УДК-517.518

УСЛОВИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

***Сулакадзе Дмитрий Владимирович**, студент 2-го курса*
кафедры «Горные машины»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Акимов В.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Одним из часто используемых на практике операторов является оператор сдвига вида $D_s = \mathrm{sh}(ad_x)$, где $d_x = {}^{d}/_{dx}$ - производная. Его действие на произвольную функцию представляется равенством $D_s \cdot f(x) = \frac{f(x+a)-f(x-a)}{2}$, где точкой обозначено воздействие оператора на бесконечно дифференцируемую функцию. Аналогично вводится второй оператор $Dc = ch(ad_x)$, который действует на произвольную функцию по формуле: $D_s \cdot f(x) = \frac{f(x+a)-f(x-a)}{2}$.

Попутно отметим здесь известное свойство

$D = D_s + D_c = sh(ad_x) + ch(ad_x) = e^{ad_x}$ $D \cdot f(x) = f(x+a)$. Очевидно $D^{-1} = e^{-ad_x}$.

Построим для первых двух обратные им операторы

$$D_s^{-1} \cdot f(x) = \frac{2}{e^{ad_x} - e^{-ad_x}} \cdot f(x) = -\frac{2e^{ad_x}}{1-e^{2ad_x}} = -2e^{ad_x}(1 + e^{2ad_x} + e^{4ad_x} + $$

$$+ \cdots + e^{2nad_x} + \cdots) * f(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} f(x+(2n-1)a).$$

$$D_c^{-1} \cdot f(x) = \frac{2}{e^{ad_x} + e^{-ad_x}} \cdot f(x) = \frac{2e^{ad_x}}{1+e^{2ad_x}} \cdot f(x) =$$

$$= 2e^{ad_x}(1 - e^{2ad_x} + e^{4ad_x} - e^{6ad_x} + \cdots + (-1)^{n-1}e^{2nad_x} + \cdots) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(x+(2n-1)a)$$

Используя тождества $D_s D_s^{-1} = 1, D_c D_c^{-1} = 1$ $, DD^{-1} = 1$ можно убедиться в их справедливости.

Так как третье тождество является очевидным, то проверим первые два:

$$\frac{e^{ad_x}-e^{-ad_x}}{2}=\left[-2\sum_{n=1}^{\infty}f(x+(2n-1)a)\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-ad_x}-e^{ad_x})f(x+2na-a)=$$

$$=f(x)-f(x+2a)+f(x+2a)-f(x+4a)+f(x+4a)-(fx+6a)$$
$$+f(x+6a)+\cdots=f(\mathrm{x})-\lim_{n\to\infty}f(x+2na)=f(x).$$

$$\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(x+(2n-1)a)\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{ax}+e^{-ax})f(x+2na-a)$$

$$=f(x)+f(x+2a)-f(x+2a)-f(x+4a)+f(x+4a)+$$
$$+f(x+6a)-f(x+6a)-f(x+8a)+\cdots=f(x)-\lim_{n\to\infty}f(x+$$
$$2na)=f(x).$$

Таким образом, мы видим, что должно выполняться условие $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, которое следует учитывать при разложении функций в ряды.