УДК 532.517.4

Э.П.Коваленко, канд. техн. наук (ЦНИИКИВР)

К ПОСТРОЕНИЮ ПЛАНОВ ТЕЧЕНИЯ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА

Дифференциальные уравнения, описывающие неустановившееся движение воды, представляют собой гиперболические уравнения с частными производными, непосредственное интегрирование которых не представляется возможным в настоящее время. Поэтому решение таких задач производится приближенными методами.

В настоящей статье рассматривается один из возможных методов решения задачи построения планов течений плавно изменяющегося неустановившегося потока, позволяющих избежать ряд трудностей, связанных с наличием единственности и устойчивости решения.

Приближенная система дифференциальных уравнений двумерного открытого неустановившегося движения имеет следующий вид [1]

$$\frac{1}{g}\frac{du_x}{dt} = i_{0x} - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{u\,u_x}{K_H^2};$$

$$\frac{1}{g}\frac{du_y}{dt} = i_{0y} - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{u\,u_y}{K_H^2}. \qquad (1)$$

Уравнение неразрывности приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hu_y) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \qquad (2)$$

где u – средняя скорость потока на вертикали; H – глубина на вертикали; i_{0x} – уклон вдоль оси x, направленный по направлению вектора скорости потока; i_{0y} – уклон по оси y, перпендикулярный в плане оси x; t – время; q – ускорение силы тяжести; K_H – параметр, определяющий среднюю на вертикали проводимость русла [1].

Предлагается последовательность решения рассматриваемой задачи в общем случае:

1. Решаем одномерную задачу, в результате находим средние отметки поверхности жидкости в поперечных сечениях в заданные моменты времени.

2. Определяем значения $K_н$, предполагая, что в поперечных сечениях отсутствуют поперечные уклоны.

3. Распределение глубин и скоростей в начальном и конечном створах задается или определяется при допущении, что отсутствуют поперечные составляющие скоростей.

4. Находим распределение глубин и средних на вертикали скоростей в последующем створе в заданный момент времени, зная значения средних на вертикали скоростей и глубин в предыдущий момент времени.

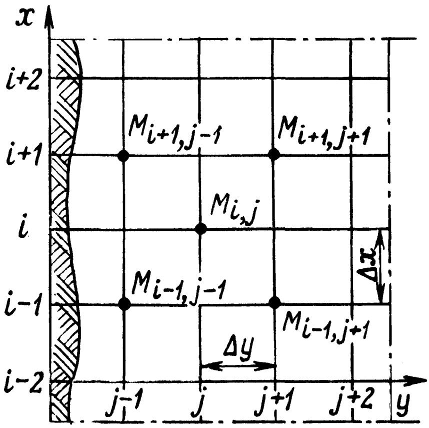

Рис. 1. Расчетная схема для момента времени t_l.

5. Если полученные значения глубин не совпадают достаточно точно с их значениями, принятыми при определении $K_н$, расчет повторяется, для чего предварительно находятся значения $K_н$, соответствующие поперечному сечению, профиль которого определен в результате предыдущего приближения [1].

Позднее такая последовательность решения рассматриваемой задачи была рекомендована в работе [2].

Допускалось (рис. 1), что

$$u_{xi,j,l} = \frac{u_{xi+1,j,l} + u_{xi-1,j,l}}{2} ;$$

$$u_{yi,jl} = \frac{u_{yi+1,j,l} + u_{yi-1,j,l}}{2} ; \qquad (3)$$

$$H_{i,j,l} = \frac{H_{i+1,j,l} + H_{i-1,j,l}}{2} ;$$

$$u_{xi,jl} = \frac{u_{xi,j,l+1} + u_{xi,jl-1}}{2} ;$$

$$u_{yi,j,l} = \frac{u_{yi,j,l+1} + u_{yi,j,l-1}}{2} ;$$

$$H_{i,j,l} = \frac{H_{i,j,l+1} + H_{i,j,l-1}}{2};$$

где i, j, l – индексы последовательных шагов по оси x, y и по времени t.

В этом случае в конечно-разностном виде система уравнений (1) – (2) приводится к виду

$$a_{xi+1,j,l} u_{xi+1,j,l} + a_{xi+1,j+1,l} u_{xi+1,j+1,l} +$$

$$+ a_{xi+1,j\ 1,l} \times u_{xi+1,j\ 1,l} + a_{Hi+1,j,e} H_{i+1,j,e} +$$

$$+ q_{xi+1,j,e} = 0;$$

$$a_{yi+1,j+1,l} \cdot u_{yi+1,j+1,l} + a_{yi+1,j-1,l} u_{yi+1,j-1,l} +$$

$$+ a_{yi+1,j,l} u_{yi+1,j,l} + a_{H1-H,j,+1,l} H_{i+1,j+1,l} +$$

$$+ a_{Hi+1,j-1,l} H_{i+1,j-1,l} + q_{yi+1,j,l} = 0;$$

$$a_{xHi+1,jl} H_{i+1j,l} + a_{Hxi+1,j,l} u_{xi+1,j,l} + a_{yH+1,j+1,l} \times$$

$$\times H_{i+1,j+1,l} + a_{y,i+1,j-1,l} H_{i+1,j-1,l} +$$

$$+ a_{Hyi+1,j+1,l} u_{yi+1,j+1,l} + a_{Hyi+1,j-1,l} u_{yi+1,j+1l} +$$

$$+ q_{uHi+1,j,l} = 0,$$

где

$$a_{xi+1,jl} = \frac{u_{xijl}}{g(x_{i+1\ j,l} - x_{i-1,j,l})} + \frac{u_{i,j,l}}{2K^2_{Hi,j,l}};$$

$$a_{xi+1,j+1,l} = \frac{u_{yi,j,l}}{2g(y_{ij+1,l} - y_{i,j-1,l})};$$

$$a_{xi+1,j-1,l} = -\frac{u_{yi,j,l}}{2g(y_{i,j+1,l} - y_{i,j-1l})} ;$$

$$a_{H,i-H,j,l} = \frac{1}{x_{i+1,j,l} - x_{i-1,j,l}} ;$$

$$q_{xi+1,j,l} = \frac{u_{xi-1,j,l}\, u_{xi,j,l}}{g(x_{i+1,j,l} - x_{i-1,j,l}} - \frac{2u_{xi,j,l} - 2u_{xi,j,l-1}}{g(t_{l+1} - t_{l-1})} -$$

$$- i_{oxi,j,l} - \frac{H_{i+1\,j,l}}{x_{i+1\,j,l} - x_{i-1,j,l}} +$$

$$+ \frac{u_{yi,j,l}}{2g} \quad \frac{u_{yi-1,j-1,l} - u_{xi-1,j-1,l}}{y_{i,j+1,l} - y_{i,j-1,l}} +$$

$$+ \frac{u_{ij,l}}{2K^2_{H\,i,j,l}} \times u_{xi-1,j,l}$$

$$a_{yi+1,j+1,l} = \frac{u_{yi,j,l}}{2g(y_{i,j+1,l} - y_{i,j-1,l})} ;$$

. . . .

$$q_{yi+1,j,l} = \frac{H_{i-1,j+1,l} - H_{i-1,j,-1,l}}{2(y_{i,j+1,l} - y_{i,j-1,l})} - i_{yi,j,l} +$$

$$+ \frac{u_{yi,j,l}}{2g} \times \frac{u_{gi-1,j+1,l} - u_{yi-1,j-1,l}}{y_{i,j+1,l} - y_{i,j-1,l}} -$$

$$- \frac{u_{xi,j,l}}{g} \quad \frac{u_{yi-1,j,l}}{x_{i+1,j,l} - x_{i-1,j,l}} + u_{i,j,l} \times \frac{u_{yi-1,j,l}}{2K^2_{Hi,j,l}} +$$

$$+ \frac{2u_{yi,j,l} - 2u_{yi,j,l-1}}{g(t_{l+1} - t_{l-1})} ;$$

Если в уравнении неразрывности системы уравнений (4) пренебречь изменением отметок поверхности воды в рассматриваемом поперечном сечении, то

$$\frac{H_{i,j,l+1} - H_{i,j,l-1}}{t_{l+1} - t_{l-1}} = \frac{H_{i,l+1} - H_{i,l-1}}{t_{l+1} - t_{l-1}}, \qquad (5)$$

где $H_{i,l+1}$ и $H_{i,l-1}$ – средняя глубина потока в створе i, соответственно, в момент времени $l + 1$ и $l - 1$.

Тогда правая часть соотношения (5) находится из решения одномерной задачи и уравнения неразрывности можно привести к виду

$$a_{Hxi+1,j,l}u_{xi+1,j,l}+a_{Hxi+1,j-1,l}u_{xi+1,j-1,l}+a_{Hyi+1,j,l}\,x$$

$$x\,u_{yi+1,j,l}+a_{Hyi+1,j-1,l}u_{yi+1,j-1,l}+q_{uHi+1,j,l} = 0. \qquad (6)$$

Учитывая это, система уравнений (4) имеет на одно уравнение меньше, чем число неизвестных. Замкнуть систему можно, принимая допущения, что средняя глубина потока, определенная при решении задачи как одномерная, равна средней глубине потока при решении двумерной задачи, т.е.

$$H_{cpl}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(H_{i+1,j,l}+H_{i+1,j-1,l})(y_{i+1,j,l}-y_{i+1,j-1,l})}{2\sum\limits_{j=0}^{n} y_{i=1,j,l} - y_{i+1,j-1,l}} \qquad (7)$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}(H_{i+1,j,l}+H_{i+1,j-1,l})\,a_{3ni+1,j,l} = q_{3n-1,i+1,j,l},$$

где

$$a_{3n-1,i+1,j,l} = \frac{y_{i+1,j,l}-y_{i+1,j-1,l}}{2};\quad q_{3n-1,i+1,j,l}=H_{cp}B_{cp}.$$

Решив предварительно задачу как одномерную, одним из существующих методов можно определить значение

$$I_{i,j,l} = \frac{1}{g}\frac{du}{dt} + i_o - \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (8)$$

где

$$I_{i,j,l} = \frac{u^2_{i,j,l}}{K^2_{i,j,l}} \, ; \qquad u \text{ — средняя скорость.}$$

Значение $I_{i,j,l}$, считаем постоянным для каждой вертикали заданного расчетного створа.

Тогда, пренебрегая изменением отметок поверхности воды в поперечном створе $i+1$, можно найти распределение глубин и продольных скоростей в этом же створе из (3), если их распределение в створе $i-1$ известно в заданный момент времени.

Причем значение $u_{xi,j,l}$ в данном случае приближенно находим из соотношения

$$u_{xi,j,l} = \sqrt{K^2_{Hi,j,l} \, I_{i,j,l}} \, . \tag{9}$$

Зная распределение продольных скоростей и глубин в створе $i-1$ и $i+1$, из уравнения неразрывности (2), записанного в конечном разностном виде, находим значение $u_{yi,j,l}$.

Приняв полученные значения $u_{xi,j,l}$, $u_{yi,j,l}$ и $H_{i,j,l}$ в первом приближении за исходные для определения элементов a и q, систему уравнений (4), (5), (7) сводим к системе линейных уравнений.

Определитель полученной системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases}
a_{11}\,0_{12}\,0_{13}\,a_{14}\,0_{15}\,a_{16}\,a_{17}\,0_{18}\,0_{19}\ldots 0_{1,3n}\ldots 0_{1,3n+3};\\
0_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,0_{24}\,a_{25}\,0_{26}\,0_{27}\,a_{28}\,a_{29}\ldots 0_{2,3n+3};\\
a_{31}\,a_{32}\,0_{33}\,a_{34}\,a_{35}\,0_{36}\,0_{37}\,0_{38}\,0_{39}\ldots 0_{3,3n+3};\\
0_{41}\,0_{42}\,0_{43}\,a_{44}\,0_{45}\,0_{46}\,a_{47}\,0_{48}\,a_{49}\,a_{4,10}\ldots 0_{4,3n+3};\\
0_{51}\,0_{52}\,0_{53}\,0_{54}\,a_{55}\,a_{56}\,0_{57}\,a_{58}\,0_{59}\,0_{5,10}\ldots 0_{5,3n+3};\\
0_{61}\,0_{62}\,0_{63}\,a_{64}\,a_{65}\,0_{66}\,a_{67}\,a_{68}\,0_{69}\,0_{6,10}\ldots 0_{6,3n+3};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}$$

$$\begin{cases} o_{3n-1,1}\, o_{3n-1,2}\, a_{3n-1,3}\, o_{3n-1,4}\, o_{3n-1,5}\, a_{3n-1,6} \ldots \\ a_{3n-1,3n+3}\ . \end{cases} \tag{10}$$

Если $u_{yi,j,l} \neq 0$ и $u_{xi,j,l} \neq 0$, то каждая последующая строка матрицы D, соответствующая динамическим уравнениям (1), содержит элемент, отличающийся от нуля, который отсутствует в предыдущих строках.

Так, вторая строка имеет элементы $a_{2,8}$ и $a_{2,9}$, которые отсутствуют в первой и которые, учитывая (4), не равны нулю. Четвертая строка содержит элемент $a_{4,10}$, который не имеется в двух первых строках и не равен нулю, и т.д. Необходимо отметить также, что в каждой такой i-ой строке нет первых $i-1$ элементов.

Строки, соответствующие уравнениям неразрывности (2), не имеют ряда элементов, отличающихся от нуля, которые содержатся в соответствующих им динамических уравнениях. Каждое последующее уравнение имеет элементы, не равные нулю, не содержащиеся в предыдущих строках или в их линейных комбинациях. В предыдущих строках также есть такие же элементы. не имеющиеся в последующих строчках.

Если строка $C_K = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ является линейной комбинацией строк $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B = (в_1, в_2, \ldots, в_n)$ с коэффициентами α и β, для этого необходимо, чтобы [3]

$$\alpha a_i + \beta в_i = c_{Ki}, \quad (i = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{11}$$

Но, учитывая вышесказанное для всех строк матрицы D, образованных динамическими уравнениями и уравнениями неразрывности, всегда имеются элементы C_{Ki}, для которых не соблюдается условие (11). Так, строка $k = 4$ имеет элемент $a_{4,10} \neq 0$, который не может быть линейной комбинацией элементов $a_{1,10} = a_{2,10} = a_{3,10} = 0$. Аналогично строка $k = 5$ не является линейной комбинацией строк $k = 1, 2, 3, 4$, потому что она содержит элементы $a_{5,11} \neq 0$ и $a_{5,12} \neq 0$, в то время как соответствующие элементы строк $k = 1, 2, 3, 4$, а именно $a_{1,11} = a_{2,11} = a_{3,11} = a_{4,11} = 0$ и $a_{1,12} = a_{2,12} = a_{3,12} = a_{4,12} = 0$.

Для строки $k = 6$ строка $k = 5$ исключается из линейной комбинации, ибо она содержит элементы $a_{5,11} \neq 0$ и

$a_{5,12} \neq 0$, не содержащиеся в строках $k = 1, 2, 3, 4, 6$. Строка $k = 4$ исключается также из линейной комбинации, как содержащая элемент $a_{4,10} \neq 0$, который отсутствует в элементах строк $k = 1,2,3,5$ и 6. Действительно, если строка 4 входит в линейную комбинацию, одно из условий (11) с элементом $a_{4,10} \neq 0$ не может быть удовлетворено.

Учитывая, что строки $k = 5$ и 4 исключаются из линейной комбинации, аналогично исключается строка $k = 2$ (элемент $a_{2,3} \neq 0$ не может быть линейной комбинацией элемента $a_{1,9} = 0$ или $a_{3,9} = 0$ и элемента $a_{2,9} \neq 0$).

Оставшиеся строки $k = 1$ и 3 не могут составить такую линейную комбинацию, которая удовлетворила бы условия (11). Так, элемент $a_{6,8} \neq 0$ не может быть линейной комбинацией элементов $a_{1,8} = a_{3,8} = 0$.

Аналогичные рассуждения справедливы для строк $k = 7, 8, 9$, $k = 10, 11, 12$ и т.д.

Докажем, что строка $k = 3n - 2$ не является линейной комбинацией строк $k = 1, 2, 3 \ldots 3n - 3$.

Как следует из рассмотрения матрицы D, из возможной линейной комбинации необходимо исключить строку $k = 2$ (элементы $a_{3n-2,3} = a_{3n-3,3} = a_{3n-4,3} = \ldots = a_{3,3} = a_{1,3} = 0$ за исключением элемента $a_{2,3}$). В этом случае нельзя удовлетворить условие (11). Учитывая это, необходимо из линейных комбинаций исключить строку $k = 3$ по аналогичной причине. Тогда для строки $k = 1$ имеем $a_{11} \neq 0$, в то время как $a_{4,1} = a_{5,1} = a_{6,1} = \ldots = a_{3n-2,1} = 0$. Тогда при отсутствии элемента $a_{3,1}$ в линейных комбинациях нельзя обеспечить одно из условий (11).

Исключив из линейных комбинаций строки $k = 1, 2$ и 3, аналогично доказываем, что $k = 4, 5$ и 6 должны быть также исключены (и т. д. до $3n - 3$ строки включительно).

Следовательно, $3n - 2$ строка не может быть представлена линейной комбинацией предыдущих строк.

Отсюда, первые $3n - 2$ строк включительно являются линейно независимыми.

Однако $(3n - 1)$-ая строка, соответствующая уравнению (7), в общем случае может быть линейной комбинацией предыдущих строк. Но, как это следует из (4), все элементы a_{3n-1} являются функциями $\Delta y = y_{j+1} + y_{j-1}$, в то время как соответствующие им элементы функции $y_{i+1} - y_{j-1}$ и $x_{i+1} - x_{i-1}$.

Пусть для столбца $3n - 1$ справедливо соотношение (11), где $C_к = (c_1, c_2 \ldots c_n)$ является строкой $3n - 1$. Тогда, изменив местоположение линии j (см. рис. 1) в расчетной схеме и оставив без изменения остальные линии j, изменим значения элементов только в двух столбцах матрицы D, оставив без изменения остальные.

Если для i -ых элементов выполнялось соотношение (11), то при изменении значения Δy имеем

$$\alpha a_i f_i\left(\frac{\Delta y_o}{\Delta y}\right) + \beta b_i f_2\left(\frac{\Delta y_o}{\Delta y}\right) \neq C_{ki}\frac{\Delta y}{\Delta y_o}, \tag{12}$$

где Δy_o – первоначальная ширина расчетной полосы; Δy – измененная ширина той же полосы, в то время когда для двух элементов продолжает оставаться справедливым (11).

Таким образом, изменив значение Δy путем изменения положения линии j, можно добиться, чтобы и строка $3n - 1$ была линейно независимой при условии, что $u_{yi,j,l} \neq 0$ и $u_{xi,j,l} \neq 0$.

Проанализируем взаимосвязь элементов, образующих столбцы матрицы D.

Каждый предыдуший столбец матрицы D имеет элемент, отличный от нуля, который не содержится в последующем столбце или в каждом последующем столбце содержится элемент, отличный от нуля, отсутствующий в линейной комбинации предыдущих столбцов.

Если один из столбцов A_j является линейной комбинацией произвольного столбца B и линейной комбинацией предыдущих столбцов C, то

$$A_j = \lambda B + \mu C \quad [3], \tag{13}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

где λ, μ – коэффициенты линейной комбинации.

Тогда равенство (13) означает, что выполнено n соотношений

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (14)$$

между элементами этих столбцов.

В силу вышесказанного имеется по крайней мере одно значение i, для которого условие (14) не выполняется.

Например, столбец $j = 4$ нельзя представить линейной комбинацией столбцов $j = 1, 2, 3$, так как $a_{4,4} \neq 0$ и $a_{6,4} \neq 0$, в то время как $a_{4,1}=a_{4,2}=a_{4,3} = 0$ и $a_{6,1}=a_{6,2} = a_{6,3} = 0$.

Аналогично столбец $j = 5$ не является линейной комбинацией столбцов $j = 1, 2, 3, 4$ из-за того, что $a_{5,5} \neq 0$, а $a_{5,1}=a_{5,2}=a_{5,3}=a_{5,4} = 0$, т.е. в этих случаях не выполняется одно из условий (14).

Столбец $j = 6$ в своей линейной комбинации не может содержать столбца $j = 4$, потому что $a_{4,4} \neq 0$, в то время как $a_{4,1}=a_{4,2}=a_{4,3} = a_{4,6} = 0$. Если из данной линейной комбинаций исключен столбец $j = 4$, по той же причине ($a_{6,1} = a_{6,2}=a_{6,3} = a_{6,6} = 0$ и $a_{6,5} \neq 0$ при отсутствии в комбинации элемента $a_{6,4} \neq 0$) исключается из названной линейной комбинации и столбец $j = 5$. В этом случае элемент $a_{5,6} \neq 0$ столбца 6 не может быть линейной комбинацией элементов остальных столбцов $j = 1, 2, 3$ (эти элементы $a_{5,1} = a_{5,2} = a_{5,3} = 0$).

Аналогичные рассуждения справедливы для столбцов $j = 7$, 8 и 9, а также 10, 11, 12 и т.д.

Таким образом, столбцы матрицы D являются линейно независимыми.

Следовательно, при условии, что $u_{xi,j,l} \neq 0$ и $u_{yi,j,l} \neq 0$, подбором значений Δy (или Δx) можно получить систему линейных уравнений, имеющую матрицу D, в которой все столбцы и строки являются линейно независимыми.

Матрица D (10) является матрицей системы рассматриваемых алгебраических уравнений (4), (7).

Согласно следствию 1 теоремы о базисном миноре, определитель D тогда и только тогда равен нулю, когда его столбцы линейно зависимы [3] . В рассматриваемом случае столбцы линейно независимы, поэтому D не равен нулю.

Тогда, в соответствии с теоремой Крамера, если определитель рассматриваемой системы отличен от нуля, система совместна и имеет единственное решение. Решение систем,аналогичных рассматриваемой, приводится в работе [4] .

Таким образом, если в момент времени t известен план распределения средних на вертикали скоростей и глубин, а также их значения в створе $i - 1$ в момент времени $t + \Delta t$, решая рассматриваемую систему линейных алгебраических уравнений, можно методом постепенного приближения найти распределение средних на вертикали скоростей и глубин в створе $i + 1$, затем $i + 3$ и т.д.

Необходимо отметить, что допущение о линеаризации переменных по расстоянию является приемлемым лишь в случае плавного изменения этих переменных по длине. У стенок, дна и при резком изменении глубин происходят обычно резкие изменения градиентов таких переменных. Этот фактор необходимо учитывать, например, путем введения специальных поправочных коэффициентов.

Предлагаемый метод позволяет производить решение рассмотренной задачи, гарантируя его единственность и устойчивость.

Литература

1. Коваленко Э.П. Исследование движения воды в открытых руслах. - Минск, 1963. 2. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков. - М., 1978. 3. Карпелевич Ф.И., Садовский А.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М., 1963. 4. Connor I.I., Brebbia C.A. Finite Element Technigues for Fluid Flow - London - Baston,1976.

УДК 626.824

А.А.Осипович, инж. Ф.Д.Шнипов, инж. (ЦНИИКИВР)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ В КАНАЛАХ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

При проектировании мелиоративных систем гидравлические расчеты параметров каналов выполняются по зависимостям для