

## МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДРЕНАЖА

На рис. 1 (М 1:10000) приведена схема дренирования территории простейшей дренажной системой, состоящей из дрен (каждая длиной 200 м) и коллектора (1500 м), впадающего в регулируемую реку-водоприемник. С обеих сторон к заболоченному понижению имеется естественный приток грунтовых вод; перегораживающие сооружения на коллекторе замедляют скорость снижения УГВ. К дренируемой площади примыкает незаболоченная в естественном состоянии площадь  $\Omega$ . При дренировании территории  $F$  будет происходить снижение УГВ на площади  $\Omega$ , занятой луговыми травами. Задача состоит в том, чтобы найти такую глубину заложения дрен, при которой ущерб от потерь урожая при переувлажнении почвы на площади  $F$  и недоувлажнении на площади  $\Omega$  были минимальны.

Оптимальная глубина заложения дрен может быть найдена по критерию минимума приведенных затрат, отнесенных к площади дренирования. Функция цели по этому критерию формируется как сумма приведенных затрат по каждому сооружению системы:

$$\bar{S}_{\text{др}}(h) = \bar{S}_{\text{др}}(h) + \bar{S}_{\text{кл}}^{\text{I}}(h) + \bar{S}_{\text{кл}}^{\text{II}}(h) + \bar{S}_{\text{в}}(h) + \bar{Y}_{\text{щ1}}(h) + \bar{Y}_{\text{щ2}}(h) + \bar{C}_0 \text{ min}, \quad (1)$$

где  $\bar{S}_{\text{др}}(h) = \frac{K_{\text{др}}(h)(E + \eta_{\text{др}})}{F_{\text{др}}}$ ;  $K_{\text{др}}(h)$  - строительные затраты на устройство одной дрены (длиной 200 м);  $F_{\text{др}}$  -

площадь, обслуживаемая одной дренаем, га;  $\bar{S}_{\text{кл}}^{\text{I}} = \frac{\bar{K}_{\text{кл}}^{\text{I}}(h)(E + \eta_{\text{кл}})}{F_{\text{кл}}}$ ;

$\bar{K}_{\text{кл}}^{\text{I}}(h)$  - стоимость устройства коллектора, руб.;  $F_{\text{кл}}$  - пло-

\* От двух переменных (глубины заложения и расстояния между дренами) эта задача рассмотрена в работе [3].

щадь (нетто), обслуживаемая коллектором (30 га);  $\bar{S}_{\text{кл}}^{\text{II}}(h) = \frac{K_{\text{кл}}^{\text{II}}(h)(E+\eta_{\text{кл}})}{F}$ ;  $K_{\text{кл}}^{\text{II}}(h)$  - стоимость трубок коллектора, диа-

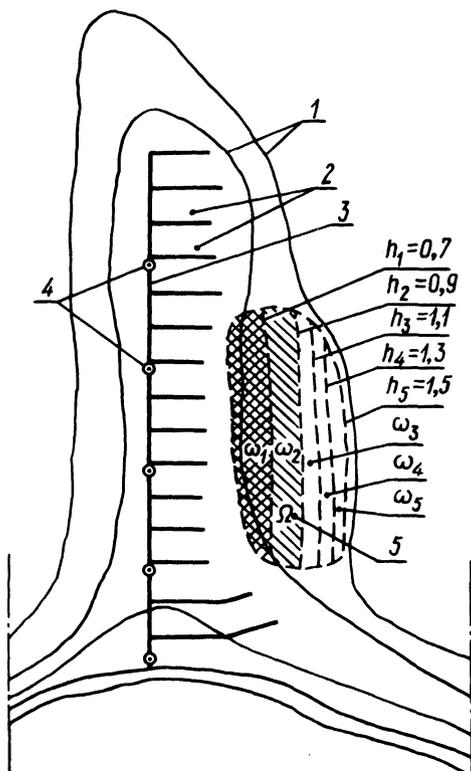


Рис. 1. Схема участка дренажирования: 1 - горизонтали; 2 - дрены; 3 - коллектор; 4 - колодцы; 5 - площадь с пониженным УГВ.

метры которых увеличиваются к устью (и зависящая от моду-

ля дренажного стока);  $\bar{S}_{\text{в}}(h) = \frac{K_{\text{в}}(h)(E+\eta_{\text{в}})}{F_{\text{с}}}$ ;  $K_{\text{в}}(h)$  - стои-

мость регулирования водоприемника, зависящая от глубины за-

ложения дрен и коллектора, руб.;  $F_{\text{с}}$  - площадь системы

(брутто) дренажирования (43,5 га);  $E$  - нормативный коэффициент окупаемости капитальных вложений;  $\eta_{\text{др}}$ ,  $\eta_{\text{кл}}$ ,  $\eta_{\text{в}}$  - доли

амортизационных отчислений от капитальных вложений по эле-

ментам системы; ( $\eta_{\text{др}} = \eta_{\text{кл}} = 0,019$ ;  $\eta_{\text{в}} = 0,049$ );  $\bar{Y}_{\text{ц1}}(h)$  -

ущерб, определяемый стоимостью потерянного урожая на пло-

$$\Omega = \sum_{i=1}^5 \omega_i$$
 ;  $\bar{Y}_{щ2}(h)$  - ущерб, определяемый стоимостью потерянного урожая на площади  $F$  (рис. 1);  $\bar{C}_0$  - ежегодные затраты на эксплуатацию системы (среднестатистические; число, не зависящее от  $h$ ).

После схода снега дренаж отводит вначале поверхностную воду, а затем идет снижение УГВ. В течение 10 суток необходимо понизить УГВ на 0,5 м. Если снижение будет идти медленнее, то верхний слой почвы останется в переувлажненном состоянии длительное время. Этим определяется ущерб ( $Y_{щ2}(h)$ ) от потерь урожая в первый укос. Снижение УГВ происходит с большей скоростью при более глубоком заложении дрен. Но чем больше глубина дрен, тем большая часть площади  $\Omega$  оказывается переосушенной, поскольку капиллярная кайма подстилающего песка отрывается от маломощного слоя торфа (0,4 м). На рис. 1 показаны границы участка  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). Их площади характеризуются пониженным УГВ, который уже не оказывает активного увлажняющего действия на слой торфа. Ущерб от недобора урожая ( $\bar{Y}_{щ1}(h)$ ) на прилегающей площади  $\Omega$  пропорционален площадям участков  $\omega_i$ .

В табл. 1 содержатся расчетные значения приведенных затрат по элементам дренажной системы (рис. 1) при расстоянии между дренами 40 м и вариантной глубине заложения дрен. Из табл. 1 видно, что при одной убывающей функции ( $\bar{Y}_{щ2}(h)$ ) общая сумма (последняя строка табл. 1.) затрат сначала убывает, а затем возрастает, т.е. геометрическим представлением функции цели на отрезке изменения переменной ( $h \in [0,7; 1,6]$ ) является унимодальная [2] кривая с точкой минимума; приближенное значение координаты точки минимума  $h_{\min} = 0,9$  м.

Аналитически вычисляем точку минимума функции цели от одной переменной, приравнивая производную нулю. Решение полученного таким образом уравнения не всегда, однако, просто. Часто оказывается невозможно взять и производную от некоторых функций-слагаемых. В функции (1) наибольшую трудность для взятия производной представляет  $\bar{S}^{II}(h)$ . Эта функция зависит от модуля дренажного стока; модуль стока в свою очередь зависит от глубины закладки дрен и вычисляется по весьма сложным формулам или определяется по графикам (для неустановившегося движения грунтовых вод [1]).

Таблица 1. Приведенные затраты (руб/га) по дренажной системе

| Глубина заложения дрен $h_{др}$ , м                                 | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5   |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Затраты по устройству дрены (длиной 200 м)                          | 11,42 | 11,69 | 11,90 | 12,20 | 12,50 | 12,79 | 13,09 | 13,42 | 13,77 |
| Глубина заложения коллектора $h_{кл}$ , м                           | 0,8   | 0,9   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5   | 1,6   |
| Затраты по устройству коллектора (1500 м),*                         |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $\bar{S}_{кл}^I$  | 1,69  | 1,75  | 1,81  | 1,87  | 1,94  | 2,01  | 2,08  | 2,16  | 2,28  |
| Модуль дренажного стола $q$ , л/с.га                                | 0,96  | 1,08  | 1,20  | 1,32  | 1,44  | 1,56  | 1,67  | 1,79  | 1,91  |
| Затраты по трубкам коллектора $\bar{S}_{кл}^II$                     | 3,83  | 4,0   | 4,16  | 4,28  | 4,43  | 4,55  | 4,64  | 4,74  | 4,82  |
| Затраты по регулированию уровня в водоприемнике $\bar{S}_B$         | 4,59  | 5,17  | 5,83  | 6,50  | 7,22  | 7,96  | 8,79  | 9,59  | 10,48 |
| Время понижения УГВ от поверхности земли до глубины 0,5 м $t$ , сут | 20,9  | 12,0  | 8,3   | 6,5   | 5,6   | 5,2   | 4,8   | 4,5   | 4,3   |
| Ущерб от снижения УГВ на осушаемой территории $\bar{Y}_{щ2}$        | 32,05 | 6,05  | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     |
| Ущерб от снижения УГВ на прилегающей территории $\bar{Y}_{щ1}$      | 2,26  | 3,37  | 4,16  | 4,82  | 5,29  | 5,70  | 6,0   | 6,21  | 6,58  |
| Постоянная часть затрат $\bar{C}_O$                                 | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   | 5,5   |
| Затраты по системе $\bar{S}_{пр}$                                   | 61,34 | 37,53 | 33,36 | 35,27 | 36,88 | 38,51 | 40,10 | 41,32 | 43,33 |

\* Учтены затраты на устройство одного устья и пяти колодцев.

Остальные зависимости, составляющие функцию цели, эмпирические, так как к стоимостным зависимостям элементов системы от глубины заложения дрен и функциям ущербов необходимо подобрать эмпирические формулы. Возможна также аппроксимация функции  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$ , но не во всех случаях. Упрощение использования метода производной возможно, если воспользоваться приемом исключения функции  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$  и последующим учетом этой функции в приближенном вычислении координаты точки минимума.

На рис. 2 показана зависимость функции  $\bar{S}_{пр}^I(h)$ , функции  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$  и функции цели  $\bar{S}_{пр}(h)$ . Функция  $\bar{S}_{пр}^I(h)$  содержит все функции - слагаемые функции цели (1), кроме функции  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$ . Координата точки минимума (M) функции цели  $\bar{S}_{пр}$  находится левее по отношению к координате точки минимума ( $M_1$ ) функции  $\bar{S}_{пр}^I(h)$ , что определяется возрастающим характером функции  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$ .

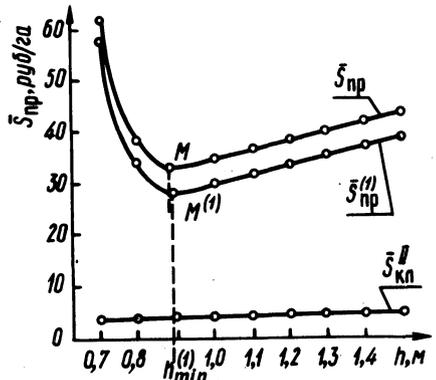


Рис. 2. Графики функции цели ( $\bar{S}_{пр}$ ), ее подсистемы ( $\bar{S}_{пр}^I$ ) и функции затрат по трубкам коллектора ( $\bar{S}_{кл}^{II}$ ).

Координата точки минимума подсистемы  $\bar{S}_{пр}^I(h)$  разделяет отрезок изменения переменной  $[h_n; h_k]$  (где  $h_n, h_k$  - начальная и конечная точки отрезка;  $h_n=0,7; h_k=1,5$ ) на два отрезка  $[h_n; h_k^1], [h_{min}^1; h_k]$ . Если выделенная функция (не вошедшая в подсистему, например  $\bar{S}_{кл}^{II}(h)$ ) будет убывающей, то точки минимума функции цели будут находиться внутри или на

концах отрезка  $[h_n; h_{\min}^1]$ ; если функция возрастающая, то на отрезке  $[h_{\min}^1; h_k^1]$ . Таким образом, можно сузить пределы изменения переменной и приближенно определить положение точки минимума в сложных системах.

Отметим, что (рис. 2) точки минимума  $M$  и  $M_1$  находятся очень близко друг к другу. Это связано с весьма быстро убывающей функцией  $\bar{Y}_{ш2}(h)$  и весьма слабо возрастающей функцией  $\bar{S}_{кл}^I(h)$ , хотя трудности использования метода взятия производной связаны именно с этой последней функцией.

Обобщением приближенного метода оценки нахождения точки минимума является метод формирования центральной и побочной подсистем функции цели (метод декомпозиции). Если удастся сгруппировать функции-слагаемые функции цели (1) в такие подсистемы  $\bar{S}_{пр}^1$  и  $\bar{S}_{пр}^2$ , каждая из которых имеет точку минимума, то отрезок изменения переменной, содержащий точку минимума функции цели  $\bar{S}_{пр}$ , может быть еще более сужен. В нашем случае (табл. 1) убывающая функция только одна. Тогда можно применить искусственный прием группировки функций слагаемых с расщеплением убывающей функции и получить две подсистемы, каждая из которых имеет точку минимума. Функцию цели (1) можно, например, представить в следующем виде:

$$\bar{S}_{пр} = \bar{S}_{пр}^II + \bar{S}_{пр}^I, \quad (2)$$

$$\bar{S}_{пр}^II = \bar{S}_{др}^II(h) + \bar{S}_{кл}^I(h) + \bar{S}_{кл}^II(h) + \lambda_1 \bar{y}_{ш2}(h), \dots \quad (3)$$

$$\bar{S}_{пр}^I = \bar{S}_в(h) + \bar{y}_{ш1}(h) + \lambda_2 \bar{y}_{ш2}(h) + \bar{c}_0, \dots, \quad (4)$$

где  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

Предположим, что в центральной и в побочной подсистемах взяты равные числа  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ . В табл. 2 представлены значения функций (3) и (4) и их суммы (2), т.е. функции цели (1).

Покажем, что точка минимума функции цели (1) находится между точками минимумов центральной и побочной подсистем.

Таблица 2. Значения функции цели (1) и ее подсистем (3) и (4)

| Глубина заложения дрен $h$ , м                            | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,3   | 1,4   | 1,5   |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Значения центральной подсистемы (3) ( $\lambda_1 = 0,5$ ) | 32,96 | 20,46 | 17,87 | 18,35 | 18,87 | 19,35 | 19,81 | 20,32 | 20,87 |
| Значения побочной подсистемы ( $4\lambda_2 = 0,5$ )       | 28,38 | 17,07 | 15,49 | 16,82 | 18,01 | 19,16 | 20,29 | 21,0  | 22,46 |
| Значения функции цели (1)                                 | 61,34 | 37,53 | 33,36 | 35,17 | 36,88 | 38,51 | 40,10 | 41,32 | 43,33 |

На рис. 3 приведены графики центральной ( $\bar{S}_{пр}^I$ ), побочной ( $\bar{S}_{пр}^{II}$ ) и основной ( $\bar{S}_{пр}$ ) систем (функции цели). Через точки минимумов центральной и побочной подсистем проведены вертикальные линии А и В. Левее линии А график функции цели может быть только убывающей кривой, так как графики ее подсистем — убывающие кривые; на том же основании правее вертикали В график функции цели ( $\bar{S}_{пр}$ ) может быть только возрастающей кривой.

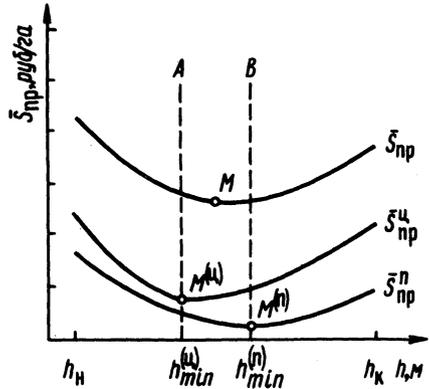


Рис. 3. Графики функции цели ( $\bar{S}_{пр}$ ), центральной ( $\bar{S}_{пр}^I$ ) и побочной ( $\bar{S}_{пр}^{II}$ ) ее подсистем.

Известно [2], что при переходе через стационарную точку функции (в данном случае точку минимума) ее производная изменяет знак: до вертикали А производная  $\bar{S}_{пр}^I$  должна иметь отрицательный, а после вертикали В — положительный знак. Поскольку производная функция равна сумме производных, то  $\bar{S}_{пр}^I = \bar{S}_{пр}^{II} + \bar{S}_{пр}^I$ . Но сумма производных  $[\bar{S}_{пр}^{II} + \bar{S}_{пр}^I]$  до

вертикали А отрицательна, поскольку графики их первообразных функций убывающие кривые, а за вертикалью В положительна, так как эти графики возрастающие. Следовательно, сумма производных, а значит, и  $\bar{S}_{\text{пр}}^1$  изменяет знак на отрезке  $[h_{\text{min}}^{\text{ч}}; h_{\text{min}}^{\text{п}}]$ , но это означает, что функция цели  $S_{\text{пр}}$  имеет координату точки минимума на отрезке  $[h_{\text{min}}^{\text{ц}}; h_{\text{min}}^{\text{п}}]$ .

Из доказанного следует, что центральная (3) и побочная (4) подсистемы функции (1) имеют точку минимума на достаточно узком отрезке времени изменения переменной в окрестности координаты  $h = 0,9$ . Более точное построение показывает, что точка минимума системы (1) находится в пределах отрезка  $[0,85; 0,90]$ .

Резюме. Любая функция цели, представленная как композиция функций слагаемых, может быть выражена (что, впрочем, зависит от выбора величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ) в виде двух или более подсистем. Если эти подсистемы имеют точки минимума (экстремума), то точка минимума функции цели находится внутри отрезка, граничными точками которых являются координаты точек минимума подсистем. С практической точки зрения взятие производной и последующее решение уравнений для подсистем бывает значительно проще, чем функции цели (без ее декомпозиции). Функции, производные которых получить затруднительно, могут временно исключаться и в этом случае из функции цели; точка минимума затем находится приближенно с учетом тенденции (убывание - возрастание) исключенной функции.

## Л и т е р а т у р а

1. Аверьянов С.Ф. Расчет понижения и подъема грунтовых вод при осушении системой каналов (дрен). - "Гидротехника и мелиорация", 1957, №12.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации, 1975, 3.
3. Минаев И.В. Расчет оптимальных параметров дренажа с учетом его влияния на прилежащие земли. - "Вестн. с.-х. науки", 1978, №2.