Наиболее интенсивного осушения в этом сложном естественном комплексе в условиях Полесья требуют торфяно-глеевые почвы. В глееватых почвах легкого механического состава, расположенных в виде небольших островков среди осушенных почв более высокой степени заболоченности, среднедекадные УГВ даже во время паводков не поднимались выше 90 см. Это дает основание полагать, что в таких условиях при проведении осушения можно ограничиться мероприятиями по организации поверхностного стока.

УДК 626.862

И.В. Минаев

ПРИВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЦЕЛИ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДРЕНАЖА

Функция цели, для расчета оптимальных параметров дренажа формируемая раскрытием формулы приведенных затрат и ущербов, обычно состоит из суммы функций-слагаемых, выражающих вариантные затраты по отдельным элементам физической системы, параметры которой оптимизируются. Такую функцию цели $(F(z_m))$ можно представить в виде

$$F(z_m) = \frac{A_1 f_1(z_1)}{A_2 f_2(z_2)} + A_3 f_3(z_3) + \frac{A_4 f_4(z)}{f_o(z_o)} +$$

$$+ A_5 f_5(z_5) + \ldots, \qquad (1)$$

где $A_i \in D$; $z_j \geqslant 0$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ – многомерные векторы,координаты которых являются параметрами физической системы; $f_o(z_o)$ – постоянная величина.

Если функция цели записывается для одного параметра (z), решение задачи сводится к взятию производной с приравниванием последней к нулю $\left(\frac{dF(z)}{dz} = 0\right)$. Полученное уравнение позволяет найти оптимальное значение параметра $(z_{опт})$. Если же функция цели зависит от нескольких переменных (варьирующих параметров), можно применить градиентные методы, для чего необходимо взять частные производные по каждой переменной .

Рассмотрим функцию (1), выражающую удельные (на 1 га) приведенные затраты и ущербы от двух наиболее существенных переменных – В и h (расстояние между дренами и глубина их заложения), для системы "дрены-коллектор" (рис. 1). Система "дрены-коллектор" является "блоком" или самостоятельной подсистемой, присутствующей в каждой более развитой системе, и состоит из коллектора и присоединенных к нему дрен.

Физические переменные удобно представить в виде относительных переменных, используя формулы линейного преобразования:

$$u_i = \frac{N(h_i - h_{min}) + \Delta h}{10\,\Delta h} \quad ; \quad v_i = \frac{N(B_i - B_{min}) + \Delta B}{10\,\Delta B} \quad , \qquad (2)$$

где N – коэффициент укрупнения шага переменной (целое число); h_i, B_i – текущие физические координаты; u, v – текущие относительные координаты ($u \in [0{,}1;\ 0{,}9]$; $v \in [0{,}1;\ 0{,}9]$); $\Delta h, \Delta B$ – шаг изменения соответствующей переменной.

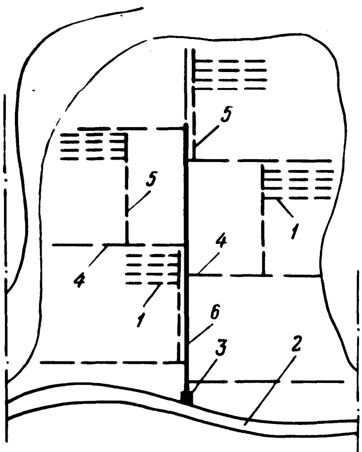

Рис. 1. Дренажная система: 1 – дрены; 2 – река-водоприемник; 3 – оголовок коллектора; 4 – коллектор I порядка; 5 – коллектор II порядка; 6 – магистральный канал.

Тогда функцию цели, сформированную раскрытием формулы приведенных затрат [1] и ущербов ($S_i = E_н k_i + C_i + Y_i \rightarrow \min$, Y_i – ущерб от недобора урожая), можно записать в виде

$$\bar{S}_{пр}(u, v) = \frac{S_{др}(u)}{F_{др}(v)} + \frac{S^{I}_{кл}(u)}{F_{кл}} + \frac{S^{II}_{кл}(u,v)}{F_{кл}} + \frac{Y(u,v)}{F_{кл}} + C_o \rightarrow \min, \qquad (3)$$

где $S_{др}(u)$, $S^{I}_{кл}(u)$ – функции, выражающие приведенные затраты (соответственно) по устройству одной дрены и коллектору; $F_{др}(v)$ – площадь (га), обслуживаемая одной дреной; $S^{II}_{кл}(u,v)$ – функция затрат по трубкам коллектора переменного диаметра по его длине; $F_{кл}$ – площадь (га), обслуживаемая коллектором, стабильная при постоянной длине дрен; $Y(u,v)$ – функция ущерба от недобора урожая в связи с неоптимальным водным режимом почвы при варьировании параметров $u(h)$, $v(B)$; C_o – постоянная величина затрат.

Хотя первая функция-слагаемое зависит от двух переменных, каждая из функций-сомножителей обусловливается значением одной переменной; функция $S_{др}(u)$ экспериментальная (расчетная) и обычно линейна относительно переменной u (h).

Функция $F_{др}(v)$ линейная и выражает размер площади (га) при постоянной длине дрен ($l_{др}$, м):

$$F_{др}(v(B)) = l_{др} B\, 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\, l_{др}(2v + 1), \qquad (4)$$

v – вычисляется по (2);

$$F_{кл} = l_{др} \cdot L_к \cdot 10^{-4}, \qquad (5)$$

$L_к$ – постоянная длина коллектора (м).

Т а б л. 1. Приведенные затраты (руб./га) (числитель) и ущербы (руб./га) по трубкам коллектора (знаменатель)

h	u \ B, v	30 / 0,1	40 / 0,3	50 / 0,5	60 / 0,7	70 / 0,9
0,9	0,1	5,242 / 0	4,392 / 2,533	3,822 / 7,820	3,452 / 14,110	3,183 / 21,930
1,0	0,3	5,633 / 0	4,730 / 1,805	4,106 / 6,005	3,688 / 11,254	3,384 / 18,530
1,1	0,5	6,024 / 0	5,006 / 0	4,390 / 4,588	3,924 / 9,320	3,585 / 15,725
1,2	0,7	6,415 / 0	5,404 / 0	4,674 / 3,366	4,160 / 7,837	3,786 / 13,651
1,3	0,9	6,806 / 0	5,741 / 0	4,958 / 2,312	4,396 / 6,800	3,987 / 12,070

Применение градиентных методов для вычисления оптимальных значений u и v исключается из-за функций

$$\bar{S}^{II}_{кл}(u,v) = \frac{S^{II}_{кл}(u,v)}{F_{кл}}, \quad \bar{Y}(u,v) = \frac{Y(u,v)}{F_{кл}} .$$

Первая из этих функций вычисляется с использованием формул неустановившегося притока воды к дренам ввиду их сложности [2]; взятие производной невозможно. Вторая – экспериментальная функция, выражающая потерю урожая от опоздания со сроком сева культур в весенний период из-за высокого положения УГВ при некоторых значениях параметров u (h), v (B).

Для природных условий, описанных в [3], вычислены значения $\bar{S}^{II}_{кл}(u,v)$; функция ущерба взята из работы [4] и представляет сложную зависимость от времени (t) снижения УГВ, которое определяется параметрами h и B. Значения функций $\bar{S}^{II}_{кл}(u,v)$ и $\bar{Y}(u,v)$ приведены в табл. 1.

Аппроксимация двух функций $\bar{S}^{II}_{кл}(u,v)$ и $\bar{Y}(u,v)$ от двух переменных простыми зависимостями позволяет разрешить вопрос о применении градиентных методов для отыскания оптимальных параметров подсистемы "дрены-коллектор". Способ подбора (аппроксимации) зависимостей от двух и более переменных на ограниченном отрезке их изменения основывается на использовании конечных разностей многочленов [5] и нулевых комбинациях ординат (НКО) [6].

Существование НКО, содержащих (для тех же многочленов) количество ординат большее, чем в минимальной конечной разности, доказывается с помощью результанта. Список НКО для многочленов различных степеней приведен в работе [6]. Для многочленов степеней n = 2 ; 1 ; 0 справедливы следующие НКО по 5 ординатам:

n = 2; НКО 3-го порядка: $\Delta^{(3)}_{1-5} y_i = 2y_{31} - y_{32} - 9y_{33} + 13y_{34} - 5y_{35} = 0;$

n = 1; НКО 2-го порядка: $\Delta^{(2)}_{1-5} y_i = 3y_{21} - y_{22} - y_{23} - 7y_{24} + 6y_{25} = 0;$

n = 0; НКО 1-го порядка: $\Delta^{(1)}_{1-5} y_i = (y_{12} - y_{11}) + (y_{13} - y_{12}) + (y_{14} - y_{13}) + (y_{15} - y_{14}) = 0.$

Свободный член многочлена вычисляется с использованием НКО $\emptyset$–нулевого порядка: $\Delta^{(0)}_{1-5} = \frac{\Sigma y_{0i}}{N_i}$, где N_i – число ординат.

В нижеприведенном примере использованы НКО на 5 ординатах с шагом 0,2 ($\Delta u = 0{,}2$; $\Delta v = 0{,}2$).

Для вычисления коэффициентов многочлена второй степени

$$y_3 = a_2x^2 + a_1x + a_o$$

используется НКО 2-го, 1-го и нулевого порядков:

$$y_{3i} - a_2x_i^2 = y_{2i},$$

где $y_{2i} = a_1x_i + a_o$; i – номера узлов интерполяции (или используемых в НКО ординат).

Для многочлена первой степени справедлива НКО $\Delta^{(2)}_{1-5}\, y_{2i}$, подставим вместо ее ординат разность $(y_{3i} - a_2x_i^2)$:

$$3(y_{31} - a_2x_1^2) - (y_{32} - a_2x_2^2) - (y_{33} - a_2x_3^2) - 7(y_{34} - a_2x_4^2) +$$

$$+ 6(y_{35} - a_2x_5^2) = 0.$$

Отсюда находим:

$$a_2 = \frac{3y_{31} - y_{32} - y_{33} - 7y_{34} + 6y_{35}}{3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 7x_4^2 + 6x_5^2}.$$

Полученное значение коэффициента a_2 подставляем в разность $(y_{3i} - a_2xi^2)$ и находим ординаты $y_{2i} = a_1x_i + a_0$. Находим снова разность $(y_{2i} - a_1x_i) = y_{1i}$, где $y_{1i} = a_0$. Однако для многочлена нулевой степени (n=0) справедлива НКО $\Delta^{(1)}_{1-5}\, y_{1i}$. Подставив вместо ее ординат разность $(y_{2i} - a_1x_i)$, находим коэффициент a_1. Коэффициент a_o вычисляется с помощью конечной разности 0-го порядка ($a_o = \frac{\Sigma y_{oi}}{N_i}$; $N_i = 5$) (табл. 2 и 3).

По переменной v для исходных данных, приведенных в табл. 1 (числитель), подходит многочлен 2-й степени

$$Y_B = a^{(h)}_{2v}\, v^2 + a^{(h)}_{1v}\, v + a^{(h)}_{ov}. \qquad (6)$$

Для вычисления коэффициентов $a^{(0,9)}_{2v}$, $a^{(0,9)}_{1v}$, $a^{(0,9)}_{ov}$ использованы данные первой строки табл. 1 (числитель). Вычисления коэффициентов приведены в табл. 2.

Т а б л. 2. **Расчет коэффициентов функции (6) с использованием НКО** $(\Delta_{1-5}^{(2)} y_i),\ (\Delta_{1-5}^{(1)} y_i),\ (\Delta_{1-5}^{(o)} y_i)$

B_i	h = 0,9				
	30	40	50	60	70
v_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\bar{S}^{II}_{кл}(v_i)$	5,242	4,392	3,822	3,452	3,183

$$a_{2V}^{(0,9)} = \frac{3.5,242 - 4,392 - 3,822 - 7.3,452 + 6.3,183}{3\ 0,1 - 0,3 - 0,5 - 7.0,4 + 60,9} = 2,1839$$

$S_1^{II}(v_i) = \bar{S}^{II}_{кл}(v_i) - a_{2V}^{(0,9)} v_i^2 =$	5,2202	4,1954	3,2760	2,3819	1,1839

$$a_{1V}^{(0,9)} = \frac{(4,1954-5,2202) + (3,2760-4,1954) + (2,3819-3,2760) + (1,4140-2,3819)}{(0,3-0,1) + (0,5-0,3) + (0,7-0,5) + (0,9-0,7)} =$$

$$= -\,4,7578$$

$\bar{S}_o^{II} = \bar{S}^{II}(v_i) - a_{1V}^{(0,9)} v_i =$	5,6960	5,6227	5,6549	5,7123	5,6960

$$a_{0V}^{(0,9)} = \frac{5,6960 + 5,6227 + 5,6549 + 5,7123 + 5,6960}{5} = 5,6764$$

$y_B^{(0,9)}$	5,223	4,446	3,844	3,416	3,164

В результате вычислений получены коэффициенты многочлена (6)

$$y_B^{(0,9)} = 2,1839\, v^2 - 4,7578\, v + 5,6764. \qquad (7)$$

Значения $y_B^{(0,9)}$, вычисленные по (7), приведены в последней строке табл. 2, они близки к исходным данным. Рекомендуется произвести проверку и для других строк, чтобы убедиться, что квадратный многочлен

Т а б л. 3. Расчет коэффициентов функции (8) g_{ij} с использованием НКО

$(\Delta^{(1)}_{1-5}\ a^{(h)}_{2v};\ \Delta^{(o)}_{1-5}\ a^{(h)}_{2v})$

h	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
u	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$a^{(h)}_{2V}$	2,1839	3,2777	2,3732	2,4670	2,5616

$$g_{11} = \frac{(2{,}2777-2{,}1839)+(2{,}3732-2{,}2777)+(2{,}467-2{,}3732)+(2{,}5616-2{,}467)}{(0{,}3-0{,}1)+(0{,}5-0{,}3)+(0{,}7-0{,}5)+(0{,}9-0{,}7)} =$$

$$= 0{,}4721$$

$(a^{(h)}_{2V} - g_{11}u)$	2,1367	2,1361	2,1372	2,1365	2,1367

$$g_{21} = \frac{2{,}1367 + 2{,}1361 + 2{,}1372 + 2{,}1365 + 2{,}1367}{5} = 2{,}1366$$

Вычисленные $a^{(h)}_{2V}$	2,1838	2,2782	2,3726	2,4671	2,5615

(6) действительно хорошо аппроксимирует исходные данные по переменной B на отрезке [30; 70].

Далее подбирается аппроксимирующая функция по другой переменной – u . Для исходных данных, приведенных в табл. 1 (числитель), аппроксимирующей оказывается линейная функция

$$Y^{(B)}_h = a^{(B)}_{1u}\,u + a^{(B)}_{ou}.$$

Таким образом, для исходных данных табл. 1 (числитель) получены две зависимости: по строкам – квадратный многочлен (6) , по столбцам – многочлен первой степени (7). Далее из этих двух функций формируется одна функция от двух переменных:

$$\bar{S}^{II}_{uv} = [u\ 1] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$=(g_{11}u+g_{21})v^2+(g_{12}u+g_{22})v+(g_{13}u+g_{23})=$$

$$=a^{(h)}_{2v}\,v^2+a^{(h)}_{1v}\,v+a^{(h)}_{ov}\,. \qquad (8)$$

(Возможен и обратный порядок записи трех матриц, но тогда квадратная матрица будет содержать два столбца и три строки элементов g_{ij}) .Для вычисления коэффициентов $a^{(h)}_{iv}$, i = 1, 2, 3 в функции (8) используются 5 значений ординат $\bar{S}^{II}(u)$ из табл. 1 (числитель). Для первой строки вычисления приведены в табл. 2, для остальных они совершенно идентичны. В результате расчетов получены следующие коэффициенты

$a^{(0,9)}_{2v}=2{,}1838;$ $\quad a^{(0,9)}_{1,v}=-4{,}7578;$ $\quad a^{(0,9)}_{0v}=5{,}6764;$

$a^{(1,0)}_{2v}=2{,}2777;$ $\quad a^{(1,0)}_{1v}=-5{,}0889;$ $\quad a^{(1,0)}_{0v}=6{,}1010;$

$a^{(1,1)}_{2v}=2{,}3732;$ $\quad a^{(1,1)}_{1v}=-5{,}4213;$ $\quad a^{(1,1)}_{0v}=6{,}5253;$

$a^{(1,2)}_{2v}=2{,}4670;$ $\quad a^{(1,2)}_{1v}=-5{,}7533;$ $\quad a^{(1,2)}_{0v}=6{,}9947;$

$a^{(1,3)}_{2v}=2{,}5616;$ $\quad a^{(1,3)}_{1v}=-6{,}0854;$ $\quad a^{(1,3)}_{0v}=7{,}3750.$

Для вычисления коэффициентов g_{ij}, i = 1,2,3; j= 1,2 в функции (8) используются НКО на пяти ординатах. При этом ординатами для их вычисления теперь служат коэффициенты $a^{(h)}_{2v}$, $a^{(h)}_{1v}$, $a^{(h)}_{0v}$. Для столбца коэффициентов $a^{(h)}_{2v}$ вычисления приведены в табл. 3.

Последняя строка табл. 3 вычислена по формуле

$$a^{(h)}_{2v}=0{,}4721\,u+2{,}1366. \qquad (9)$$

Аналогичным образом вычислены все коэффициенты (g_{ij},i= 1,2,3; j= 1,2). Подставив их в (8), получаем функцию от двух переменных:

$$\bar{S}^{II}_{uv}=0{,}4721\,v^2u+2{,}1366v^2-1{,}6595\,vu-4{,}5916\,v+$$

$$+2{,}1232\,u+5{,}4641. \qquad (10)$$

Т а б л. 4. **Приведенные затраты (руб./га) по трубкам коллектора, вычисленные по формуле (10) (числитель), и значения ущербов (руб./га), вычисленные по формуле (12) (знаменатель)**

	B	30	40	50	60	70
h	u \ v	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,9	0,1	5,223 / –	4,446 / 2,525	3,844 / 7,668	3,416 / 14,140	3,164 / 21,941
1,0	0,3	5,615 / –	4,779 / 1,812	4,126 / 6,054	3,655 / 11,526	3,366 / 18,628
1,1	0,5	6,007 / –	5,113 / –	4,402 / 4,561	3,893 / 9,344	3,568 / 15,761
1,2	0,7	6,400 / –	5,446 / –	4,690 / 3,297	4,132 / 7,780	3,771 / 13,624
1,3	0,9	6,792 / –	5,780 / –	4,973 / 2,277	4,371 / 6,768	3,973 / 12,056

В табл. 4 приведены значения $\bar{S}^{II}_{uv}$,вычисленные по формуле (10) (числитель).

В табл. 1 приведены значения ущербов (знаменатель) ; оба вида зависимостей Y (h) и Y (B) (по столбцам и строкам) аппроксимируются многочленными функциями второй степени, из которых сформирована функция от двух переменных:

$$y(u,v) = [u^2 u 1] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (b_{11}u^2 + b_{21}u + b_{31})v^2 + (b_{12}u^2 + b_{22}u + b_{32})v + (b_{13}u^2 + b_{23}u + b_{33}) = b_{2v}^{(h)} v^2 + b_{1v}^{(h)} v + b_{0v}^{(h)} . \qquad (11)$$

Коэффициенты функции (11) вычислены с помощью НКО (аналогично табл. 2 и 3).

В результате получены все коэффициенты функции (11):

$$y(u,v) = -45{,}3147\,u^2v^2 + 36{,}9202\,uv^2 + 13{,}3759\,v^2 + 75{,}4607\,u^2v -$$
$$- 77{,}7484\,uv + 19{,}4434\,v - 23{,}6828\,u^2 + 20{,}1828\,u - 4{,}479. \qquad (12)$$

В табл. 4 приведены значения функции ущербов, вычисленные по (12) (знаменатель).

Сравнение значений табл. 1 и табл. 4 показывает, что полученные функции (10) и (12) хорошо аппроксимируют исходные данные.

Аппроксимирующие многочленные функции легко продифференцировать, поэтому можно применить градиентные методы (например, метод наискорейшего спуска) и вычислить оптимальные параметры дренажа. Переход от $u_{опт}$ и $v_{опт}$ к $h_{опт}$ и $B_{опт}$ осуществляется с помощью формул (2).

Литература

1. Инструкция (методика) по определению экономической эффективности капитальных вложений в орошение и осушение земель и обводнение пастбищ. — М., 1972. 2. Мурашко А.И., Сапожников Е.Г. Фильтрационные расчеты горизонтального трубчатого дренажа. — Науч. тр. БелНИИМиВХ "Конструкции и расчеты осушительно-увлажнительных систем". Минск, 1976, вып. 2. 3. Минаев И.В. Определение оптимальных параметров дренажа с учетом его влияния на прилежащие земли. — Вестник с.-х. науки, 1978, № 2. 4. Минаев И.В. Проектирование дренажных систем с оптимальными параметрами. — Гидротехника и мелиорация, 1974, № 9. 5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е. — М., 1967. 6. Минаев И.В. Формулы для вычисления коэффициентов некоторых функций, применяемых в мелиорации. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Минск, 1976, вып. 6.

УДК 626.86.003.1

С.В. Валицкий

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ СОКРАЩЕНИЯ СРОКОВ СТРОИТЕЛЬСТВА МЕЛИОРАТИВНЫХ ОБЪЕКТОВ

Одним из значительных резервов интенсификации сельскохозяйственного производства является ускорение ввода в действие мелиоративных мощностей и объектов.

Вопрос о целесообразном сокращении продолжительности строительства мелиоративных объектов нуждается в экономическом обосновании и