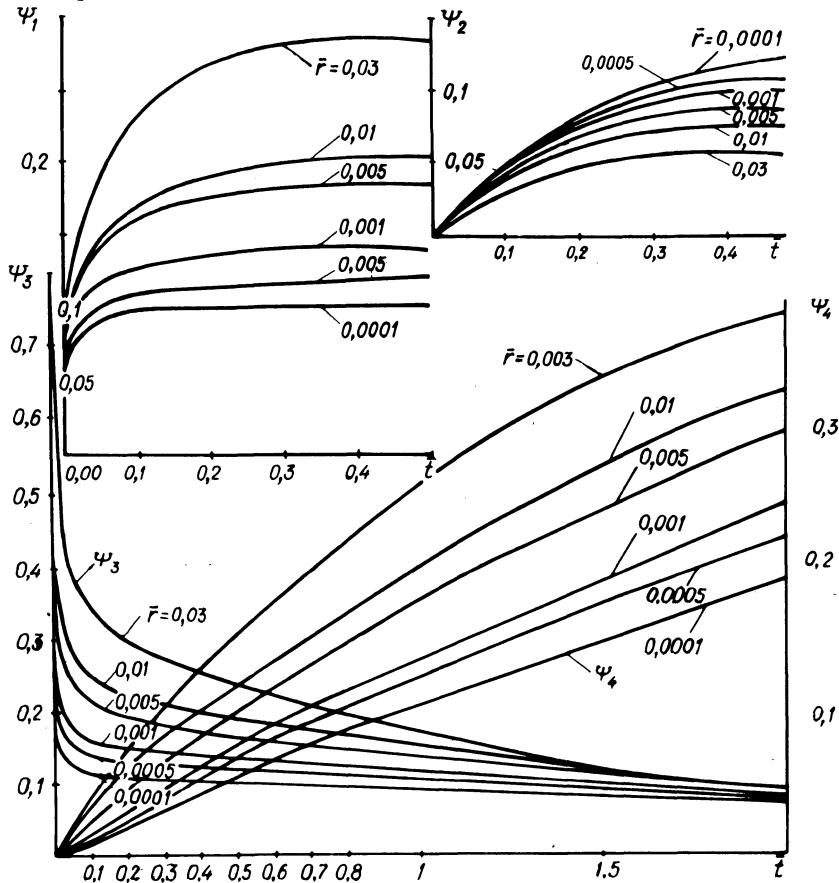


Рис.2. Графики функций дебита скважин.

Корни μ_n находятся из уравнения (13) Они приведены в табл. 1.

Найдем вид решения (12) при следующих предельных условиях:

$$\left. \begin{aligned} 1) t=0, r_0 \leq r \leq R, \quad h=h_0, \quad s=0, s^* = g(\bar{r})=0; \\ 2) t>0, r=r_0, h=h_1, \quad s=s_0, \quad s^* = f_1(\bar{t})=s_0 + \eta \bar{t}; \\ 3) t>0, r=R, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \frac{\partial s}{\partial r} = 0, \quad s^* = f_2(\bar{t})=0. \end{aligned} \right\} (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$s = s_0 \left[1 - \left(\varphi_3 + \frac{\eta}{s_0} \varphi_4 \right) \right], \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \varphi_3 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n^2 \bar{t}}, \quad \varphi_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\mu_n^2} (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \\ c_n = - \frac{I_0(\mu_n \bar{r}_0) I_1(\mu_n) u(\mu_n \bar{r})}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_1^2(\mu_n)}, \quad \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1. \end{aligned} \right\} (16)$$

Дебит скважины для этого случая по формуле (9) с учетом (15) и (16) находится из выражения

$$Q = 2\pi kh_{cp} s_0 \left(\varphi_3 + \frac{\eta}{s_0} \varphi_4 \right), \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \varphi_3 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\mu_n^2 \bar{t}}, \quad \varphi_4 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^2} (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \\ D_n = \frac{I_1^2(\mu_n)}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_1^2(\mu_n)}, \quad \varphi_4 / t = \infty = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^2} = 1/2. \end{aligned} \right\} (18)$$

Таблица 3. Значения функций φ_3 и φ_4

\bar{r}_0	\bar{t}	$\varphi_3 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu^2 \bar{t}}$						$\varphi_4 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\mu^2 n} (1 - e^{-\mu^2 \bar{t}})$					
		\bar{r}						\bar{r}					
		0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00
0,03	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,268	0,616	0,980	1,00	1,000	1,000	0,013	0,029	0,014	0,010	0,006	0,006
	0,02	0,231	0,539	0,934	0,994	1,000	1,000	0,019	0,042	0,029	0,019	0,014	0,013
	0,04	0,203	0,475	0,865	0,971	0,996	1,000	0,028	0,059	0,054	0,039	0,029	0,026
	0,06	0,189	0,444	0,822	0,945	0,986	0,997	0,032	0,071	0,074	0,057	0,045	0,041
	0,08	0,180	0,423	0,791	0,922	0,974	0,993	0,036	0,080	0,091	0,075	0,061	0,056
	0,10	0,174	0,409	0,767	0,903	0,962	0,985	0,039	0,089	0,106	0,091	0,076	0,071
	0,20	0,156	0,367	0,694	0,829	0,897	0,929	0,052	0,121	0,174	0,165	0,136	0,131
	0,30	0,144	0,340	0,644	0,771	0,836	0,867	0,063	0,145	0,233	0,231	0,230	0,224
	0,50	0,124	0,294	0,557	0,668	0,725	0,752	0,082	0,191	0,334	0,356	0,358	0,364
	0,70	0,108	0,252	0,483	0,580	0,629	0,652	0,101	0,237	0,422	0,461	0,472	0,482
	1,00	0,088	0,206	0,391	0,468	0,507	0,572	0,120	0,282	0,522	0,600	0,621	0,624
1,50	0,061	0,144	0,274	0,328	0,358	0,399	0,151	0,355	0,661	0,766	0,802	0,811	
2,00	0,043	0,101	0,182	0,221	0,249	0,253	0,173	0,407	0,759	0,882	0,928	0,942	
0,01	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,553	0,553	1,000	0,990	1,000	1,000	0,020	0,025	0,010	0,006	0,006	0,005
	0,02	0,499	0,778	0,962	0,997	1,000	1,000	0,030	0,039	0,022	0,016	0,012	0,011
	0,04	0,453	0,646	0,914	0,982	0,997	1,000	0,043	0,057	0,043	0,032	0,025	0,023
	0,05	0,430	0,614	0,881	0,965	0,991	1,000	0,053	0,071	0,060	0,047	0,039	0,035
	0,08	0,415	0,583	0,857	0,949	0,984	0,999	0,060	0,082	0,076	0,062	0,052	0,048
	0,10	0,404	0,577	0,837	0,934	0,974	0,996	0,068	0,093	0,090	0,077	0,066	0,061
	0,20	0,372	0,531	0,778	0,878	0,928	0,995	0,095	0,133	0,153	0,143	0,134	0,130
	0,30	0,351	0,502	0,736	0,833	0,882	0,991	0,118	0,166	0,210	0,203	0,200	0,195
	0,50	0,317	0,452	0,663	0,751	0,796	0,951	0,160	0,228	0,311	0,319	0,317	0,320
	0,70	0,286	0,408	0,599	0,678	0,718	0,737	0,204	0,290	0,401	0,421	0,426	0,431
	1,00	0,245	0,350	0,513	0,581	0,616	0,632	0,251	0,359	0,515	0,562	0,573	0,573
1,50	0,189	0,271	0,397	0,449	0,476	0,483	0,329	0,469	0,667	0,745	0,768	0,773	
2,00	0,147	0,209	0,307	0,348	0,368	0,378	0,389	0,555	0,802	0,887	0,919	0,927	

Продолжение

		0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00
	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,645	0,827	0,993	1,000	1,000	1,000	0,020	0,023	0,009	0,007	0,005	0,005
	0,02	0,593	0,765	0,971	0,998	1,000	1,000	0,030	0,035	0,020	0,014	0,011	0,010
	0,04	0,546	0,708	0,931	0,986	0,998	1,000	0,044	0,053	0,038	0,029	0,023	0,021
	0,06	0,522	0,678	0,902	0,972	0,993	0,999	0,055	0,067	0,054	0,043	0,036	0,033
	0,08	0,506	0,657	0,881	0,958	0,987	0,995	0,064	0,078	0,069	0,057	0,048	0,045
	0,10	0,494	0,642	0,864	0,945	0,979	0,992	0,072	0,089	0,082	0,070	0,061	0,057
0,005	0,20	0,460	0,598	0,811	0,897	0,940	0,959	0,104	0,131	0,142	0,132	0,124	0,120
	0,30	0,438	0,570	0,773	0,857	0,900	0,920	0,130	0,167	0,197	0,189	0,186	0,181
	0,50	0,401	0,522	0,708	0,785	0,824	0,843	0,180	0,233	0,296	0,300	0,297	0,290
	0,70	0,368	0,478	0,649	0,720	0,756	0,773	0,231	0,299	0,385	0,399	0,401	0,406
	1,00	0,322	0,419	0,569	0,631	0,663	0,678	0,290	0,377	0,501	0,538	0,546	0,545
	1,50	0,259	0,337	0,458	0,508	0,533	0,545	0,388	0,501	0,670	0,725	0,745	0,746
	2,00	0,208	0,271	0,368	0,408	0,428	0,438	0,463	0,601	0,806	0,876	0,901	0,908
	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,763	0,886	0,996	1,000	1,000	1,000	0,017	0,018	0,007	0,006	0,005	0,005
	0,02	0,717	0,889	0,980	0,999	1,000	1,000	0,027	0,029	0,018	0,012	0,010	0,009
	0,04	0,676	0,793	0,952	0,991	0,999	1,000	0,041	0,045	0,031	0,024	0,020	0,019
	0,06	0,653	0,768	0,931	0,980	0,995	1,000	0,052	0,058	0,045	0,037	0,031	0,029
	0,08	0,638	0,750	0,915	0,970	0,991	0,998	0,062	0,069	0,058	0,048	0,042	0,039
	0,10	0,627	0,737	0,902	0,961	0,985	0,995	0,070	0,079	0,070	0,060	0,053	0,050
0,001	0,20	0,594	0,699	0,860	0,924	0,956	0,971	0,108	0,122	0,123	0,115	0,108	0,105
	0,30	0,573	0,674	0,830	0,894	0,926	0,941	0,137	0,159	0,173	0,168	0,162	0,158
	0,50	0,536	0,631	0,777	0,837	0,868	0,883	0,198	0,229	0,268	0,265	0,262	0,262
	0,70	0,502	0,591	0,728	0,785	0,814	0,827	0,255	0,298	0,351	0,358	0,358	0,360
	1,00	0,456	0,537	0,661	0,712	0,738	0,751	0,328	0,386	0,467	0,489	0,492	0,491
	1,50	0,388	0,457	0,562	0,606	0,628	0,639	0,448	0,526	0,540	0,676	0,687	0,688
	2,00	0,330	0,388	0,478	0,516	0,554	0,543	0,550	0,646	0,788	0,835	0,851	0,856

Продолжение

		0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	1,00
	0,00	1,000	1,000	1000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,792	0,901	0,996	1,000	1,000	1,000	0,016	0,016	0,007	0,006	0,005	0,004
	0,02	0,750	0,858	0,983	0,999	1,000	1,000	0,026	0,027	0,015	0,011	0,009	0,009
	0,04	0,711	0,816	0,958	0,992	0,999	1,000	0,039	0,042	0,029	0,023	0,019	0,018
	0,06	0,690	0,793	0,939	0,983	0,996	0,999	0,050	0,054	0,042	0,034	0,030	0,028
	0,08	0,676	0,777	0,924	0,974	0,992	0,998	0,060	0,065	0,054	0,046	0,040	0,037
0,0005	0,10	0,665	0,765	0,912	0,965	0,987	0,995	0,068	0,075	0,066	0,057	0,050	0,047
	0,20	0,633	0,728	0,874	0,932	0,961	0,974	0,104	0,117	0,117	0,109	0,103	0,090
	0,30	0,613	0,705	0,846	0,904	0,933	0,947	0,136	0,154	0,165	0,158	0,154	0,150
	0,50	0,578	0,664	0,798	0,853	0,881	0,893	0,196	0,224	0,255	0,254	0,250	0,251
	0,70	0,545	0,627	0,753	0,805	0,831	0,843	0,258	0,294	0,339	0,343	0,343	0,345
	1,00	0,499	0,574	0,690	0,737	0,762	0,773	0,334	0,383	0,453	0,471	0,474	0,472
	1,50	0,432	0,496	0,596	0,638	0,658	0,668	0,459	0,527	0,628	0,656	0,665	0,666
	2,00	0,373	0,429	0,516	0,551	0,569	0,578	0,567	0,652	0,776	0,816	0,830	0,834
	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,01	0,839	0,924	0,997	1,000	1,000	1,000	0,014	0,014	0,006	0,005	0,004	0,004
	0,02	0,804	0,889	0,987	0,999	1,000	1,000	0,023	0,023	0,012	0,010	0,009	0,008
	0,04	0,770	0,854	0,967	0,994	0,999	1,000	0,035	0,037	0,026	0,020	0,018	0,017
	0,06	0,752	0,834	0,952	0,986	0,997	0,999	0,046	0,048	0,037	0,031	0,027	0,025
	0,08	0,739	0,821	0,940	0,979	0,994	0,998	0,055	0,058	0,048	0,041	0,036	0,034
0,0001	0,10	0,730	0,810	0,930	0,972	0,990	0,996	0,063	0,067	0,058	0,051	0,046	0,043
	0,20	0,701	0,778	0,898	0,945	0,968	0,979	0,099	0,108	0,106	0,098	0,093	0,090
	0,30	0,682	0,758	0,874	0,922	0,946	0,957	0,131	0,144	0,150	0,143	0,133	0,136
	0,50	0,650	0,722	0,834	0,879	0,903	0,914	0,193	0,213	0,234	0,231	0,228	0,228
	0,70	0,620	0,689	0,795	0,839	0,861	0,871	0,254	0,282	0,313	0,315	0,314	0,315
	1,00	0,578	0,641	0,741	0,782	0,802	0,812	0,335	0,372	0,423	0,436	0,437	0,435
	1,50	0,513	0,571	0,658	0,695	0,713	0,722	0,468	0,519	0,593	0,615	0,621	0,621
	2,00	0,458	0,507	0,585	0,617	0,634	0,641	0,585	0,650	0,744	0,774	0,784	0,786

Значения функций φ и ψ даны в табл. 3 и на рис. 2.

3. Третий случай предусматривает задание на контуре пласта постоянного напора, а на контуре скважины постоянного дебита (рис. 1, а). Предельные условия для этого случая записываются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} 1) t=0, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad h=h_0, \quad s=s_0, s^*=g(\bar{r})=0; \\ 2) t>0, \quad r=r_0, \quad r \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi kh_{cp}}, \quad r \frac{\partial s^*}{\partial r} = f_1(\bar{t}) = -\frac{Q}{2\pi kh_{cp}}; \\ 3) t>0, \quad r=R, \quad h=h_0, \quad s^* = f_2(\bar{t}) = \gamma \bar{t}. \end{aligned} \right\} (19)$$

Для этого случая общее решение

$$s^* = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 I_0(\mu_n) u(\mu_n \bar{r}) e^{-\mu_n^2 \bar{t}}}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_1^2(\mu_n)} \left[\frac{\pi}{2} I_0(\mu_n) \int_{r_0}^1 \bar{r} g(\bar{r}) \times \right. \\ \left. \times u(\mu_n \bar{r}) d\bar{r} - \frac{I_0(\mu_n)}{\mu_n \bar{r}_0} \int_0^{\bar{t}} f_1(\lambda) e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda - \right. \\ \left. - I_1(\mu_n \bar{r}_0) \int_0^{\bar{t}} f_2(\lambda) e^{\mu_n^2 \lambda} d\lambda \right], \quad (20)$$

где

$$u(\mu_n \bar{r}) = Y_1(\mu_n \bar{r}_0) I_0(\mu_n \bar{r}) - I_1(\mu_n \bar{r}_0) Y(\mu_n \bar{r}), \quad (21)$$

а корни этого уравнения отыскиваются при $r=1$, причем $u'(\mu_n r_0) = 0$. причем

Подставляя в (20) предельные условия (21), найдем

$$s = \frac{Q}{2\pi kh_{cp} \bar{r}_0} \left(\varphi_5 - 2\bar{r}_0 \frac{Q_0}{Q} \varphi_6 \right), \quad (22)$$

$$\varphi_5 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} E_n (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \quad \varphi_6 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n} \frac{I_1(\mu_n \bar{r}_o)}{I_0(\mu_n)} \times$$

$$\times (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \quad (23)$$

$$E_n = \frac{1}{\mu_n} \frac{I_0^2(\mu_n) u(\mu_n \bar{r})}{I_0^2(\mu_n \bar{r}_o) - I_1^2(\mu_n)}, \quad Q_o = \pi R^2 q.$$

Для надежного табулирования функций φ_5 и φ_6 требуется высокая точность определения корней μ_n и машинного счета самих функций. Нами составлена программа для подсчета этих функций, но точность их оказалась недостаточной. Поэтому предлагается приближенный алгоритм для определения φ_5 и φ_6 .

Для рассматриваемого случая функция понижения напора при $t \rightarrow \infty$ имеет следующий вид (3)

$$s = \frac{q}{2k h_{cp}} \left(R^2 \ln R/r - \frac{R^2 - r^2}{2} \right) + \frac{Q^*}{2\pi k h_{cp}} \ln R/r,$$

где Q^* - транзитный приток воды в скважину с периферии пласта.

Преобразуем эту зависимость следующим образом:

$$s = \frac{Q}{2\pi k h_{cp} r_o} \left[\bar{r}_o \ln \frac{1}{\bar{r}} - 2\bar{r}_o \frac{Q_o}{Q} \frac{(1 - \bar{r}^2)}{4} \right],$$

где $Q = Q^* + q\pi R^2$ - дебит скважины, формируемый за счет внутреннего и внешнего питания.

Из последней зависимости находим, что для стационарной фильтрации

$$\varphi_5 = \bar{r}_o \ln \frac{1}{\bar{r}}, \quad \varphi_6 = \frac{1 - \bar{r}^2}{4}$$

Если в расчетах по формулам (22) и (23) ограничиться первыми членами рядов, то приближенно можно найти

$$\varphi_5 = \bar{r}_o \ln \frac{1}{\bar{r}} (1 - e^{-\mu_1^2 \bar{t}}), \quad \varphi_6 = \frac{1 - \bar{r}^2}{4} (1 - e^{-\mu_1^2 \bar{t}}),$$

где значения μ_1 берутся из табл. 1 для соответствующего \bar{r}_0 .

4. Для последнего случая (рис. 1, б), когда на обоих контурах пласта заданы расходы, общее решение Маскета имеет вид

$$s^* = \frac{2}{1 - \bar{r}_0^2} \int_0^{\bar{t}} [f_2(\lambda) - f_1(\lambda)] d\lambda + \frac{2}{1 - \bar{r}_0^2} \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{r} g(\bar{r}) u(\mu_n \bar{r}) d\bar{r} +$$

$$+ \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 I_1(\mu_n \bar{r}_0) u(\mu_n \bar{r}) e^{-\mu_n^2 \bar{t}}}{I_1^2(\mu_n \bar{r}_0) - I_1^2(\mu_n)} \left[\frac{\pi}{2} I_1(\mu_n \bar{r}_0) \right] \times$$

$$\times \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{r} g(\bar{r}) u(\mu_n \bar{r}) d\bar{r} + \frac{I_1(\mu_n)}{\mu_n \bar{r}_0} \int_0^{\bar{t}} f_1(\lambda) e^{-\mu_n^2 \lambda} d\lambda - \frac{I_1(\mu_n \bar{r}_0)}{\mu_n} \int_0^{\bar{t}} f_2(\lambda) e^{-\mu_n^2 \lambda} d\lambda,$$

где $u(\mu_n \bar{r})$ определяется видом (13), а корни μ_n находятся из выражения

$$I_1(\mu_n) Y_1(\mu_n \bar{r}_0) - Y_1(\mu_n) I_1(\mu_n \bar{r}_0) = 0. \quad (25)$$

Подставляя в (24) следующие предельные условия

$$\left. \begin{aligned} 1) t = 0, r_0 \leq r \leq R, h = h_0, s = 0, s^* = g(\bar{r}) = 0; \\ 2) t > 0, r = r_0, r \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi kh_{cp}}, r \frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi kh_{cp}}, \\ r \frac{\partial s^*}{\partial r} = f_1(\bar{t}) = -\frac{Q}{2\pi kh_{cp}}; \\ 3) t > 0, r = R, \frac{\partial h}{\partial r} = 0, r \frac{\partial s}{\partial r} = 0, r \frac{\partial s^*}{\partial r} = f_2(\bar{t}) = 0, \end{aligned} \right\} (26)$$

получим с учетом $\eta = \frac{qR^2}{kh}$, $Q_0 = \pi R^2 q$

$$s = \frac{Q}{2\pi kh_{cp} \bar{r}_o} \left[\varphi_7 + 2\bar{r}_o \left(\frac{1}{1-\bar{r}^2} - \frac{Q_o}{Q} \right) \varphi_8 \right], \quad (27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_7 &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (1 - e^{-\mu_n^2 \bar{t}}), \quad \varphi_8 = \bar{t}, \\ \sigma_n &= \frac{1}{\mu_n} \frac{I_1(\mu_n \bar{r}_o) I_0(\mu_n) u(\mu_n \bar{r})}{I_1^2(\mu_n \bar{r}_o) - I_0^2(\mu_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Выражение (27) может быть приближенно аппроксимировано следующим видом [2]

$$s = \frac{Q}{2\pi kh_{cp}} \left[\ln \frac{0,47}{r} + 2\bar{t} \left(1 - \frac{Q_o}{Q} \right) \right]. \quad (29)$$

Полученные расчетные зависимости для понижений уровня грунтовых вод в пластах и дебитов скважин в совокупности с таблицами и графиками значений, входящих в них функций, позволяют производить фильтрационные расчеты дренажных и водозаборных систем (скважин) для большого круга расчетных схем.

Резюме

Рассмотрены схемы расчета вертикального систематического дренажа и прогнозных эксплуатационных запасов подземных вод с учетом инфильтрационного питания с поверхности земли.

Литература

1. Аверьянов С.Ф., Усенко В.С. Способ расчета систематического вертикального дренажа. - В кн.: Управление поверхностными и подземными водными ресурсами и их использо-

вание. М., 1961. 2. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Л., 1949. 3. Усенко В.С. Приближенный расчет осесимметричной фильтрации при наличии инфильтрационного и радиального питания. - ИФЖ, 1960. № 3.