

УДК 621.391.25

## РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ МОБИЛЬНОЙ МАШИНЫ В СРЕДЕ MATHCAD

Савельев И.П.

научный руководитель - Напрасников В.В., к.т.н., доцент

В качестве математических моделей широкого класса технических задач используются дифференциальные уравнения с начальными и граничными условиями и их системы. Примерами рассматриваемых процессов являются: движение тела, брошенного вертикально вверх; колебания математического маятника; изгиб балки под действием силы; колебания в колебательном контуре и многие другие динамические задачи. В качестве методов их решения, при задании начальных условий, широко используются метод Эйлера и метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

В математической системе Mathcad задачу Коши с одним или несколькими дифференциальными уравнениями можно эффективно решать, используя метод Rkadapt – метод Рунге-Кутты с переменным шагом.

Известные методы исследования колебаний мобильных машин, в том числе и с пневмогидравлической подвеской, предусматривают изучение обобщенной (как правило, механической) динамической модели. Причём непосредственно упругодемпфирующие элементы (пневмогидроцилиндры) не рассматриваются как самостоятельная динамическая подсистема, а их характеристики и свойства рабочей среды задаются в виде упрощенных кусочно-линейных зависимостей.

При анализе плавности хода применяют различные расчетные схемы с учетом цели исследований и диапазона рассматриваемых частот. Схема включает в себя инерционные элементы массы, соединенные упругими элементами и элементами, обеспечивающими рассеяние энергии при колебаниях масс. Массы делят на две основные группы: подрессоренные и неподрессоренные. Для более сложных задач отдельно рассматривается вторичное подрессоривание (кабина, сиденье).

Сложность математической модели будет зависеть от принятых допущений. Например, можно предположить, что характеристики и параметры подвески и шин правых и левых колес одинаковы, а продольные колебания автомобиля происходят практически независимо от поперечных.

Для составления уравнений движения (колебаний) обычно пользуются уравнениями Лагранжа, так как они позволяют применить обобщенный подход к моделированию:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_K}{\partial \dot{\varepsilon}_i} - \frac{\partial W_K}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial W_p}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_i} = Q_i,$$

где  $W_K$  и  $W_p$ - кинетическая и потенциальная энергии системы;  $\varphi$  - диссипативная функция (функция рассеяния энергии), характеризующая потери энергии под действием сил сопротивлений;  $\varepsilon_i$ - обобщенная координата;  $Q_i$  - обобщенная сила, соответствующая  $i$ - й обобщенной координате, причем:

$$W_K = \frac{mv^2}{2}; W_p = \frac{cx^2}{2}; \varphi = \frac{k_\alpha x'^2}{2},$$

где  $v$  - скорость движения некоторой массы  $m$ ;  $x'$  и  $x$  - относительная скорость и перемещение (деформация);  $c$  - коэффициент жесткости;  $k_\alpha$  - коэффициент демпфирования.

Существенным предположением в большинстве расчетов является то, что характеристики всех элементов линейны (или линеаризованы), а коэффициенты жесткости и демпфирования постоянны.

При моделировании пневмогидравлической подвески такое допущение не всегда оправдано, так как упругодемпфирующие свойства подвески определяются достаточно сложными внутренними процессами, происходящими при сжатии газа и дросселировании рабочей жидкости через калиброванные отверстия (иногда переменного сечения), что приводит к достаточно сложной функциональной зависимости коэффициентов жесткости и демпфирования не только от конструктивных параметров, но и от характера протекания колебательного процесса.

Для того чтобы адекватно описать колебательную систему с пневмогидравлической подвеской, целесообразно применить второй способ описания колебаний - использование уравнений динамики. Этот способ основан на балансе действующих на объект сил и позволяет более полно учитывать внутренние процессы в элементах подвески.

Рассмотрев расчётную схему для автомобиля при движении его по дороге с заданным профилем с учётом поворота корпуса относительно линии горизонта, приходим к выводу, что решение задачи сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка системы уравнений:

$$\begin{cases} (M_2 + M_1)\ddot{q}_1 + M_1 l_3 \ddot{q}_2 + M_1 \ddot{q}_3 = b_1 \\ M_1 l_3 \ddot{q}_1 + (I + M_1 l_3^2)\ddot{q}_2 + M_1 l_3 \ddot{q}_3 = b_2 \\ M_1 \ddot{q}_1 + M_1 l_3 \ddot{q}_2 + M_1 \ddot{q}_3 = b_3 \end{cases}$$

Где  $b_1 = -K1(z_1 + z_3 L1 - E1(t)) + 1 * (-K2)(z_1 - z_3 L2 - E2(t)) - C1(z_2 + z_4 L1 - E1(t)) - C2(z_2 - z_4 L2 - dE2(t));$   $b_2 = -K1L1(z_1 + z_3 L1 - E1(t)) + (K2L3)(z_1 - z_3 L3 - E2(t)) - C1L1(z_2 + z_4 L1 - dE1(t)) + C2L2(z_2 - z_4 L2 - dE2(t));$   $b_3 = -K3z_5 + C3z_6.$

Рассмотрим реализацию этого алгоритма в среде Mathcad на следующих рисунках:

```

K1 := 2   K2 := 2   K3 := 0   C1 := 0   C2 := 0   C3 := 0

E1(t) := sin(t)   dE1(t) := d/dt E(t)
L1 := 1   L2 := 1   L3 := 0   I := 1
M1 := 1
M2 := 1

det0 := | (M2 + M1   M1·L3   M1 )
          (M1·L3   I + M1·L3·L3 M1·L3 )
          (M1       M1·L3   M1 ) |
b1 := 3   b2 := 2   b3 := 1

det1 := | (b1   M1·L3   M1 )
          (b2 I + M1·L3·L3 M1·L3 )
          (b3   M1·L3   M1 ) |
ORIGIN := 1

E2(t) := sin(t)   dE2(t) := d/dt E(t)

det2 := | (M2 + M1 b1   M1 )
          (M1·L3   b2 M1·L3 )
          (M1       b3   M1 ) |
det3 := | (M2 + M1   M1·L3   b1 )
          (M1·L3   I + M1·L3·L3 b2 )
          (M1       M1·L3   b3 ) |

```

Рис.1. Начало программы, инициализация переменных.

```

tbegin := 0
tend := 50
h := 0.2

f(t,z) := | ( -K1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + 1 · -K2·(z1 - z3·L2 - E2(t)) - C1·(z2 + z4·L1 - E1(t)) - C2·(z2 - z4·L2 - dE2(t))   M1·L3   M1
             ( -K1·L1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + K2·L3·(z1 - z3·L3 - E2(t)) - C1·L1·(z2 + z4·L1 - dE1(t)) + C2·L2·(z2 - z4·L2 - dE2(t)) I + M1·L3·L3 M1·L3
             -K3·z5 + C3·z6   M1·L3   M1 )
             det0
             z4
             ( M2 + M1   -K1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + 1 · -K2·(z1 - z3·L2 - E2(t)) - C1·(z2 + z4·L1 - E1(t)) - C2·(z2 - z4·L2 - dE2(t))   M1
             M1·L3   -K1·L1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + K2·L3·(z1 - z3·L3 - E2(t)) - C1·L1·(z2 + z4·L1 - dE1(t)) + C2·L2·(z2 - z4·L2 - dE2(t)) M1·L3
             M1   -K3·z5 + C3·z6   M1 )
             det0
             z6
             ( M2 + M1   M1·L3   -K1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + 1 · -K2·(z1 - z3·L2 - E2(t)) - C1·(z2 + z4·L1 - E1(t)) - C2·(z2 - z4·L2 - dE2(t))
             M1·L3   I + M1·L3·L3   -K1·L1·(z1 + z3·L1 - E1(t)) + K2·L3·(z1 - z3·L3 - E2(t)) - C1·L1·(z2 + z4·L1 - dE1(t)) + C2·L2·(z2 - z4·L2 - dE2(t))
             M1   M1·L3   -K3·z5 + C3·z6 )
             det0

```

Рис.2. Запись матрицы решения системы уравнений.

$$N := \frac{tend - tbegin}{h}$$

$$S := \text{Rkadapt}(zbegin, tbegin, tend, N, f)$$

$$zbegin := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0.2	$5.28 \cdot 10^{-3}$	0.079	$2.63 \cdot 10^{-3}$	0.039
3	0.4	0.041	0.299	0.02	0.145
4	0.6	0.131	0.617	0.063	0.289
5	0.8	0.29	0.968	0.135	0.425
6	1	0.516	1.275	0.23	0.507
7	1.2	0.792	1.466	0.331	0.49
8	1.4	1.091	1.483	0.417	0.347
9	1.6	1.372	1.292	0.461	0.074
10	1.8	1.593	0.893	0.44	-0.308
11	2	1.717	0.317	0.334	-0.754
12	2.2	1.712	-0.375	0.138	-1.197
13	2.4	1.565	-1.1	-0.14	-1.562
14	2.6	1.276	-1.767	-0.476	-1.774
15	2.8	0.867	-2.29	-0.835	-1.773
16	3	0.374	-2.6	-1.169	...

Рис. 3. Таблица результатов.

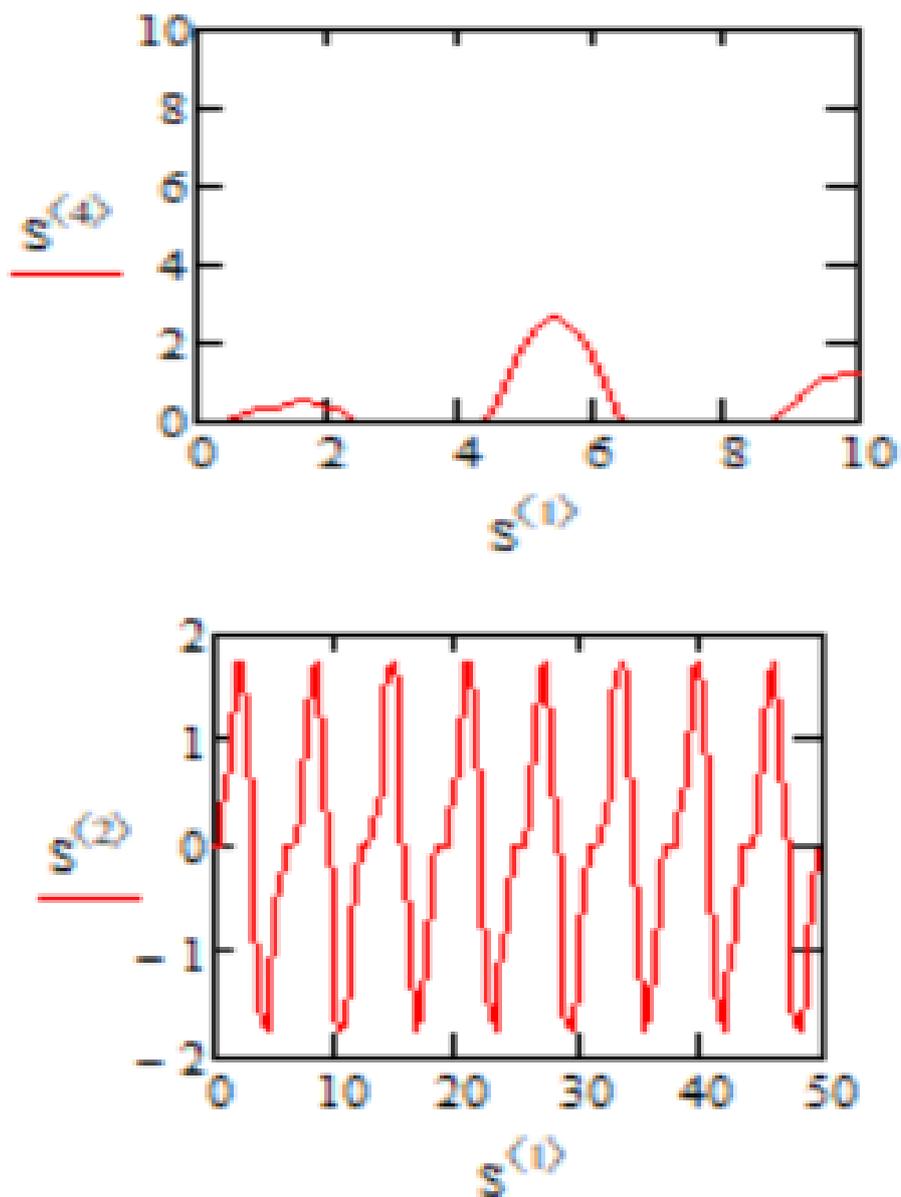


Рис. 4. Графическое представление результатов.

#### Литература

1. Жилевич, М.И. К расчёту колебаний мобильной машины с учетом внутренних процессов в пневмогидравлической подвеске / М.И. Жилевич. – Мн.: БНТУ, 2003 – 46,47с.
2. Луцко, Н.Я. Решение задач колебаний в MathCad / Н.Я. Луцко, О.Н. Кавальчук. – Мн.: БНТУ, 2020 – 512с.
3. Напрасников, В.В. Компьютерное моделирование прикладных задач / В.В. Напрасников, И. Л. Ковалёва. – Мн.: БНТУ, 2022 – 208с.