БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет транспортных коммуникаций

Кафедра: «Математические методы в строительстве»

СОГЛАСОВАНО Заведующий кафедрой ММС Чернявская С.В. ________________ «___»__________2024 г.	СОГЛАСОВАНО Декан ФТК Кравченко С.Е. _______________ «___»_________2024 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦПЛИНЕ

«Математика» (разделы: матричная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ)

для студентов специальностей 6-05-0731-01 «Геодезия», 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 6-05-0718-01 «Инженерная экономика»

Составители: Воронова Н.П., Коваленок Н.В., Корженевич С.К., Мороз О.А., Чернявская С.В., Шарипова Л.Д.

Рассмотрено и утверждено на заседании совета факультета транспортных коммуникаций «30» сентября 2024 г.,
протокол №1

Минск, БНТУ 2024

Перечень материалов

Программа курса, краткий теоретический материал, материал для аудиторной и самостоятельной работы, тематические тесты.

Пояснительная записка

Учебно-методический комплекс по курсу «Математика» предназначен для студентов по специальностям 6-05-0731-01 «Геодезия», 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 6-05-0718-01 «Инженерная экономика». Объем изучаемого материала дисциплины в соответствии с учебным планом составляет для специальности 6-05-0731-01 «Геодезия» 68 часов лекций и 50 часов практических занятий (очная форма получения высшего образования) и 12 часов лекций и 8 часов практических занятий(заочная форма получения высшего образования); для специальности 6-05-0718-01 «Инженерная экономика» составляет 34 часа лекций и 52 часа практических занятий (очная форма получения высшего образования); для специальности 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» составляет 50 часов лекций и 34 часа практических занятий (очная форма получения высшего образования).

Целью ЭУМК является координация и систематизация работы студентов и преподавателей по изучению предмета «Математика» для студентов специальностей 6-05-0731-01 «Геодезия», 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 6-05-0718-01 «Инженерная экономика».

Структурирование и подача учебного материала. Материал курса представлен в виде краткого лекционного конспекта в сопровождении основных задач с пошаговым алгоритмом решения и разбором типовых ошибок, материала для аудиторной и самостоятельной работы. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 1.1 Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел из множества $\mathbb{R}$, содержащая m строк одинаковой длины и n столбцов.

Матрицы обозначаются латинскими буквами A, B, C, D и т.д.

Например, $A = (a_{\iota j})$, где $\iota = \overline{1, m}$ (т.е.$\iota = 1,2,3, \dots, m$) – номер строки, $j = \overline{1, n}$ (т.е. $j = 1,2,3, \dots, n$)- номер столбца.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называют *квадратной.*

У квадратной матрицы элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*, а из верхнего правого угла – *побочную диагональ.*

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Обозначается буквой *E*.

Матрица (не обязательно квадратная), все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором.* (или вектор-столбец, или вектор-строка).

Матрица (например *A*), полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к данной. Обозначается A^T.

Действия над матрицами

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{\iota j})$ на число k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{\iota j})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($\iota = \overline{1, m}, . j = \overline{1, n}$).

Записывают $k \cdot A = B$.

Например: $k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \end{pmatrix}$.

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Сложение матриц

Операция сложения матриц возможна только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Записывают $A + B = C$.

Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$.

Разность матриц определяется: $A - B = A + (-B)$.

Умножение матриц

Операция умножения двух матриц возможна только, если *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Такие матрицы называются *согласованными.*

Произведение матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая что

$$\boxed{c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk},} \tag{1.1}$$

где $i = \overline{1,m}$, . $k = \overline{1,p}$,

Пример: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Матричные операции

(где A, B, C- матрицы, α, β – действительные числа)

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);

2) $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность);

3) $A + 0 = A$;

4)$A + (-A) = 0$;

5) $1 \cdot A = A$;

6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;

8) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

9) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;

10) $(A^T)^T = A$;

11) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

12) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;

13) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$;

14) $E \cdot A = A \cdot E = A$;

15) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

16) $A \cdot B \neq B \cdot A$;

17) $\alpha \cdot A \cdot B = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

Элементарные преобразования матриц

1) Перестановка местами двух столбцов (строк) матрицы.

2) Умножение всех элементов столбца (строки) матрицы на число, отличное от нуля.

3) Прибавление к одному столбцу (строке) матрицы другого столбца (строки), умноженного на одно, и тоже число.

Тема 1.2 Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, которое называется *определителем матрицы.*

Обозначается $\det A$ или $|A\,|$или Δ.

Если матрица первого порядка, то:

$$A = (a_{11}) \text{ и } \det A = a_1.$$

Если матрица второго порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Если матрица третьего порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Если матрица n-го порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{и} \quad \boxed{detA = \begin{cases} a_{11,} n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} B_{1j}\,, n > 1 \end{cases}} \qquad (1.2),$$

где B_{1j} – определитель матрицы, полученной из матрицы *A* вычеркиванием первой строки и *j*-го столбца.

Пусть дана квадратная матрица порядка *n*. Выберем в ней произвольно *s* строк и s столбцов ($1 \leq s \leq n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы* и обозначается M. Минором M', дополнительным к минору M, называется определитель матрицы, полученной в результате вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят минор M.

Алгебраическим дополнением минора M называется дополнительный к нему минор M', умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ – сумма номеров тех строк и столбцов матрицы, которые входят в минор M.

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента* называется минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \tag{1.3}$$

Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*. Под двумя *параллельными рядами* будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Теорема 1 (о разложении определителя по элементам ряда). *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда и алгебраических дополнений этих элементов.*

Теорема 2 (Лапласа). *Определитель матрицы порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка ($k < n$), которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, и алгебраических дополнений этих миноров.*

Основные свойства определителей

1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же номерами.

2. Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.

3. Если определитель содержит два одинаковых столбца (две одинаковые строки), то он равен нулю.

4. Умножение всех элементов одного ряда определителя на число $k \in \boldsymbol{R}$ равносильно умножению самого определителя на k.

5. Если все элементы одного из рядов определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если соответствующие элементы двух рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.

7. Если каждый элемент j-го ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то данный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, один из которых в j-м ряду содержит первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; остальные элементы одинаковы.

8. Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого его ряда, умноженные на число $k \in \boldsymbol{R}$, то величина определителя не изменится.

Обратная матрица

Если для матрицы A существует матрица B, такая что $AB = BA = E$, где E – единичная матрица, то *матрица B называется обратной матрице A* (A и B-квадратные матрицы одинакового порядка).

Невырожденной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной.*

Теорема. *Для того чтобы существовала матрица B, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.*

Матрицу, обратную матрице A, обозначают A^{-1}и находят следующим образом:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}} \qquad (1.4),$$

где матрица в формуле - это матрица, составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы A.

Теорема. *Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.*

Невырожденные матрицы обладают свойствами.

1. $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$;

2. $(A^{-1})^{-1} = A$;

3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

4.$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Тема 1.3 Ранг матрицы

Пусть дана матрица размеров $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы обозначают r.

Свойства ранга матрицы:

1. Ранг матрицы, полученной из данной вычеркиванием какого-либо столбца (строки), равен рангу данной матрицы или меньше его на единицу.

2. Ранг матрицы, полученной из данной приписыванием к ней столбца (строки), элементами которого являются произвольные числа, равен рангу исходной матрицы или больше его на единицу.

3. Если вычеркнуть из матрицы или приписать к ней нулевой столбец (строку), все элементы которого равны нулю, то ранг матрицы не изменится.

4. Ранг матрицы, полученной из данной транспонированием, равен рангу данной матрицы.

Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлен в виде суммы других k строк (столбцов), умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то будем говорить , что данная строка (столбец), является *линейной комбинацией* указанных строк (столбцов).

Строки $S_1, S_2, \dots, S_l$ $(l > 1)$ матрицы $A_{l\times p}$ называются линейно зависимыми, если хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных, иначе строки считаются *линейно независимыми.* Аналогичное понятие линейной зависимости и независимости столбцов.

Если в матрице A размера $m \times n$ некоторая строка является линейной комбинацией k других строк, где $k < m - 1$, то эта строка является линейной комбинацией всех строк матрицы, кроме данной. Таким образом, если в матрице s строк линейно зависимы, то все строки матрицы линейно зависимы.

Если n-й столбец матрицы $A_{m\times n}$ является линейная комбинация остальных ее столбцов, то это означает, что существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_{1n-1} \\ \alpha_{2n-1} \\ \vdots \\ \alpha_{mn-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогичная запись имеет место для любой строки (столбца) матрицы, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов).

Строками (столбцами), проходящими через минор M матрицы A, называют строки (столбцы) этой матрицы, на пересечении которых стоят элементы минора M.

Минором, окаймляющим минором M порядка k матрицы A, называется минор порядка $k+1$ этой матрицы, содержащей минор M.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Теорема (о базисном миноре). *Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов) и базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.*

Следствия:

1.Всякая не базисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией всех строк (столбцов) этой матрицы.

2.Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы равно рангу матрицы.

3.(критерий равенства нулю определителя). Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы некоторая его строчка (столбец) была линейной комбинацией других ее строк (столбцов).

Методы нахождения ранга матрицы

Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице A найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (k+1)-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M. Если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)-го порядка, и вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований.

Этот метод основан на так называемых элементарных преобразованиях, выполнимых над матрицей. Такими преобразованиями будем считать:

Вычеркивание строки, состоящей из нулей;

Прибавление к элементам одной из строк соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число не равное нулю;

Перестановку двух столбцов.

Теорема. *Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.*

При помощи элементарных преобразований мы можем привести данную матрицу A к виду, в котором все элементы главной диагонали отличны от нуля, а элементы других строк, расположенных ниже диагональных, равны нулю.

Тема 1.4 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Матричная запись системы линейных уравнений

Системой m уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}} \qquad (1.5),$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ -числа.a_{ij} − коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы; b_i −свободный член в этом уравнении.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных системы, называется *основной матрицей системы*, а матрица:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов называется *расширенной матрицей системы*.

И еще две матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Т.к. матрица A согласована с матрицей X , то можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Такая запись называется *матричной.*

Решение системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентные системы уравнений

Упорядоченный набор чисел $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ называется *решением системы*, если каждое из уравнений обращается в верное равенство после подстановки вместо переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$соответственно чисел $c_1; c_2, \dots, c_n$.

Решение $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

называемой *вектор-решением данной системы*. Матрица C удовлетворяет уравнению $AX = B$.

Если существует хотя бы одно решение системы, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственной решение. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*. Т.е., неопределенная система всегда имеет бесконечно много решений.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения (множество решений).

Две системы называются *эквивалентными* или *равносильными*, если всякое решение одной из них является решением другой, и наоборот, т.е. если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования системы:

1. умножение уравнения системы на отличное от нуля число;

2. прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на произвольное число отличное от нуля;

3. перестановку местами двух уравнений системы.

Легко показать, что при элементарных преобразованиях системы соответствующие элементарные преобразования производятся над строками расширенной матрицы системы.

Проводя элементарные преобразования системы, приходим к системе, эквивалентной данной.

Решение невырожденных линейных систем

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\boxed{AX = B} \tag{1.6}$$

Матрица A такой системы является матрицей порядка n. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Если определитель системы отличен от нуля, то она называется *невырожденной*, в противном случае – *вырожденной*.

Найдем решение невырожденной системы, В этом случае матрица A невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Умножив обе части уравнения слева на их матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E, EX = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1}B} \tag{1.7}$$

Формула $X = A^{-1}H$ является матричной записью решения рассматриваемой системы. Матричное равенство $X = A^{-1}B$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{n1}b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1j}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{nj}b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Такой способ решения называется *матричным* или, по-другому, *методом обратной матрицы*.

Данную систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

можно решать и с помощью метода Крамера.

Находя Δ_j – определитель, который получается из основного определителя Δ при замене -го столбца на столбец свободных членов. Тогда решение системы можно записать по *формулам Крамера:*

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ \left(j = \overrightarrow{1, n}\right)} \tag{1.8}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема (критерий совместности системы). *Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Решение произвольных линейных систем

Теорема. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Теорема. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.*

Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен r, назовем r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем *свободными*.

Так как базисный минор может быть выбран не единственным образом, то и совокупность базисных неизвестных может быть выбрана не единственным образом.

Из теорем следует метод решения системы линейных уравнений.

Найти r_A – ранг матрицы системы и $r_{\bar{A}}$ – ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\bar{A}}$, то система несовместна.

Если $r_A = r_{\bar{A}} = r$, выделить базисный минор и базисные неизвестные.

Исходную систему заменить равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в п. 3, найти выражение базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получить бесконечно много решений исходной системы. Каждое из этих решений будем называть *частным решением системы*.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leq n,\ a_{ii} \neq 0,\ i = \overrightarrow{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)},\ b_i^{(1)}\ \ (i,j = \overrightarrow{2,m})$ – новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы к стандартному виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появятся уравнения вида $0 = b_{i,}$ а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместимости системы.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \ldots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего у равнения находим x_n, из последнего уравнения x_{n-1}, далее двигаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \ldots, x_1)$.

Однородная система $\mathbf{n}$ *линейных уравнений с* $\mathbf{n}$ *неизвестными*

Линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все входящие в нее уравнения являются линейными однородными уравнениями.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Таким образом, однородная система линейных уравнений всегда совместна. Поэтому важно выяснить, при каких условиях она является определенной. Покажем, что однородная система n линейных уравнений с n неизвестными, кроме нулевого, имеет еще решения тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю.

В самом деле, пусть $\Delta = 0$. Так как однородная система уравнений является частным случаем неоднородной системы, то к ней применимо правило Крамера. Но для однородной системы все $\Delta x_i = 0$, так как каждый из этих определителей содержит столбец из нулей $(b_i = 0)$. Поэтому система будет иметь вид

$$\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \dots, \Delta x_n = 0.$$

Из этой системы следует, что если $\Delta \neq 0$, то однородная система имеет единственное нулевое решение; если же $\Delta = 0$, то следует, что она имеет бесчисленное множество решений.

РАЗДЕЛ 1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти транспонированную матрицу для матрицы $A + B$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0+1 & 3-2 \\ 1+0 & 4-3 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда транспонированная матрица $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 2: Найти произведение матриц Aи B, где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Выясним возможно ли перемножить матрицу A на B. Размерность матрицы A – два на три, а размерность матрицы B – три на два. Т.к. количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, значит матрицы согласованы и произведение для них определено.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 23 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом проверяем согласованность матриц B и A. Они согласованы, а значит, их можно перемножать.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+15 & 0+5 & -1+10\\ -2+6 & 0+2 & 1+4\\ 0+9 & 0+3 & 0+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 5 & -9\\ 4 & 2 & 2\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 23\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}17 & 5 & -9\\ 4 & 2 & 2\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}.$

Пример 3: Вычислить определитель по правилу «треугольника»

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}—a_{31}a_{22}a_{13}-$$

$$a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}=1\cdot 0\cdot 3-2\cdot 5\cdot(-1)+2\cdot 4\cdot 3-3\cdot 0\cdot(-1)+$$

$$2\cdot 4\cdot 3-5\cdot 2\cdot 1=48.$$

Ответ:48.

Пример 4: Вычислить определитель методом разложения его по «строке» или «столбцу».

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Решение:

Выберем строку (или столбец) с наибольшим числом нулей. В данном случае это первая строка:

Тогда можно записать $:a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$. Т.к. $a_{12} = a_{13} = 0$, то алгебраические дополнения (A_{ij}) искать для этих элементов не нужно. Найдем алгебраические дополнения только для элементов a_{11}и a_{14}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(2\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot4 + 2\cdot1\cdot2 - 2\cdot1\cdot4 - 1\cdot 2\cdot2 - 1\cdot3\cdot0) = 4$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot3 + 2\cdot1\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 - -2\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot1) = -6$$

Значит $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{14}A_{14} = 1\cdot4 + 2(-6) = -8.$

Ответ: – 8.

Пример 5: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем определитель матрицы A методом разложения определителя по третьей строке: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -2 \neq 0$. Т.к. определитель не равен нулю, это значит, что для матрицы A существует обратная матрица (A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, \text{ где } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем все A_{ij}:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$

Аналогично находим остальные:

$A_{13} = -6$; $A_{21} = 0$; $A_{22} = -1$; $A_{23} = -2$; $A_{31} = -2$; $A_{32} = 9$; $A_{33} = 26$.

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 9 \\ -6 & -2 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix}$.

Пример 6: Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяя элементарные преобразования, приводим данную матрицу к трапециевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на $(-1), (-8), 1$ и прибавления ко второй, третьей и четвертой строкам; третья матрица получена из второй путем прибавления второй строки к третьей.)

Ранг последней матрицы равен трем, так как имеется отличный от нуля минор третьего порядка этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 18 \neq 0,$$

а определитель самой матрицы (определитель четвертого порядка) равен нулю (как содержащий нулевую строку). Следовательно, ранг исходной матрицы равен трем ($r = 3$).

Ответ: 3.

Пример 7: Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Составим определитель системы Δ и определители $\Delta_k (k = 1, 2, 3)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Определитель системы $\Delta = 21 \neq 0$, т.е. данная система является невырожденной, поэтому пользуемся формулами Крамера. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; пользуемся формулами Крамера, полагая в них $n = 3$. Так как $\Delta_1 = 42$, $\Delta_2 = 63$, $\Delta_3 = 21$, то

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{21} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{63}{21} = 3, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{21}{21} = 1.$$

Ответ: (2;3;1).

Пример 8: Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

Решение:

Данную систему запишем в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы A, находим матрицу A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 39, \qquad A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

По формуле $X = A^{-1}B$ получаем решение системы

$$X = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$

Ответ: (2;3;5).

Пример 9: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее:

Домножив сперва 1-ую строку на (-2), (-4), (-6) и сложив ее со 2-ой, 3-ей и 4-ой строкой соответственно, получим вторую матрицу. Затем проделав те же преобразования со второй и третей матрицей, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Этой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ -x_2 - 6x_3 = -3 \\ -45x_3 + 9x_4 = -18 \\ 8x_3 = 0 \end{cases}$$

имеющая решение $x_3 = 0,\ x_4 = -2,\ x_2 = 3,\ x_1 = 1.$

Ответ: (1;3;-2;0).

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1.Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8 & -3\\ 5 & 0 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 8 & 6 & 5\\ 4 & -3 & 7 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}6 & 8 & -1\end{pmatrix};$$

$$F=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

а) Определить размерность данных матриц;

б) Какие из матриц являются квадратными, какие – единичной матрицей, матрицей-столбцом и матрицей-строкой.

в) Для матрицы B назовите элементы b_{21}, b_{33}, b_{42}.

г) для матрицы F назовите элементы, которые образуют главную диагональ, какие – побочную диагональ.

д) Найти $3A$,$-2C$, $\frac{1}{2}D$.

е) Найти матрицы $A^{т}, B^{т}, C^{т}$.

2.Найти X из уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ -1 & 8 & 6\end{pmatrix}$.

3. Найти ABи BA, если это возможно:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 8 & -3\\ 5 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

4.Найти A^2 если $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

5.Найти определитель матрицы:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

6.Вычислить определитель с помощью разложения элементов по строке (или столбцу):

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

7.Вычислите определитель приведя матрицу к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

8.При каких значениях переменной определитель равен 0:

а) $\begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2^x & 2^{2x} \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & x \\ 5x & x\log_3 \frac{1}{27} \end{vmatrix}$.

9.Решить:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 8 & x & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} > 0$; в) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ x-5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

10. Найти обратную матрицу (если такая существует) для матриц:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

11.Решить уравнение:

а) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & -7\end{pmatrix}$; б) $x\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -8\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

12. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$; б) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$;

в) $K=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & -2 & -2 & 4\\ 7 & -6 & -1 & 7\end{pmatrix}$.

13. При каких значениях параметра α ранг матрицы равен указанному числу r?

а) $\begin{pmatrix}2\alpha & 1\\ 4 & \alpha\end{pmatrix}, r=2$; б) $\begin{pmatrix}\alpha & -1 & 0\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & 2 & \alpha\end{pmatrix}, r=3$; в) $\begin{pmatrix}-1 & \alpha-2\\ 1 & 12-\alpha\end{pmatrix}, r=2$.

14. Решить системы матричным методом (если это возможно):

а) $\begin{cases}x+y=1,\\ 3x+3y=-2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=3\\ 3x_1-x_2+5x_3=2\\ x_1+3x_2-x_3=4\end{cases}$

15. Решить системы по формулам Крамера (если это возможно):

а) $\begin{cases} 2x+3y+5z=11 \\ x-5y-2z=5 \\ 3x+6y+4z=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ 5x_2+x_3=7 \\ x_1+3x_2=6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x+3y+11z+5t=2 \\ x+y+5z+2t=1 \\ 2x+y+3z+2t=-3 \\ x+y+3z+4t=-3 \end{cases}$.

16. Исследовать на совместность системы уравнений и в случае совместности, решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+5z=3 \\ 2x-4y+z=6 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-5x_4=-4 \\ -x_1+3x_2+2x_3-4x_4=-8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=14 \\ x_1+x_2+3x_3-4x_4=-4 \end{cases}$.

17. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=0 \\ x_1-3x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$.

РАЗДЕЛ 1. ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

1. а) A_{2x3}; B_{3x4}; C_{2x1}; D_{1x3}; F_{2x2}; E_{3x3}. б) квадратные F и E; единичные E; матрица-столбец C; матрица-строка D. в) $b_{21}=0$; $b_{33}=7$; b_{42} – не сущ. г) элементы главной диагонали 0; 1; элементы побочной диагонали 5; 6. д)

$\begin{pmatrix}12 & 24 & -9\\ 15 & 0 & 18\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3 & 4 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;е) $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}6 & 0 & 4\\ -7 & 8 & -3\\ 5 & 6 & 7\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$; $(5 \quad -3)$. **2.** $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5\end{pmatrix}$. **3.** а) $\begin{pmatrix}0 & 6\\ 5 & -19\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-20 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; в) невозможно; $\begin{pmatrix}-11 & 28 & -21\\ 35 & 25 & -6\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}-5 & 15\\ -10 & 10\end{pmatrix}$. **5.** а) 23; б) 0; в)-6. **6.** а) -48; б) 42; в) 48. **7.** а) 434; б) 27. **8.** а) -2 ;2 б) 3; в) $-\frac{6}{5}$; 0. **9.** а)2; 3; б) $[-1{,}5;\infty)$; в) 10,5. **10.** $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{7} & 0\\ 0 & \frac{1}{7} & 0\\ -4 & \frac{20}{7} & 1\end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{9}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{11}{23}\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1\\ \frac{18}{23} & -\frac{16}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{45}{23}\\ -\frac{11}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{3}{23} & \frac{13}{23}\end{pmatrix}$. **11.** а) $\begin{pmatrix}-2{,}4 & -1\\ 1{,}3 & -1\end{pmatrix}$; **12.** а) 1; б) 3; в) 2. **13.** а) $R \setminus \mp 2$; б) $R \setminus \mp 1; 0$; **14.** а) нельзя решить данным методом, б) (-4;1;-2), в) (1;1;0). **15.** а) (1;-2;3), б) нельзя решить данным методом, в) (-2;0;1;-1). **16.** а) (1;-1;0), б) нет решений, в) $(10-10c;\ c; 15-16c; 4--5c)$, где $c \in R$; г) $(3; 1; -2; 1)$ **17.** а) $(0; 0; 0)$ б) $(-17c; 16c; 13c)$, где $c \in R$, в) $\left(-\frac{11}{7}c;\ -\frac{1}{7}c; c\right)$, где $c \in R$.

РАЗДЕЛ 1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Найти $2A - B + 3C$, если:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\\ 12 & 8\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 6 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Найти X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}2 & 7 & -2\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix} - \frac{1}{3}X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Найти AB и BA, если это возможно:

а) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$

4.Найти A^3 если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

5. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего порядка.

6.Найти определитель матрицы:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 2 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

7.Вычислить определитель с помощью разложения элементов по строке (или столбцу):

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

8.Вычислите определитель приведя матрицу к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

9.Решить:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & x & 8 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \geq 0$;

10. Найти обратную матрицу (если такая существует) для матриц: $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

11.Решить уравнение:

а) $x \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

12. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если

а) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13.При каких значениях параметра α ранг. матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & 4 & -8 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3?

14. Решить системы матричным методом (если это возможно):

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 9 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -9 \end{cases}$

15. Решить системы по формулам Крамера (если это возможно):

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 5y = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 19 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$.

16. Исследовать на совместность системы уравнений и в случае совместности, решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$.

17. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

РАЗДЕЛ 1. ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. $\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 30 & -6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 21 & -6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.**3** а) $(42 \quad -13)$; невозможно; б) $\begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 19 & 20 & -17 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -15 & 6 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -35 & 45 \\ -30 & 10 \end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$. **6.** а) 37; б) -15; в) 8. **7.** а)-40; б) –476; **8.** -20. **9.** а) -3; б) $[-8; +\infty)$. **10.** $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$; B^{-1} – не существует. **12.** а) 2, б) 4, в) 2. **14.** а) $(-1; -2; -4)$, б) $(1; -1; 2)$, в) нельзя решить данным методом. **15.** а) (1;2), б) (3;-1;0), в) (3;-1;4). **16.** а) $\left(\frac{4}{9}; \frac{19}{9}; \frac{20}{9}\right)$, б) $(1; 1; 1)$, в) $\left(\frac{11+10c_1+4c_2}{5};\ c_1;\ \frac{-7-13c_2}{5}\right)$, где $c_1, c_2 \in R$. **17.** а) $(0; 0; 0)$, б) $(0; 0; 0)$, в) $\left(-\frac{2}{3}c_1; \frac{1}{3}c_1 + c_2; c_1; c_2\right)$, где $c_1, c_2 \in R$. г) элементы главной диагонали 0; 1; элементы побочной диагонали 5; 6. д) $\begin{pmatrix} 12 & 24 & -9 \\ 15 & 0 & 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -7 & 8 & -3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $(5 \quad -3)$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$. **3.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -20 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) невозможно; $\begin{pmatrix} -11 & 28 & -21 \\ 35 & 25 & -6 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$. **5.** а) 23; б) 0; в)-6. **6.** а) -48; б) 42; в) 48. **7.** а) 434; б) 27. **8.** а) -2 ;2 б) 3; в) $-\frac{6}{5}$; 0. **9.** а)2; 3; б) $[-1{,}5; \infty)$; в) 10,5. **10.** $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ -4 & \frac{20}{7} & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{11}{23} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{18}{23} & -\frac{16}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{45}{23} \\ -\frac{11}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{3}{23} & \frac{13}{23} \end{pmatrix}$. **11.** а) $\begin{pmatrix} -2{,}4 & -1 \\ 1{,}3 & -1 \end{pmatrix}$; **12.** а) 1; б) 3; в) 2. **13.** а) $R \setminus \mp 2$; б) $R \setminus \mp 1; 0$; **14.** а) нельзя решить данным методом, б) (-4;1;-2), в) (1;1;0). **15.** а) (1;-2;3), б) нельзя решить данным методом, в) (-2;0;1;-1). **16.** а) (1;-1;0), б) нет решений, в) $(10 - 10c;\ c; 15 - 16c; 4 - -5c)$, где $c \in$

R; г) $(3; 1; -2; 1)$ **17.** а) $(0; 0; 0)$ б) $(-17c; 16c; 13c)$, где $c \in R$, в) $\left(-\frac{11}{7}c;\ -\frac{1}{7}c; c\right)$, где $c \in R$.

РАЗДЕЛ 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Тема 2.1 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Понятие вектора

Направленным отрезком или *связанным вектором* называют отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая – за конец. Направленный отрезок началом которого является точка A, а концом – точка B, обозначают AB.

Если для направленного отрезка AB фиксируются только длина и направление (при произвольности его положения на плоскости и в пространстве), то он называется *свободным вектором.* Обозначается символом $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Векторы также обозначают одной буквой с чертой над ней, например, $\vec{\mathrm{a}}$. Направление вектора на рисунке (рис. 1) указывают стрелкой

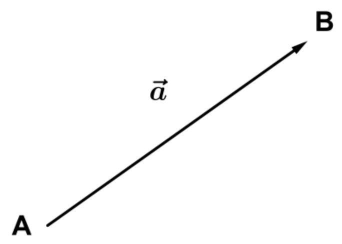


Рисунок 2.1

Длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$ или просто 0. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\vec{\mathrm{e}}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{\mathrm{a}}$, называется *ортом* вектора $\vec{\mathrm{a}}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными* (параллельными), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, при этом пишут $\vec{a} \,||\, \vec{b}$.

Отметим, что коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково (сонаправлены) или противоположно направлены.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если выполнены два условия:

а) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены.

Векторы, имеющие противоположные направления и равные длины, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90°.

Векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ называют компланарными, если существует плоскость, которой они все параллельны. Отметим, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору, и поэтому компланарен с любыми двумя векторами.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение векторов на число.

Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\vec{c}$, где $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2).

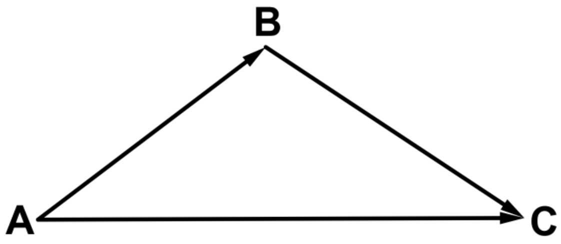


Рисунок 2.2

Заметим, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то их сумму можно найти по так называемому правилу параллелограмма (рис. 3).

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

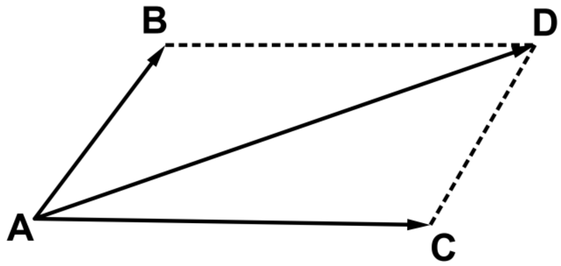


Рисунок 2.3

Под суммой $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ трёх векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ будем понимать вектор, который получается последовательным сложением данных векторов, т.е.

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

Легко убедиться в том, что если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, то

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 4).

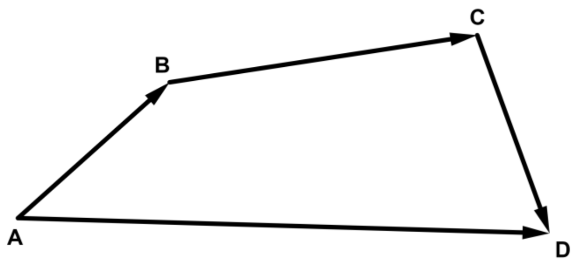


Рисунок 2.4

Аналогично определяется сумма n векторов.

Разностью $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Легко проверить справедливость следующих утверждений:

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность).

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α (или числа α на вектор $\vec{a}$) называется вектор $\vec{b}$, такой, что $|b|=|\alpha||\vec{a}|$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\alpha>0$, и противоположно направлены, если $\alpha<0$. Очевидно, что если $\vec{a}=0$, то $\alpha\vec{a}=0$ при любом α. Если $\alpha=0$, то $\alpha\vec{a}=0$ при любом $\vec{a}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α будем обозначать $\alpha\vec{a}$ (или $\vec{a}\alpha$).

Для любого вектора $\vec{a}$ и произвольного числа α существует единственный вектор α$\vec{a}$.

$\alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a} \quad (\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R})$.

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \quad (\alpha\in\boldsymbol{R})$.

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \quad (\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R})$.

Проекция вектора на ось

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется положительное число равное длине отрезка A_1B_1 на оси u, которае обозначается $np_u\overrightarrow{AB}$ (рис. 5).

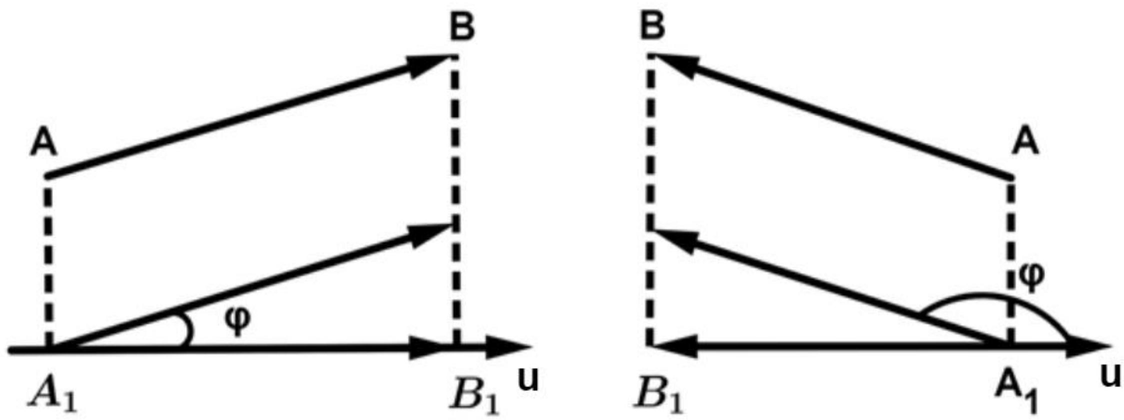


Рисунок 2.5

$A_1B_1 = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, если направление $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси u; $A_1B_1 = -|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если направление $\overrightarrow{A_1B_1}$ противоположно направлению оси u.

Имеет место равенство

$$\boxed{np_u\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi}, \qquad (2.1),$$

где φ – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и положительным направлением оси u.

Декартова система координат. Координаты точки

Системой координат в пространстве называется совокупность фиксированной точки *O* базиса $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ (трех векторов не лежащих в одной плоскости).

Точка *O* называется началом координат. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Прямая *Ox* называется осью абсцисс, прямая *Oy* – осью ординат, прямая *Oz* – осью аппликат.

Пусть *A* произвольная точка. Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется радиус-вектором точки A по отношению к точке O. Координаты радиус-вектора точки A по отношению к точке O называются координатами точки A в данной системе координат.

Если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице, то такой базис называется *ортонормированным.*

Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной.*

Разложение вектора по базису

Рассмотрим декартову систему координат *Oxyz*. Пусть $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – единичные векторы соответствующих осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, т.е. $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$, и каждый из них одинаково направлен с соответствующей осью координат (рис. 6).

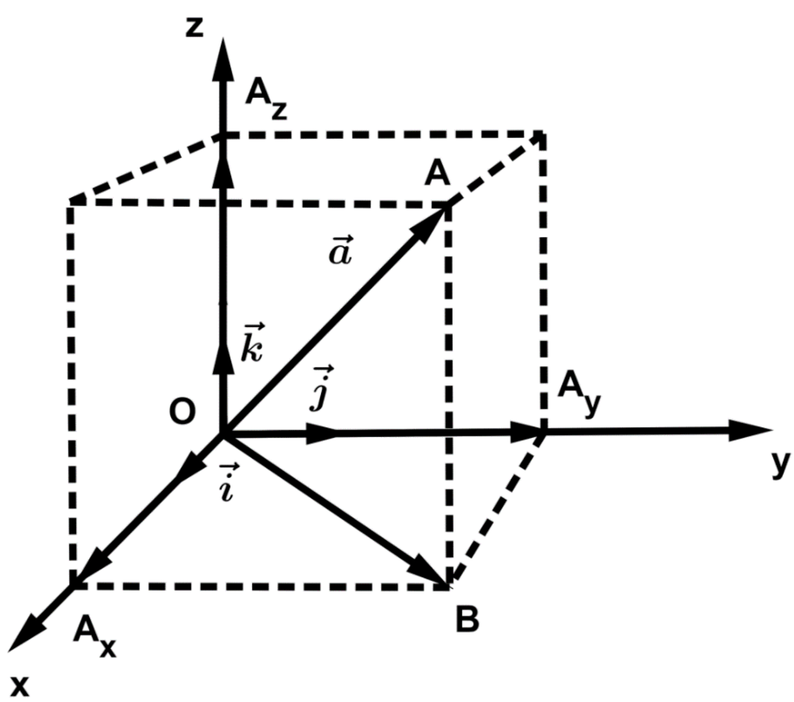


Рисунок 2.6

Тройка векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ называется базисом.

Теорема: Любой вектор $\vec{a}$ можно единственным образом разложить по базису $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, т.е. представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – числа.

Разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ по ортам $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ имеет вид

$\overrightarrow{\mathrm{O}A} = \mathrm{x}\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ или $\overrightarrow{\mathrm{O}A} = (x, y, z)$.

Если в декартовой системе координат заданы точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)} \qquad (2.2).$$

Если вектора заданы координатами: $\vec{\mathrm{a}} = (x_1, y_1, z_1)$и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)} \qquad (2.3)$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)} \qquad (2.4)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то:

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}} \qquad (2.5)$$

Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок *AB* в отношении λ $(\lambda \neq -1)$ – это значит на прямой, проходящей через точки *A* и *B*, найти такую точку *C*, чтобы $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{CB}}$. Очевидно, что если $\lambda > 0$, то точка *C* лежит внутри отрезка *AB*, если $\lambda < 0$, то точка *C* лежит вне отрезка AB.

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ даны точки $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$. Найдем на отрезке AB точку $\mathrm{C}(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении λ.

Рассмотрим векторы

$\overrightarrow{AC}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\overrightarrow{CB}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$.

Так как $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$.

Из этих равенств получаем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}} \qquad (2.6).$$

В частности, при $\lambda = 1$ имеем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}} \qquad (2.7),$$

т.е. каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Итак,

$$\boxed{(\overrightarrow{a},\vec{b}) = |a||b|\cos\varphi} \qquad (2.8),$$

где φ – угол между данными векторами.

Так как $|b|\cos\varphi$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}(\text{пр}_a\ \vec{b})$, а $|\vec{a}|\cos\varphi$ – проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}(\text{пр}_b\,\vec{a})$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в следующем виде:

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\ \text{пр}_a\,\vec{b}} \qquad (2.9)$$

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right|\ \text{пр}_b\,\vec{a}} \qquad (2.10).$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}\ ) \ \ (\textit{коммутативность}).$$

Справедливость этого свойства следует из определения скалярного произведения.

$$\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = (\vec{a},\vec{c}) + \left(\vec{b},\vec{c}\right) \ \ (\textit{дистрибутивность}).$$

Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины ,т.е.

$$(\vec{a}\,,\vec{a}) = |a|^2.$$

Теорема*:* *Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.*

Пусть в декартовой системе координат даны векторы

$\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k},\ \ \vec{b} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов можно найти по формуле:

$$\boxed{(\vec{a}\,,\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\ + y_1y_2 + z_1z_2} \qquad (2.11)$$

Соответственно $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2$, откуда

$$\boxed{|a| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}} \qquad (2.12).$$

Тогда угол φ между ненулевыми векторами можно найти, применив формулу скалярного произведения в виде:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}} \qquad (2.13).$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равно $\alpha, \beta, \gamma.$ Тогда по свойству проекции вектора на ось, имеем

$$x_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha, \quad y_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\beta, \quad z_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma.$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}$$

Числа $\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Подставляя выражение $x_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha\,,\ y_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\beta,\ \ z_1 = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma$ в равенство $|\vec{a}| = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, получаем $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2\cdot cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cdot cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cdot cos^2\gamma$.

Сократив на $|\vec{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1} \qquad (2.14),$$

т.е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, для которого

$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi} \qquad (2.15),$$

ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, что $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение по определению считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Легко убедиться, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ численно равен площади S параллелограмма, сторонами которого являются AB и AC, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, т.е. $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ (рис. 7).

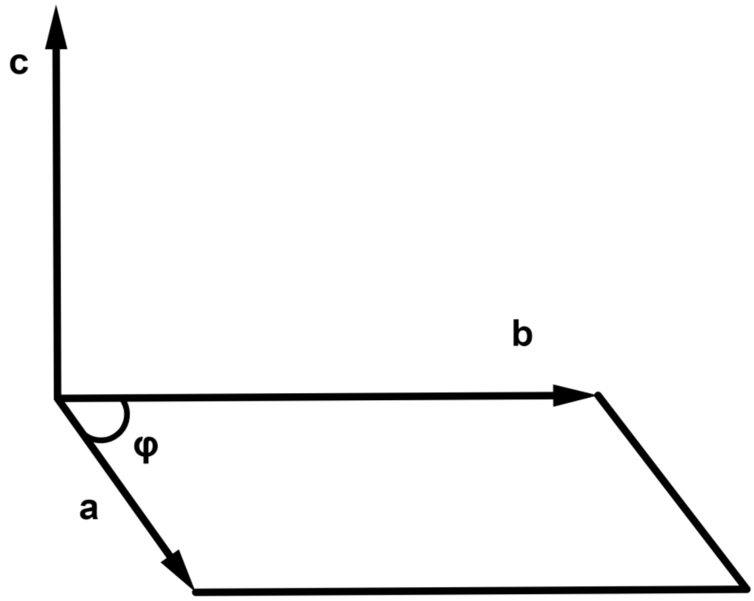


Рисунок 2.7

Имеют место следующие свойства:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$$

Справедливость этого свойства следует из определения векторного произведения векторов. Таким образом, векторное произведение не обладает коммутативным свойством.

$$\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \quad (\alpha \in R).$$

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, $\alpha \neq 0$, φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда:

$$\left|[\alpha\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\alpha\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi = |\alpha||\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi = |\alpha|\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\alpha[\vec{a}, \vec{b}]\right|$$

Вектор $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если $\alpha > 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\alpha\vec{a}, \vec{b}, [\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ образуют тройки одной и той же ориентации.

Если $\alpha < 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ и $\alpha\vec{a}, \vec{b}, [\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ образуют тройки различных ориентаций, а следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\alpha\vec{a}, \vec{b}, [\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ образуют тройки одной и той же ориентации.

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$$

Теорема. Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, имеющей правую ориентацию, даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тогда:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] \text{ или}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}].$$

Входящие в это равенство векторные произведения $[\vec{i}, \vec{i}], [\vec{j}, j], [\vec{k}, \vec{k}]$ являются нулевыми векторами вследствие коллинеарности сомножителей.

Векторное произведение $[\vec{i}, \vec{j}]$ есть вектор, модуль которого равен $|\vec{i}||\vec{j}| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Этот вектор коллинеарен вектору $\vec{k}$ и направлен в ту же сторону, следовательно $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$. Аналогично находим $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$. На основании свойства имеем $[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k},\ [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i},\ [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}$. Подставляя найденные произведения, получаем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i}$$

или

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{\imath}(y_1z_2-z_1y_2)-\vec{\jmath}(x_1z_2-z_1x_2)+\vec{k}(x_1y_2-y_1x_2).$$

Это равенство может быть символически записано в виде

$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}} \qquad (2.16).$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ умножаем скалярно на $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\vec{c}$ $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ будем обозначать $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$. Таким образом,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$$

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3,$$

т.е.

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}} \qquad (2.17).$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием компланарности трех ненулевых векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Теорема. Если $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC},\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ – некомпланарные векторы, то модуль смешанного произведения этих векторов численно равен объёму параллелепипеда, ребрами которого являются $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

РАЗДЕЛ 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1: Даны точки $A(1;2;1)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;1;2)$, $D(1;0;-1)$. Найти:

1) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;

2) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3) координаты вектора $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$;

4) проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение:

1) Для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно от координаты точки B вычесть соответствующую координату точки A, т.е. $\overrightarrow{AB}=(0-1;-1-2;1-1)=(-1;-3;0)$. Аналогично находим координаты вектора $\overrightarrow{CD}=(1-3;0-1;-1-2)=(-2;-1;-3)$.

2) Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ или $|\overrightarrow{AB}|$ находится по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{1+9+0}=\sqrt{10}$.

3)$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=3(-1;-3;0)-2(-2;-1;-3)=(-3;-9;0)+$
$+(4;2;6)=(1;-7;6)$.

4) Т.к. у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны, то можно записать для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{-1}\neq\frac{0}{-3}$. Это означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны.

Ответ: 1) $(-2;-1;-3)$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $(1;-7;6)$; 4) не коллинеарны.

Пример 2: Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}|=\sqrt{2}; \left|\vec{b}\right|=2$; угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°.

Найти:

1) скалярное произведение векторов $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$;

2) скалярный квадрат вектора $\vec{m}$.

Решение:

1) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\ \vec{a}\cdot\vec{b}--2\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin 45°-2\left|\vec{b}\right|^2=2+\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\ 2\cdot 4=-4$

2) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 45°+\left|\vec{b}\right|^2=2+4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4=14.$

Ответ: 1) -4; 2) 14.

Пример 3: Найти при каком значении α, векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}+$ $+5\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны.

Решение:

Векторы $\vec{a}(\alpha;3;5)$ и $\vec{b}(\alpha;2;-\alpha)$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha\cdot\alpha+3\cdot 2+5\cdot(-\alpha)=0\ \ =>=>\ \alpha^2-5\alpha+6=0$. Решив квадратное уравнение получаем $\alpha=2$ или $\alpha=3$.

Ответ: 2; 3.

Пример 4: Даны векторы $\vec{a}(3;-5;8)$; $\vec{b}(1;5;0)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Вычислить проекцию вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Решение:

Пусть вектор $3\vec{a}-2\vec{b}=\vec{d}$, тогда $\vec{d}=3(3;-5;8)-2(1;5;0)=$

$=(9;-15;24)-(2;10;0)=(7;-25;24).$

А вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(3;-5;8)+(1;5;0)=(4;0;8).$

Согласно формуле $np_{\vec{c}}\vec{d}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|}$ запишем:

$$np_{\vec{c}}\vec{d}=\frac{4\cdot 7+0\cdot(-25)+8\cdot 24}{\sqrt{4^2+0^2+8^2}}=\frac{220}{4\sqrt{5}}==11\sqrt{5}.$$

Ответ: $11\sqrt{5}$.

Пример 5: Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, причем $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$;

$|\vec{p}| = \sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 45°.

Решение:

Площадь параллелограмма будет численно равно модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Т.е. $|[(2\vec{p} - 3\vec{q})(\vec{p} + 2\vec{q})]| = |2[\vec{p};\vec{p}] + 4[\vec{p};\vec{q}] - 3[\vec{q};\vec{p}] - 6[\vec{q};\vec{q}]| =$

(т.к. $[\vec{p};\vec{p}] = [\vec{q};\vec{q}]$=0 и $[\vec{p};\vec{q}] = -[\vec{q};\vec{p}]$ по свойству векторного произведения)

$$= |7[\vec{p};\vec{q}]| = 7|[\vec{p};\vec{q}]| = 7 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin 45° = 7 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\text{ед}^2.$$

Ответ: 14ед^2.

Пример 6: Найти координаты вектора $\vec{c}$, равного векторному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{b}(3;0;1)$.

Решение:

Запишем векторное произведение векторов, заданных в координатах:

$$[\vec{a};\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -1\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + +3\vec{k}.$$

Ответ: $(-1;5;3)$.

Пример 7: В пространстве даны точки $A(3;1;4)$; $B(-1;6;1)$;

$C(-1;1;6)$; $D(0;4;-1)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение:

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{BA} = (3+1;1-6;4-1) = (4;-5;3)$;

$\overrightarrow{BC} = (-1+1; 1-6; 6-1) = (0; -5; 5);$

$\overrightarrow{BD} = (0+1; 4-6; -1-1) = (1; -2; -2).$

Т.к. объем пирамиды равен: $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{BD}|$

$$\left[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right] \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 70.$$

Значит $\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot |70| = \frac{35}{3}$ ед^3.

Ответ: $\frac{35}{3}$ ед^3.

Пример 8: Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 4)$, $\vec{c} = (-2; 0; 1)$, $\vec{d} = (1; 3; 2)$ в некотором базисе. Показать, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение:

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будут образовывать базис, если будут не компланарными, т.е. их смешанное произведение не будет равным нулю.

Проверим $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0.$

Т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис.

Тогда $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$

$(1; 3; 2) = x(1; 2; 0) + y(3; -1; 4) + z(-2; 0; 1).$

Можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = x + 3y - 2z \\ 2 = 2x - y + 0z \\ 3 = 0x + 4y + z \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью Формул Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-23$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}=-38$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-7$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix}=-18$$

Тогда $x=\frac{-38}{-23}=\frac{38}{23},\quad y=\frac{7}{23},\quad z=\frac{18}{23}$.

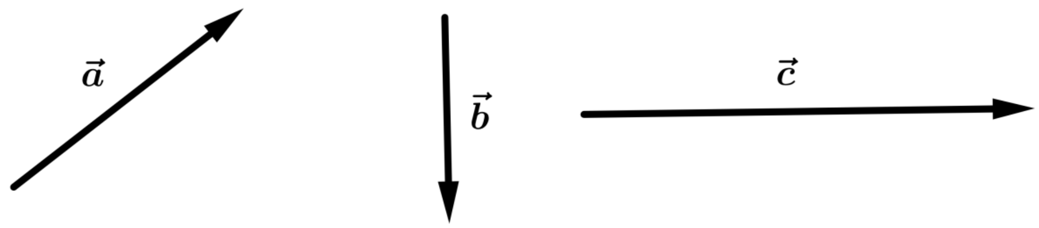
Т.е. координаты вектора $\vec{d}\left(\frac{38}{23};\frac{7}{23};\frac{18}{23}\right)$.

Ответ: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – образуют базис; $\vec{d}\left(\frac{38}{23};\frac{7}{23};\frac{18}{23}\right)$.

РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. АУДИТОРНАЯ РАБОТА

Тема: Векторная алгебра

1. Даны векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$



Изобразить на рисунке линейную комбинацию:

а) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$;

в) $-\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

2. Пользуясь свойствами действий над векторами, упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}$ б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA})$.

3. Дан параллелограмм ABCD, O – точка пересечения его диагоналей, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор:

а) $\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DA}$.

4. Даны точки $A(-2; p; 1)$, $B(-1; 0; 2)$ и $C(a; 4; k)$. Найти сумму $p + a + k$, если $\overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{BC}$.

5. Найти длину медианы AD треугольника с вершинами $A(-1; 1; 2)$, $B(13; 4; 3)$ и $C(-3; 2; 7)$.

6. Найти сумму координат точки пересечения диагоналей, если в параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB}(-4; 4; -2)$, $\overrightarrow{CB}(-3; -6; 1)$ и $A(3; 8; -5)$.

7. Найти расстояние от точки C до начала координат, если в параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{CD}(-3; 4; 2)$, $\overrightarrow{CB}(5; -2; 4)$ и $A(5; 8; 0)$.

8. а) Запишите координаты векторов в трёхмерном пространстве:

$\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$,

б) Запишите разложение по координатам векторам $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ векторов:

$\vec{m}(-1; 2; 3)$, $\vec{n}\left(\frac{1}{2};\ -3; 0\right)$, $\vec{k}\left(4\frac{1}{3};\ -5\frac{4}{5}; 5\right)$,

9. Укажите среди векторов $\vec{a}(-2; 1; 3)$, $\vec{b}(5; 10;\ -20)$, $\vec{c}(-6; 3; 9)$, $\vec{d}\left(\frac{1}{2}; 1;\ -10\right)$, $\vec{e}(10;\ -5; 0)$ пары коллинеарных векторов.

10. Докажите, что векторы $\vec{c}(-1; 2; 5)$ и $\vec{d}(6;\ -12; -30)$ противоположно направленные.

11. а) Известно, что векторы $\vec{a}(2; -1; k)$ и $\vec{b}(-4; m; 3)$ коллинеарны. Найдите число m и k.

12. Дан треугольник ABC, где A(2; -1), B(-1; 1), C(4; 2). Найдите координаты:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

13. Найдите длину вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(-2;7;0)$, $\vec{b}(4;\ -1;0)$.

14. Векторы $\vec{a}(x;2)$ и $\vec{b}(3;y)$ имеют одинаковые не равные нулю суммы координат. Найти $x+y$, если известно, что векторы $5\vec{a}+2\vec{b}$ и $4\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны.

15. Найти сумму координат вектора $\overrightarrow{BC}$, если в треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соотвественно, $\overrightarrow{AB}(3;-5;6)$, $\overrightarrow{CB}(-2;1;7)$.

16. Найти длину вектора $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, если $|\vec{a}|=13$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=22$ и $\left|\vec{b}\right|=19$.

17. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$, а угол между этими векторами равен 60°. Найти длину вектора равного:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

18. Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, причем $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, а угол между ними равен 30°. Найти $|\vec{m}+2\vec{n}|$.

19. Найти на оси ординат точку E, через которую проходит отрезок, соединяющий точки $A(-2;3)$ и $B(7;-4)$.

20. Даны координаты вершин треугольника: $A(-1;-2)$, $B(-4;2)$, $C(5;6)$. Найти:

а) длину медианы, проведенную из вершины B;

б) координаты точки пересечения медиан;

в) длину биссектрисы угла A.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Вычислить угол между его диагоналями.

22. Даны векторы $\vec{a}(7;2;-1)$, $\vec{b}(0;3;2)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

б) проекцию вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

23. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 5$ и угол между векторами m и n равен 120°. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) $np_{\vec{b}}(4\vec{a} - 5\vec{b})$;

в) $\cos(2\vec{b} - \vec{a}\,; 4\vec{b})$.

24. Даны два вектора *a(5; 3; -4)*, *b(6; 7; -8)*. Найдите координаты векторного произведения $[a,b]$.

25. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 3j + 5k$ и $b = i + 2j + k$.

26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = 6i + 3j - 2k$ и $b = 3i - 2j + 6k$.

27. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1), B(2; 3; 4), C(4; 3; 2)$.

28. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a + 3b$ и $3a + b$, если $|a| = |b| = 1$ $\angle(\mathrm{a}; \mathrm{b}) = 30°$.

29. Вычислить площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} \in \vec{b}$, причём $\vec{a} = 2p - 3q$, $\vec{b} = p + 2q$ $|p| = \sqrt{2}$ $|q| = 2$ $\angle(\mathrm{p}; \mathrm{q}) = 45°$.

30. Вычислить угол α, образованный векторами $\vec{a} = (1; 0; -2)$ $\vec{b} = (0; -1; 1)$.

31. Сила *F* приложена к точке *A*. Вычислите:

а) работу *F* в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку *B*.

б) угол, под которым направлена сила к *AB*, если $F(5; -3; 9)$, $A(3; 4; -6)$, $B(2; 6; 5)$.

32. Найти смешанное произведение векторов $a = 2i - j - k$; $b = i + 3j - k$; $c = i + j + 4k$.

33. Выяснить, будут ли векторы $a = 2i + 5j - 7k$; $b = i + j - k$; $c = i + 2j + 2k$ компланарными.

34. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$; $B(4;3;3)$; $C(4;5;4)$; $D(5;5;6)$.

35. Показать, что точки A(5;7;-2); B(3;1;-1); C(9;4;-4); D(1;5;0) лежат в одной плоскости.

36. Даны векторы $a = 4i + 4k$, $b = -i + 3j + 2k$ и $c = 3i + 5j$. Найдите:

а) произведение векторов a, b и $5c$;

б) модуль векторного произведения $3c$ и b;

в) скалярное произведение векторов a и $3b$;

г) будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a и b;

д) будут ли компланарны векторы a, b, c.

37. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2;3;4)$; $B(4;7;3)$; $C(1;2;2)$; $D(-2;0;-1)$. Вычислить:

а) площадь грани *ABC*

б) площадь сечения, проходящего через середины рёбер *AB*, *AC*, *AD*;

в) объём пирамиды *ABCD*.

38. Составить линейную комбинацию для векторов $\overrightarrow{a_1}(0;1;5)$; $\overrightarrow{a_2}(1;0;-1)$; $\overrightarrow{a_3}(2;1;0)$, где $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = -1$.

39. Проверить, образуют ли векторы базис:

а) $\vec{a} = (3;-1;0)$; $\vec{b} = (2;3;1)$; $\vec{c} = (-1;4;3)$

б) $\vec{a} = (1;1;1)$; $\vec{b} = (2;0;2)$; $\vec{c} = (3;3;3)$

Если образуют, найти координаты вектора $d = (2;3;7)$ в этом базисе.

40. Найти максимальное число линейно-независимых векторов: $a_1(1;1;-1;-1)$; $a_2(1;2;3;4)$; $a_3(8;7;6;5)$; $a_4(-1;-1;1;1)$;

РАЗДЕЛ 2. ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

2. а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\vec{0}$. **3.** а) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **4.** 3 **5.** 7

6. 5 **7.** 9 **8.** а) $\vec{a}(-4;-5;-1)$ $\vec{b}(-1;1;0)$ $\vec{d}(1;-1;0)$. **9.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$ **11.** $m=2; k=-1{,}5$. **13.** 10 **14.** 5 **15.** 8 **16.** 24 **17.** а) $\sqrt{19}$; б) $\sqrt{7}$. **18.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **19.** $\frac{13}{9}$ **20.** а) 6; б) $(0;2)$; в) $\frac{16}{3}$. **21.** 90°. **22.** а) 58; б) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **23.** а) 518; б) $-\frac{74}{\sqrt{79}}$; в) $\frac{19\sqrt{3081}}{2054}$. **24.** $(4;16;17)$. **25.** $-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$. **26.** 49. **27.** $2\sqrt{6}$. **28.** 4. **29.** 14. **30.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$. **31.** а) 88; б) $\arccos\frac{44\sqrt{1610}}{2415}$. **32.** 33. **33.** не компланарны. **34.** $\frac{7}{6}$. **36.** а) -480; б) $6\sqrt{83}$; в) 12; г) не коллинеарны, не ортогональны; д) не компланарны. **37.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{110}$; б) $\frac{\sqrt{286}}{8}$; в) $\frac{11}{6}$. **38.** $(1;0;2)$. **39.** а) образует базис, $\vec{d}(3;-2;3)$; б) не образует базис. **40**. 3.

РАЗДЕЛ 2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. ВМ – медиана треугольника АВС, $\overrightarrow{BA}=\vec{x}, \overrightarrow{BC}=\vec{y}$. Выразите через векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вектор $\overrightarrow{AM}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2;-5;4)$, $B(1;-3;1)$ и $C(-3;4;-6)$. Найти сумму координат четвертой вершины.

3. а) Запишите координаты векторов в трёхмерном пространстве:

$\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{e}=-\vec{i}$, $\vec{f}=2\vec{j}+2\vec{k}$

б) Запишите разложение по координатам векторам $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ векторов:

$\vec{l}(\sqrt{2};0;7)$, $\vec{t}(0;\ -0{,}2;\ -3)$.

4. Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$, $\vec{b}(5;1;\ -2)$. Найдите координаты вектора, равного:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}+5\overrightarrow{b}$; г) $-\vec{a}+0{,}2\overrightarrow{b}$.

5. Докажите, что векторы $\vec{a}(4;\ -8;20)$ и $\vec{b}(1;\ -2;5)$ сонаправленные.

6. Найти периметр треугольника с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(3;1;3)$ и $C(7;-3;5)$.

7. Найти длину вектора $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{a}+\vec{b}|=11$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

8. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 1;\ -2)$, $C(7;\ 9;\ 1)$. Найти:

а) длины сторон треугольника, где *A, B* и *C* вершины этого треугольника.

б) Найти координаты точки *D,* пересечение биссектрисы угла *A* со стороной *CB.*

в) Длины всех медиан этого треугольника.

г) Углы между сторонами *AB* и *AC, BA* и *BC.*

д) Угол между медианой AM_1 и BM_2.

9. На оси Ох найти точку, равноудалённую от точек $A(2;\ -4;\ 5)$ и $B(-3;\ 2;\ 7)$.

10. Даны точки А(3; 3; 3) и В(-1; 5; 7). Найти:

1) координаты точек *C* и *D,* делящих отрезок *AB* на три равные части

2) координату точки *E*, делящую отрезок в отношении 4:3.

11. Даны векторы $a = -5m - 4n,\ \ b = 3m + 6n,$ где $|m| = 3,\ \ |n| = 5$ $\angle\,(m;\ n) = \frac{5\pi}{3}$. Найти $\left(-2a + \frac{1}{3}b\right) \cdot (a + 2b)$

12. Даны координаты точек $A(4;\ 6;\ 3), B(-5;\ 2;\ 6), C(4;\ -4;\ 3)$. Найдите:

1) Модуль вектора $\vec{a}$

2) Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) Проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

Если $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC};\ \ \vec{b} = \overrightarrow{AB};\ \ \vec{d} = \overrightarrow{AC}; \vec{c} = \overrightarrow{BC}.$

13. Даны векторы $a = 2i + 2j + k$ и $b = 6i + 3j + 2k$. Найти $\text{пр}_a b$ и $\text{пр}_b a$.

14. Найти векторное произведение векторов $a = 2i + 5j + k$ и $b = i + 2j - 3k$.

15. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$ и $C(0; 1; 0)$.

16. Найти смешанное произведение векторов $a = i - j + k,\ \ b = i + j + k,\ \ c = 2i + 3j + 4k$.

17. Показать, что векторы $a = 7i - 3j + 2k,\ \ b = 3i - 7j + 8k,\ \ c = i - j + k$ компланарны.

18. Даны точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, и $D(3;7;2)$:

а) Вычислить объём треугольной пирамиды с вершинами в данных точках.

б) Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.

19. Сила $F = (2;3;-5)$ приложена к точке $A(1;-2;2)$. Вычислить работу силы F в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1;4;0)$.

20. Доказать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе: $a = (3;1;2)$; $b = (-7;-2;-4)$; $c = (-4;0;3)$; $d = (16;6;15)$.

РАЗДЕЛ 2. ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. $\frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$. **2.** -3 **3.** а) $\vec{b}(2;-3;7)$; $\vec{e}(-1;0;0)$; $\vec{f}(0;2;2)$. **4.** а) $(2;3;-1)$; б) $(-8;1;-1)$. **6.** 16. **7.** 7. **8.** а) 5; $\sqrt{77}$; 10; б) $(6;5;-1)$; в) $\left(3\sqrt{5};\sqrt{26};6\right)$. **9.** $(-1{,}7;0;0)$. **10.** а) $C\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$; $D\left(\frac{1}{3};\frac{13}{3};\frac{17}{3}\right)$; б) $\left(\frac{5}{7};\frac{29}{7};\frac{37}{7}\right)$. **12.** а) $2\sqrt{649}$; б) 224. **13.** $\frac{20}{3};\frac{20}{7}$. **14.** $-17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$. **15.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$. **16.** 4. **18.** а) 20ед^3; б) $\frac{4\sqrt{510}}{17}$. **19.** 28. **20.** образуют базис, $\vec{d}(2;-2;1)$.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема 3.1 Линии первого порядка

Простейшей линией на плоскости является прямая – линия первого порядка, так как содержит переменные x и y только в первой степени.

Основные виды уравнений прямой на плоскости:

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3.1)$$

где коэффициенты A, B, C - постоянные числа, вектор нормали $\vec{n}(A, B)$.

Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (3.2)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.3)$$

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (3.4)$$

где вектор $\vec{s}(m, n)$- направляющий вектор прямой, m и n - постоянные числа, точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b \tag{3.5}$$

или, если известна точка $M_0(x_0, y_0)$ на прямой:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{3.6}$$

где угловой коэффициент $k = tg\varphi$, угол φ - образован прямой с положительным направлением оси OX.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле:

$$d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3.7}$$

Тема 3.2 Линии второго порядка

К линиям второго порядка относятся кривые, определяемые уравнениями второй степени относительно координат x и y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.8}$$

где A, B, C, D, E, F -постоянные действительные числа и A, B, C одновременно не равны нулю.

Уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{3.9}$$

задает на плоскости XOY окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R. При переносе начала координат в центр окружности получаем более простое каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3.10}$$

Уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.11}$$

задает на плоскости XOY эллипс с центром в точке $(x_0; y_0)$, где числовые параметры a и b, соответственно, большая и малая полуоси. Если же центр эллипса находится в начале координат, то получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.12}$$

с характеристиками:

$$c^2 = a^2 - b^2 \tag{3.13}$$

где $F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$ - фокусы эллипса.

Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{3.14}$$

Уравнения директрис эллипса:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

Уравнение:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.16)$$

задает на плоскости XOY гиперболу с центром в точке $(x_0; y_0)$, где числовые параметры a и b, соответственно, действительная и мнимая полуоси. Если же центр гиперболы находится в начале координат, то получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.17)$$

с характеристиками: $c^2 = a^2 + b^2$, где $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$ - фокусы гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (3.18)$$

Уравнения директрис гиперболы:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.19)$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (3.20)$$

Уравнение:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \qquad (3.21)$$

задает на плоскости XOY параболу с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где p - фокальный параметр. Для параболы с вершиной в начале координат получаем каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px \qquad (3.22)$$

с характеристиками: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ - фокус параболы.

Уравнение директрисы параболы:

$$x = -\frac{p}{2} \qquad (3.23)$$

Тема 3.3 Плоскость в пространстве

Простейшей поверхностью в пространстве является плоскость. В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3.24)$$

где A, B, C, D- некоторые постоянные, причем ее вектор нормали $\vec{n} = \vec{n}(A, B, C)$.

Если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на плоскости, получаем уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3.25}$$

Если плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c, то получаем уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{3.26}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$определяется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.27}$$

Тема 3.4 Прямая в пространстве

Основными уравнениями, задающими прямую l в пространстве R^3, являются:

Каноническое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{3.28}$$

где точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$; $\vec{s}(m; n; p)$ - каждый ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей и называемый направляющим вектором.

Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{3.29}$$

где t - числовой параметр.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{3.30}$$

Прямая как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Угол между двумя прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между их направляющими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} \tag{3.32}$$

Расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2 определяется по формуле:

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{s} \right|}{\left| \vec{s} \right|} \qquad (3.33)$$

где точка $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right) \in l_1$ и точка $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right) \in l_2$.

Тема 3.5 Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F\left(x, y, z\right) = 0$, где $F\left(x, y, z\right)$ - многочлен 2-ой степени. Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой 2-го порядка. Рассмотрим канонические уравнения таких поверхностей.

1. Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с центром в точке $\left(0;0;0\right)$ и радиусом R.

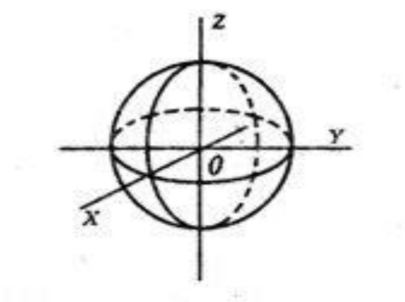


Рисунок 3.1 – сфера

Если центр сферы находится в точке $\left(x_0; y_0; z_0\right)$, то ее уравнение имеет вид: $\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2$.

2. Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

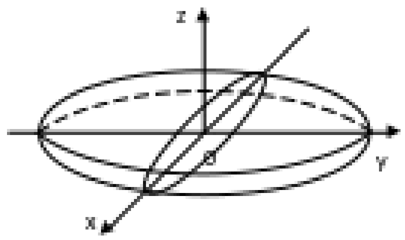


Рисунок 3.2 - эллипсоид

3. Гиперболоид:

а) однополостный: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

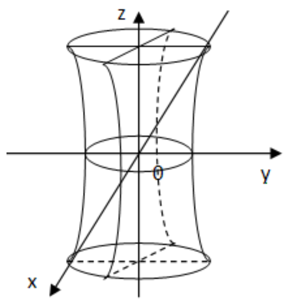


Рисунок 3.3 – гиперболоид однополостный

б) двуполостный: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

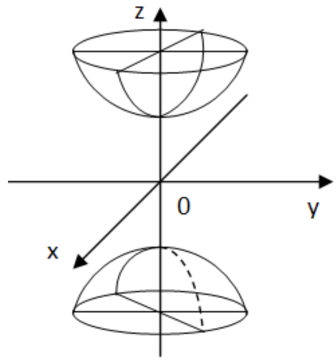


Рисунок 3.4 – гиперболоид двуполостный

4. Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

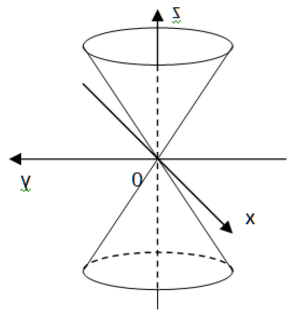


Рисунок 3.5 - конус второго порядка

5. Параболоид:

а) эллиптический: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

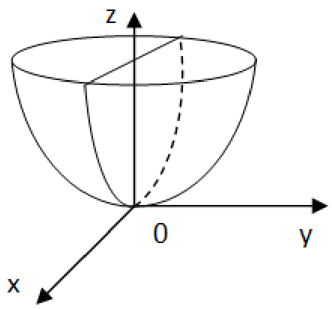


Рисунок 3.6 – параболоид эллиптический

б) гиперболический $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

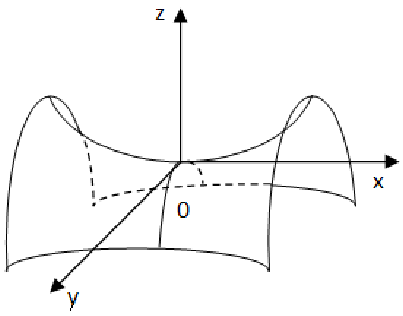


Рисунок 3.7 – параболоид гиперболический

6. Цилиндр второго порядка:

а) эллиптический: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

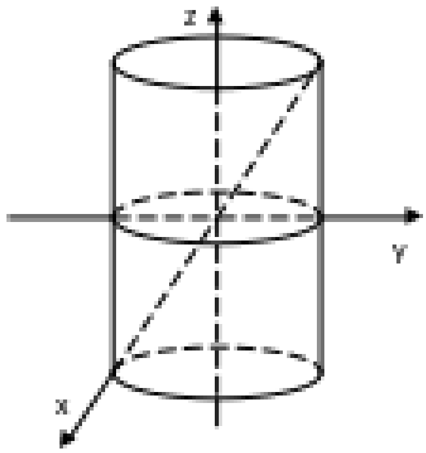


Рисунок 3.8 – цилиндр эллиптический

б) гиперболический: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

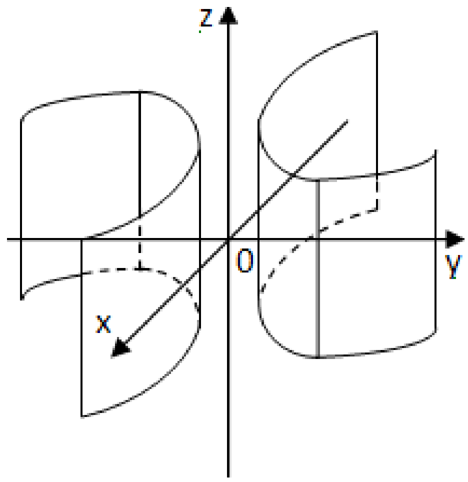


Рисунок 3.9 – цилиндр гиперболический

в) параболический: $y^2=2px$.

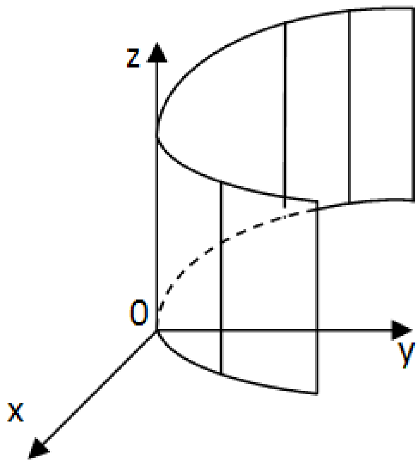


Рисунок 3.10 – цилиндр параболический

РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Дана прямая l: $3x-2y-1=0$. Найти: а) угловой коэффициент прямой l; б) составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M_0(2;1)$ параллельно данной прямой l; в) составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M_0(2;1)$ перпендикулярно данной прямой l.

Решение. а) Выразим из уравнения $3x-2y-1=0$ переменную y и получим: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$. Тогда угловой коэффициент прямой $k=\frac{3}{2}$; б) Так как прямая l параллельна прямой l_1, то у них одинаковые векторы нормали, т.е. $\vec{n}_{l_1}=\vec{n}_l(3;-2)$. Тогда $l_1: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow 3(x-2)-2(y-1)=0 \Rightarrow \underline{3x-2y-4=0}$.

в) Так как $l \perp l_2$, то $\vec{n}_l=\vec{s}_{l_2}(3;-2)$. Тогда $l_2: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \Rightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}$ $\Rightarrow -2x+4=3y-3 \Rightarrow \underline{2x+3y-7=0}.$

Пример 2. Определить взаимное расположение прямых l_1 и l_2. Если они пересекаются, то найти угол между ними и их точку пересечения; если они параллельны, то найти расстояние между ними: а) $l_1: x-4y+3=0$, $l_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{1}$

; б) $l_1: y=4x+5$, $l_2: \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}$.

Решение. а) Прямая $l_1: x-4y+3=0 \Rightarrow \vec{n}_{l_1}=(1;-4)$. Прямая $l_2: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{1}$ $\Rightarrow x-1=4y+12 \Rightarrow x-4y-13=0 \Rightarrow \vec{n}_{l_2}=(1;-4)$. Так как $\vec{n}_{l_1}=\vec{n}_{l_2}$, то прямые l_1 и l_2 - параллельны. Чтобы найти расстояние между ними, выберем, например, на прямой l_1 точку $M_0(-3;0)$ (эта точка лежит на прямой l_1, т.к. ее координаты удовлетворяют уравнению прямой l_1) и воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой: $d(M_0,l)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow d(M_0,l_2)=\dfrac{|1\cdot(-3)-4\cdot 0-13|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=$

$\dfrac{|-16|}{\sqrt{17}}=\dfrac{16}{\sqrt{17}}$.

б) Прямая $l_1: y=4x+5 \Rightarrow 4x-y+5=0$, $\vec{n}_{l_1}=(4;-1)$. Прямая l_2: $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2} \Rightarrow 2x+4=-y+1 \Rightarrow 2x+y+3=0$, $\vec{n}_{l_2}=(2;1)$. Так как $\vec{n}_{l_1}\neq\vec{n}_{l_2}$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются. Угол между прямыми l_1 и l_2 найдем как угол между нормалями: $\cos(l_1,l_2)=\cos(\vec{n}_{l_1},\vec{n}_{l_2})=\dfrac{\vec{n}_{l_1}\cdot\vec{n}_{l_2}}{|\vec{n}_{l_1}|\cdot|\vec{n}_{l_2}|}=\dfrac{4\cdot 2+(-1\cdot 1)}{\sqrt{4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\dfrac{7}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{7}{\sqrt{85}}$.

Таким образом, угол $\varphi=arccos\dfrac{7}{\sqrt{85}}$. Общую точку M^* прямых l_1 и l_2 найдем из системы $\begin{cases}4x-y=-5\\2x+y=-3\end{cases}$, решая ее по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}.$$

$$y=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$ Таким образом, точка $M^*\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Пример 3. Найти точку, симметричную точке $M_1(-6;4)$ относительно прямой $4x-5y+3=0$.

Решение. Пусть прямая $l: 4x-5y+3=0$. Обозначим искомую точку через M_2. Точки M_1 и M_2 лежат на прямой, перпендикулярной исходной прямой, и на одинаковых расстояниях от нее. Поэтому $l\perp M_1M_2 \Rightarrow \vec{n}_l=\vec{s}_{M_1M_2}(4;-5)$. Запишем каноническое уравнение прямой M_1M_2:

$\frac{x+6}{4}=\frac{y-4}{-5}\Rightarrow -5x-30=4y-16\Rightarrow 5x+4y+14=0$. Пусть точка M^* $(x^*;y^*)==l\cap M_1M_2\Rightarrow M^*:\begin{cases}4x-5y=-3\\ 5x+4y=-14\end{cases}$. Тогда $x^*=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -14 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-82}{41}=-2$

$y^*=\frac{\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & -14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-41}{41}=-1$. Так как $M^*(-2;-1)$- середина отрезка $[M_1M_2]$, то

$\frac{x_1+x_2}{2}=x^*,\frac{y_1+y_2}{2}=y^*\Rightarrow\begin{cases}\frac{-6+x_2}{2}=-2\\ \frac{4+y_2}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow x_2=2, y_2=-6$. Таким образом, наша точка $M_2(2;-6)$.

Пример 4. Даны уравнения двух параллельных прямых $2x-3y+7=0$ и

$4x-6y-3=0$. Составить уравнение прямой, им параллельной и проходящей посередине между ними.

Решение. Пусть l_1: $2x-3y+7=0$ и $l_2: 4x-6y-3=0$. Выберем произвольным образом две точки, лежащие на этих прямых: $M_1(7;7)\in l_1$, $M_2\left(0;-\frac{1}{2}\right)\in l_2$. Искомая прямая l поделит отрезок $[M_1M_2]$ пополам. Найдем координаты середины отрезка $[M_1M_2]$: $x_0=\frac{7+0}{2}=\frac{7}{2}$, $y_0=\frac{7+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{13}{4}$. Остается записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку $(x_0;y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}(2;-3)$: $2\cdot\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\cdot\left(y-\frac{13}{4}\right)=0$ или $2x-7-3y+\frac{39}{4}=0\Rightarrow \underline{8x-12y+11=0}$.

Пример 5. Составить уравнение окружности:

а) с центром в начале координат и радиусом $R=2$; б) с центром в точке $(-1;4)$ и радиусом $R=3$; в) с центром в точке $(2;-3)$, если точка $(0;1)$ лежит на окружности; г) точки $M\,(-2;1)$, $N\,(2;5)$ являются координатами концов ее диаметра; д) с центром в точке $(1;-1)$, если прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к этой окружности; е) три точки $(1;1)$, $(1;-1)$, $(2;0)$ лежат на окружности.

Решение. Используя каноническое уравнение окружности, получим:

а) $(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$ или $x^2+y^2=4$; б) $(x+1)^2+(y-4)^2=9$;

в) $(x-2)^2+(y+3)^2=R^2$. Найдем радиус окружности R, подставив точку $(0;1)$: $(0-2)^2+(1+3)^2=R^2\Rightarrow R^2=20$. Получим $(x-2)^2+(y+3)^2=20$;

г) обозначим через $C(x_0;y_0)$ - центр окружности. Так как точка C - середина отрезка $[MN]$, то $x_0=\dfrac{2+(-2)}{2}=0$, $y_0=\dfrac{5+1}{2}=3$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4;4)$ и $R=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN}\right|=$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2}=2\sqrt{2}$. Получим $x^2+(y-3)^2=8$;

д) Расстояние от центра окружности до ее касательной и есть радиус окружности. Поэтому $R=d=\dfrac{\left|5\cdot 1-12\cdot(-1)+9\right|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2$ и уравнение окружности имеет вид: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

е) Так как три точки лежат на окружности, то подставив их в уравнение окружности, получим систему уравнений: $\begin{cases}(1-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2\\(1-x_0)^2+(-1-y_0)^2=R^2\\(2-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2\end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, найдем $y_0=0$. Вычитая из второго уравнения третье, найдем $x_0=1$ и $R=1$. Получим искомое уравнение: $(x-1)^2+y^2=1$.

Пример 6. Привести к каноническому виду и построить заданную кривую: $x^2+y^2+2x-10y+1=0$.

Решение. Собирая слагаемые с одинаковыми переменными и выделяя полные квадраты, получим

$$x^2+2x+1-1+y^2-10y+25-25+1=0\Rightarrow(x+1)^2+(y-5)^2=25.$$

Пример 7. Записать уравнение окружности $x^2+y^2-5x=0$ в полярных координатах.

Решение. Учитывая связь между декартовыми и полярными координатами

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, получим $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 5r\cos\varphi = 0$ $\Rightarrow r^2 - 5r\cos\varphi = 0 \Rightarrow r = 5\cos\varphi$.

Пример 8. Дан эллипс $2x^2 + 6y^2 = 12$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Тогда

$$a = \sqrt{6},\ b = \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \Rightarrow F_{1,2} = (\pm 2;0),\ \ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},\ \ x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x = \pm 3.$$

Пример 9. Составить каноническое уравнение эллипса, если: а) большая ось равна 12, расстояние между фокусами равно 8; б) малая ось равна 10, эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$; в) малая полуось равна 3, расстояние между директрисами равно 13.

Решение. а) $\begin{cases} 2a = 12 \\ 2c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ c = 4 \end{cases}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{20}$. Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$;

б) $\begin{cases} 2b = 10 \\ \varepsilon = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow a = 13$. Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\begin{cases} b = 3 \\ \frac{2a}{\varepsilon} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 2a = 13\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow 2a^2 = 13\sqrt{a^2 - 9}$. Возводя в квадрат и решая биквадратное уравнение, получим корни $a^2 = \left[\begin{array}{l} 13 \\ \frac{117}{4} \end{array}\right.$. Уравнения эллипса:

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Пример 10. Установить, что уравнение задает эллипс $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ и найти его центр, полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду: $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0 \Rightarrow 5\left(x^2-6x\right)+9\left(y^2+2y\right)+9=0 \Rightarrow$

$5\left(x^2-6x+9-9\right)+9\left(y^2+2y+1-1\right)+9=0 \Rightarrow 5\left(x-3\right)^2+9\left(y+1\right)^2=45 \Rightarrow$

$\frac{\left(x-3\right)^2}{9}+\frac{\left(y+1\right)^2}{5}=1$ -эллипс.

Центр в точке $Ц\left(3;-1\right)$; $a=3$, $b=\sqrt{5}$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$, $F\left(1;-1\right), F\left(5;-1\right)$;

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$; $x-3=\pm\frac{a}{\varepsilon}\Rightarrow x-3=\pm\frac{9}{2}\Rightarrow 2x-15=0, 2x+3=0$.

Пример 11. Составить каноническое уравнение гиперболы, если: а) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12; б) действительная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $\left(9;-4\right)$; в) фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ и эксцентриситет гиперболы равен $\frac{5}{4}$.

Решение. а) В уравнении $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ найдем неизвестные параметры a и b : $\begin{cases}2a=10\\2c=12\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=6 \end{cases}$. Так как для гиперболы $c^2=a^2+b^2$, то $b^2=11$. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$.

б) Из условия $\Rightarrow \begin{cases} 2a=6 \\ \frac{9^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ \frac{81}{9}-\frac{16}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$.

в) Из условия $\Rightarrow c_э{}^2=a_э{}^2-b_э{}^2 \Rightarrow c_э=\sqrt{49-24}=5\equiv c_г$. Для гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{4}=\frac{5}{a} \Rightarrow a=4$; $c_г{}^2=a_г{}^2+b_г{}^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b=3$. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Пример 12. Найти угол между асимптотами гиперболы, эксцентриситет которой равен 2.

Решение. $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2 \Rightarrow \frac{b}{a}=\pm\sqrt{3}$. Уравнения асимптот: $y=\pm\sqrt{3}x$ или $\sqrt{3}x-y=0$ и $\sqrt{3}x+y=0$. Угол между асимптотами найдем через скалярное произведение их нормалей:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 1}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi=60^0.$$

Пример 13. Привести к каноническому виду уравнение кривой $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$ и найти все ее характеристики, сделать рисунок.

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду:

$$\left(5x^2+10x\right)-\left(6y^2+12y\right)-31=0 \quad\Rightarrow\quad 5\left(x^2+2x+1-1\right)-6\left(y^2+2y+1-1\right)-31=0$$

$\Rightarrow$

$5\left(x+1\right)^2-6\left(y+1\right)^2=30 \;\Rightarrow\; \dfrac{\left(x+1\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}-\dfrac{\left(y+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$ - гипербола с полуосями

$a=\sqrt{6}\,, b=\sqrt{5}\,,\qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{11}\,,\qquad F_1\left(-1-\sqrt{11};-1\right),\qquad F_2\left(-1+\sqrt{11};-1\right),$

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{11}{6}}\,.$

Пример 14. Записать каноническое уравнение параболы, построить график: а) парабола с параметром $p=3$ расположена в правой полуплоскости; б) парабола с параметром $p=\dfrac{1}{4}$ расположена в нижней полуплоскости.

Решение. а) Так как парабола расположена в правой полуплоскости, то ее каноническое уравнение $y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 3x \Rightarrow y^2=6x$; б) Так как парабола расположена в нижней полуплоскости, то ее каноническое уравнение $x^2=-2py \Rightarrow x^2=-2\cdot\dfrac{1}{4}y \Rightarrow x^2=-\dfrac{1}{2}y$.

Пример 15. Определить величину прогиба троса в середине между точками крепления (точки крепления расположены на одинаковой высоте), если трос имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления равно 20 м, величина прогиба троса на расстоянии 2 м от точки крепления (считая по горизонтали) равна 14,4 см.

Решение. Поместим трос так, чтобы оба его закрепленных конца лежали на оси абсцисс симметрично начала координат. Запишем уравнение параболы $x^2=2p\left(y-y_0\right)$, где точка $\left(0;y_0\right)$ - ее вершина. Точки $\left(8;-0{,}144\right),\left(10;0\right)$ лежат на параболе, значит их координаты удовлетворяют ее уравнению. Для нахождения неизвестных y_0 и p получим систему уравнений

$\begin{cases} 8^2 = 2p\cdot(-0{,}144 - y_0) \\ 10^2 = 2p\cdot(-y_0) \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе:

$\dfrac{64}{100} = \dfrac{0{,}144 + y_0}{y_0} \Rightarrow y_0 = 0{,}4$. Величина прогиба троса равна 40 см.

Пример 16. Определить вид кривой и сделать рисунок. Найти координаты вершины, фокус и уравнение директрисы: а) $y^2 = 4 - 6x$; б) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

Решение. а) $y^2 = 4 - 6x \Rightarrow y^2 = -6\cdot\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$ или $Y^2 = 6X$, где $\begin{cases} X = \dfrac{2}{3} - x \\ Y = y \end{cases}$.

Тогда $p = 3 \Rightarrow \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2}$ и $F\left(-\dfrac{5}{6};0\right)$. Уравнение директрисы $X = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow$ $\dfrac{2}{3} - x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{13}{6}$. Тогда уравнение директрисы: $6x - 13 = 0$.

б) $x = 2y^2 - 12y + 14 \Rightarrow (y-3)^2 = \dfrac{1}{2}(x+4)$ или $Y^2 = \dfrac{1}{2}X$, где $\begin{cases} X = x + 4 \\ Y = y - 3 \end{cases}$.

Тогда $2p = \dfrac{1}{2} \Rightarrow p = \dfrac{1}{4}$. Для параболы $Y^2 = \dfrac{1}{2}X$ фокус имеет координаты $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$. Переходя к «старой» системе координат, получим $\begin{cases} x + 4 = \dfrac{1}{8} \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{31}{8} \\ y = 3 \end{cases}$, $F\left(-\dfrac{31}{8};3\right)$. Для директрисы:

$X = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow x + 4 = -\dfrac{1}{8} \Rightarrow x = -\dfrac{33}{8}$. Тогда уравнение директрисы: $8x + 33 = 0$

Пример 17. Точка $M_0(2;-3;7)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Решение. Запишем координаты вектора, перпендикулярного искомой плоскости Р: $\overrightarrow{OM_0}(2;-3;7)=\vec{n}_P$. Подставим координаты точки $M_0(2;-3;7)$ и нормального вектора в общее уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ и получим $2(x-2)-3(y+3)+7(z-7)=0\Rightarrow$

$$2x-4-3y-9+7z-49=0\Rightarrow 2x-3y+7z-62=0.$$

Пример 18. Определить особенности расположения следующих плоскостей:

$3x+5z-10=0$; 2) $3y-6=0$; 3) $x-3y+2z=0$.

Решение. 1) Запишем уравнение плоскости $3x+5z-10=0$ как $3x+0\cdot y+5z=0$. Из последней записи видно, что переменная y принимает все возможные значения, следовательно, плоскость параллельна оси OY.

2) $3y-6=0\Rightarrow 0\cdot x+3y+0\cdot z-6=0$. Переменные x и z принимают все возможные значения $\Rightarrow$ плоскость параллельна плоскости xOz.

3) В уравнении плоскости отсутствует коэффициент D $\Rightarrow$ плоскость $x-3y+2z=0$ проходит через начало координат.

Пример 19. Записать уравнение плоскости: а) параллельно плоскости xOz и проходящей через точку $(2;3;-1)$; б) проходящей через ось Oz и точку

$M\ (-3;1;-2)$; в) параллельно оси Ox и проходящей через две точки

$M_1(4;0;-2)$ и $M_2(5;1;7)$.

Решение. а) Так как искомая плоскость параллельна плоскости xOz, то у них одна и та же нормаль $\vec{n}(0;1;0)\Rightarrow$ уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Rightarrow 0\cdot(x-2)+1\cdot(y-3)+0\cdot(z+1)=0\Rightarrow$ $y-3=0$.

б) Известно, что плоскость проходит через точки $(0;0;0)$, $(-3;1;-2)$ и ось Oz поэтому на плоскости лежат два вектора $\vec{a}(0;0;1)$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OM}(-3;1;-2)$. Вектор нормали нужной нам плоскости будет равен векторному произведению этих векторов:

$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix}=-\vec{i}-3\vec{j}$. Поэтому уравнение плоскости

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow -1(x+3)-3(y-1)+0(z+2)=0 \Rightarrow$ $x+3y=0$.

в) На искомой плоскости лежат два вектора $\vec{a}(1;0;0)$ и $\vec{b}=\overrightarrow{M_1M_2}(1;1;9)$.

Тогда $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}=-9\vec{j}+\vec{k}$. Поэтому уравнение плоскости

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow 0\cdot(x-4)-9\cdot(y-0)+1\cdot(z+2)=0 \Rightarrow$ $-9y+z+2=0 \Rightarrow 9y-z-2=0$.

Пример 20. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(3;-2;1)$: а) параллельно оси Oz; б) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{3}$;

в) параллельно прямой $\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\ 5x+4y-z-7=0\end{cases}$.

Решение. а) Прямая проходит параллельно оси Oz, поэтому ее направляющий вектор $\vec{s}(0;0;1)$ и каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

$\Rightarrow \dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$; б) Прямая параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{3}$, поэтому ее направляющий вектор $\vec{s}(4;-4;3)$ и каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$; в) Найдем направляющий вектор прямой $\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$. $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & -1 & 3\\5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\vec{i}+17\vec{j}-13\vec{k}$. Тогда каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-3}{-11}=\dfrac{y+2}{17}=\dfrac{z-1}{-13}$.

Пример 21. Дана треугольная пирамида $DABC$. Составить уравнения ее ребер AB и AC, найти угол между ними, если заданы вершины $A(0;0;2)$, $B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$ и $D(-1;4;-2)$.

Решение. Направляющим вектором прямой AB является вектор $\overrightarrow{AB}(4;0;3)$ $\Rightarrow$ каноническое уравнение прямой $AB:\dfrac{x-0}{4}=\dfrac{y-0}{0}=\dfrac{z-2}{3}$. Направляющим вектором прямой AC является вектор $\overrightarrow{AC}(5;3;-2)\Rightarrow$ каноническое уравнение прямой $AB:\dfrac{x-0}{5}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Найдем угол между прямыми как угол между их направляющими векторами: $\cos\varphi=\dfrac{4\cdot5+0\cdot3+3\cdot(-2)}{\sqrt{4^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{7}{2\sqrt{38}}$.

Пример 22. Определить взаимное расположение прямых $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Решение. Запишем направляющие векторы данных прямых: $\vec{s}_1(2;1;4)$ и

$\vec{s}_2(3;-2;1)$. Так как $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{1}$, то эти векторы не являются коллинеарными. Следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Если прямые пересекаются, то у них существует единственная общая точка, которую можно найти из системы уравнений: $\begin{cases} x = 1 + 2t \equiv 3k + 6, \\ y = t + 7 \equiv -2k - 1, \\ z = 4t + 5 \equiv k. \end{cases} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow$ общая точка $(-3;5;-3)$ и прямые пересекаются.

Пример 23. Определить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5 \end{cases}$ и $4x - 3y - 6z - 5 = 0$; б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$

в) $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t \end{cases}$ и $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. а) Направляющий вектор прямой $\vec{s}(3;-4;4)$, нормальный вектор плоскости $\vec{n}(4;-3;-6)$. Найдем их скалярное произведение:

$\vec{s} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) = 0 \Rightarrow$ либо прямая параллельна плоскости, либо лежит на ней. Проверим, лежит ли точка $M(-2;1;-5)$ на плоскости, подставив ее координаты в уравнение плоскости: $4 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 - 6 \cdot (-5) - 5 \neq 0$. Точка прямой не лежит на плоскости, поэтому прямая параллельна плоскости; б) Направляющий вектор прямой $\vec{s}(8;2;3)$, нормальный вектор плоскости $\vec{n}(1;2;-4)$, $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ и точка $M(13;1;4)$ лежит на плоскости. Данная прямая лежит на плоскости; в) Направляющий вектор прямой $\vec{s}(1;-2;6)$, нормальный вектор плоскости $\vec{n}(2;3;1)$, $\vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow$ прямая пересекает данную плоскость.

Пример 24. Найти точку, симметричную точке $Q(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через три точки $M_1(-6;1;-5), M_2(7;-2;-1), M_3(10;-7;1)$

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки:
$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x+6 & y-1 & z+5 \\ 13 & -3 & 4 \\ 16 & -8 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow P: x-y-4z-13=0$,

$\vec{n}_P(1;-1;-4)=\vec{s}_l$, где l - прямая, перпендикулярная плоскости и проходящая через точку Q: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+6}{-4}$. Найдем точку Q^* пересечения прямой l и плоскости P, решив систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+6}{-4}, \\ x-y-4z-13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+3, \\ y=-t-4, \\ z=-4t-6, \\ x-y-4z-13=0. \end{cases}$

$\Rightarrow t=-1$. Таким образом, точка $Q^*(2;-3;-2)$. Тогда точку Q^{**} симметричную точке Q относительно плоскости найдем через формулы координат середины отрезка: $\dfrac{x^{**}+3}{2}=2$, $\dfrac{y^{**}-4}{2}=-3$, $\dfrac{z^{**}-6}{2}=-2$. Точка $Q^{**}(1;-2;2)$.

Пример 25. Записать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{5}$ и $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

Решение. Обозначим $l_1: \dfrac{x}{7}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{5}$, точка $M_1(0;-2;1)\in l_1$, $l_2: \dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{5}$, точка $M_2(1;3;-2)\in l_2$, $\vec{s}(7;3;5)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;5;-3)$. Тогда векторы $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежат в одной плоскости, нормальный вектор которой найдем через векторное произведение векторов: $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$(34;-26;-32)$.

Чтобы записать уравнение плоскости с нормальным вектором $\vec{n}(34;-26;-32)$ возьмем точку, лежащую или на прямой l_1 или на прямой l_2, например, точку $M_1(0;-2;1)$. Тогда уравнение плоскости: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 34(x-0)-26(y+2)-32(z-1)=0 \Rightarrow 17x-13y-16z-10=0.$$

Пример 26. Установить кривую, по которой плоскость $y-3=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$, найти ее полуоси и вершины.

Решение. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y-3=0, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1. \end{cases}$ Получим уравнение эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=\frac{1}{4}$ или $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ с полуосями $a=2, c=1$ и вершинами в точках $(2;3;0)$, $(-2;3;0)$, $(0;3;1)$, $(0;3;-1)$.

Пример 27. Установить вид поверхности $y=x^2$ и найти ее проекции на координатные плоскости.

Решение. Запишем уравнение поверхности иначе: $0\cdot z+y=x^2$. Таким образом, переменная z может принимать любые возможные значения, следовательно, это параболический цилиндр.

Проекция на плоскость xOy - парабола, симметричная относительно оси ординат;

Проекция на плоскость yOz - полуплоскость $y \geq 0$;

Проекция на плоскость xOz - вся плоскость xOz.

Пример 28. Составить уравнение сферической поверхности, проходящей через окружность $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=8,\\ x+y-z+2=0.\end{cases}$ и точку $(2;1;0)$.

Решение. Через окружность можно построить бесконечное множество сфер, удовлетворяющих уравнению $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2-8+\lambda(x+y-z+2)=0$. Подставим в данное уравнение точку $(2;1;0)$ и найдем значение параметра λ: $1+1+1-8+\lambda(2+1-0+2)=0 \Rightarrow \lambda=1$. Преобразуем уравнение пучка сфер, подставив найденное значение λ:

$$x^2-2x+1+y^2+z^2+2z+1-8+x+y-z+2=0 \Rightarrow$$

$$(x^2-x)+(y^2+y)+(z^2+z)=4 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=4$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{4}.$$

Пример 29. Определить и построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду: 1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$; 2) $4x-x^2-y^2=2(1-z)$; 3) $(x-y)(x+y)=2z^2$; 4) $x^2-2x-z=0$.

Решение. 1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0 \Rightarrow \left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+$

$$+\left(y^2+2\cdot\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+\left(z^2-4z+4-4\right)=0 \Rightarrow$$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{2}$ - сфера с центром в точке $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2};2\right)$ и радиусом $R=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

2) $4x-x^2-y^2=2(1-z) \Rightarrow (x-2)^2-4+y^2+2-2z=0 \Rightarrow$

$(x-2)^2+y^2=2(z+1)$ - круговой параболоид с вершиной в точке $(2;0;-1)$ и осью симметрии параллельной оси Oz.

3) $(x-y)(x+y)=2z^2 \Rightarrow x^2-y^2=2z^2 \Rightarrow y^2+2z^2=x^2$ - конус 2-го порядка с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox.

4) $x^2-2x-z=0 \ \Rightarrow (x-1)^2=z+1$ - параболический цилиндр с образующими параллельными оси Oy.

РАЗДЕЛ 3. АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-5)$ и $M_2(3;2)$, и записать уравнение прямой параллельной прямой M_1M_2 и проходящей через точку $M(-2;4)$.

2. Найти проекцию точки $M(-8;12)$ на прямую, проходящую через две точки $N(2;-3)$ и $K(-5;1)$.

3. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+1=0$ относительно точки $M(5;1)$.

4. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и вершину прямого угла $(4;-1)$.

5. Лежат ли на одной прямой три точки: а) $(1;3),(5;7),(10;12)$; б) $(-3;-8),(10,12),(1;-2)$?

6. Установить какие линии определяются уравнениями: а) $y=\sqrt{6-x^2}$; б) $x=-1-\sqrt{9-y^2}$.

7. Привести к каноническому виду уравнение окружности и построить ее: а) $x^2+y^2-6x-4y+9=0$; б) $3x^2+3y^2-4x-6y-15=0$.

8. Записать уравнение окружности, проходящей через две точки $(3;0)$ и $(-1;2)$, если ее центр лежит на прямой $x-y+2=0$.

9. Записать уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2+x=0$ и $x^2+y^2-4x+6y=0$.

10. Установить вид линии, определяемой уравнением: а) $y=\frac{2}{3}\sqrt{16-x^2}$; б)

$x=-\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$
.

11. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в 4 раза больше расстояния от левого фокуса.

12. Определить взаимное расположение прямой $2x-y-20=0$ и эллипса $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

13. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{2}x$ и одну из ее точек $(6;3)$.

14. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Найти ее фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис, уравнение сопряженной гиперболы и ее эксцентриситет.

15. Определить вид кривой $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$, построить ее и найти эксцентриситет и уравнения асимптот.

16. Установить линии, определяемые уравнениями: а) $y=\sqrt{-2x}$; б) $x=-5\sqrt{-y}$.

17. Найти точки пересечения парабол $y=x^2-2x+1$ и $y=-x^2+4x+1$, записать уравнение прямой, проходящей через эти точки.

18. Определить вид кривой и сделать рисунок. Найти координаты вершины, фокус и уравнение директрисы: а) $y=4x^2-8x+7$; б) $x=\frac{1}{4}y^2+y+2$.

19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3;-4;2)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(3;1;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;1)$.

20. Найти угол между плоскостями $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$.

21. Найти угол между плоскостями yOz и $x+y+\sqrt{2}z-5=0$

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;6;4), M_2(3;5;3), M_3(1,-1,4)$.

23. Найти расстояние между двумя плоскостями: $x+3y-2z-3=0$ и $-2x-6y+4z+8=0$.

24. Определить при каких значениях k и m уравнения $mx+3y-2z-1=0$ и $2x-5y-kz=0$ будут определять параллельные плоскости.

25. Записать уравнения проекций прямой $\begin{cases} 3x+2y-z+5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

26. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-2}$.

27. Лежат ли данные три точки $(2;-1;0)$, $\left(0;-\frac{3}{2};1\right)$, $\left(4;-\frac{1}{2};-1\right)$ на одной прямой? Записать уравнение этой прямой.

28. Привести к каноническому виду уравнение прямой $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$.

29. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$ и плоскостью $x+z-3=0$.

30. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ будет параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?

31. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$.

32. Установить вид поверхности $y=x^2$ и найти ее проекции на координатные плоскости.

33. Прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ вращается вокруг оси Ox. Найти уравнение описанной ею поверхности.

34. Составить уравнение линии пересечения плоскости xOz и сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

35. Определить и построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду: 1) $36x^2+16y^2-9z^2+18z+9=0$; 2) $z^2+4z-6y-20=0$;

3) $x^2-2y^2+z^2+4z=0$.

36. Найти уравнение цилиндра, проектирующего окружность $\begin{cases} x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25, \\ x^2+y^2+z^2=16. \end{cases}$ на плоскость xOy.

РАЗДЕЛ 3. ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

№1. к=7; $7x-y+18=0$. №2. $(-12;5)$. №3. $3x-2y-27=0$. №4. $2x+y-7=0, x-2y-6=0$. №5. а) да; б) нет. №6. а) верхняя половина окружности $x^2+y^2=6$; б) левая половина окружности $(x+1)^2+y^2=9$ при $x\le -1$. №7. а) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$; б) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{58}{9}$. №8. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. №9. $6x+5y+3=0$. №10. а) половина эллипса, лежащая в верхней полуплоскости; б) половина эллипса, лежащая в левой полуплоскости. №11. $M_1\left(-15/2;3\sqrt{7}/2\right)$, $M_2\left(-15/2;-3\sqrt{7}/2\right)$ №12. Прямая касается эллипса. №13. $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{72}=1$. №14. Ответ: $F_{1,2}(\pm5;0)$; $\varepsilon=\frac{5}{3}$; $y=\pm\frac{4}{3}x$; $x=\pm\frac{9}{5}$; $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$; $\varepsilon=\frac{5}{4}$. №15. гипербола:

$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$; $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$№16. а) ветка параболы, расположенная во второй четверти; б) - ветка параболы, расположенная в третьей четверти.№17. $(0;1),(3;4); x-y+1=0.$№18. а) $B(1;3)$, $F\left(1;\frac{49}{16}\right)$, $D:16y-47=0$; б) $B(1;-2)$, $F(2;-2)$, $D: x=0$.№19. $x+4y+7z-1=0$. №20. $\varphi=\arccos\frac{7}{10}$. №21. 60^0. №22. $7x+y+20z-86=0$.№23. $\frac{9\sqrt{34}}{17}$. №24. $k=-\frac{10}{3}, m=-\frac{6}{5}$. №25. $\begin{cases}2x+3y+4=0,\\ z=0\end{cases}$, $\begin{cases}5y+2z+2=0,\\ x=0.\end{cases}$, $\begin{cases}5x-3z+7=0,\\ y=0.\end{cases}$ №26. $\frac{9\sqrt{34}}{17}$. №27. Лежат на одной прямой $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$. №28. $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$.№29. 30^0. №30. $A=-1$. №31. $(2;3;1)$. №32. Параболический цилиндр; проекция на плоскость xOy - парабола, симметричная относительно оси ординат; проекция на плоскость yOz - полуплоскость $y\geq 0$; проекция на плоскость xOz - плоскость xOz .№33. $40(x-2)^2=9y^2+9z^2$. № 34. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y=0.\end{cases}$ №35. 1) двуполостный гиперболоид; 2) параболический цилиндр; 3) однополостный гиперболоид. №36. $x^2+5y^2-8y-12=0$.

РАЗДЕЛ 3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-1)$ а) параллельно оси абсцисс; б) параллельно биссектрисе первого и третьего координатных углов.

2. Является ли треугольник, образованный прямыми $x-7y-7=0$, $x+y-7=0$, $3x-y-1=0$ равнобедренным?

3. Среди заданных прямых указать параллельные и перпендикулярные: 1)$3x-2y+6=0$, 2)$6x-4y=0$, 3)$6x+4y-5=0$, 4)$2x+3y-1=0$ 5)$x-y+3=0$, 6)$x+y-11=0$, 7)$-x+y-2=0$.

4. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3;-4)$ и уравнения двух высот $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$.

5. Нарисовать область, ограниченную прямыми: $x-y=0$, $2x+y=4$, $2x-5y+15=0$.

6. Записать уравнение окружности а) $r=4$; б) $r=-2\sin\varphi$ в декартовых координатах.

7. Точка $(3;-1)$ является центром окружности, отсекающей на прямой $2x-5y+18=0$ хорду, длина которой равна 6. Составить уравнение окружности.

8. Определить при каких значениях k прямая $y=kx$ пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$; касается ее; проходит вне окружности.

9. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-7=0$ перпендикулярного прямой $2x-y+5=0$.

10. Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

11. Установить, какая линия задается уравнением $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$ и изобразить ее на рисунке.

12. Из точки $A(10;-8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

13. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

14. Дана точка $M\left(10;\sqrt{5}\right)$ на гиперболе $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы этой точки.

15. Установить, какие линии определяются уравнениями: а) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; б) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

16. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно $4,5$.

17. Найти фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

18. Составить уравнение параболы, если фокус находится в точке $(4;3)$, уравнение директрисы $y+1=0$.

19. Составить уравнение прямой, касающейся параболы $y^2=8x$ и параллельной прямой $2x+4y+7=0$.

20. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, имеет форму параболы с параметром $p=0,1$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии $2\,м$ от места выхода.

21. На оси Oz найти точку, равноудаленную от двух плоскостей

$x+4y-3z-2=0$ и $5x+z+8=0$.

22. Составить уравнение плоскости: 1) проходящей через точку $(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$; 2) проходящей через начало координат перпендикулярно двум плоскостям $x+3y-z-7=0$ и $2x-y+5z+3=0$; 3) проходящей через точки $(0;0;1)$, $(3;0;0)$ и образующий угол $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ с плоскостью xOy.

23. Записать уравнение плоскости $5x+2y-10z-10=0$ в отрезках.

24. Определить при каком значении k уравнения $2x+ky-3z+1=0$ и $5x+y-3z-3=0$ будут определять перпендикулярные плоскости.

25. Найти расстояние между плоскостью $2x+y-z-6=0$ и плоскостью, проходящей через три точки $(2;-1;3)$, $(1;0;2)$, $(1;-1;1)$.

26. Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. Записать условия, каким должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой, чтобы прямая: 1) была параллельна оси Ox; 2) пересекала ось Oy; 3) совпадала с осью Oz; 4) была параллельна плоскости yOz; 5) лежала в плоскости xOz; 6) проходила через начало координат.

27. Даны уравнения движения точки $M(x;y;z)$: $\begin{cases} x=2-2t, \\ y=3+2t, \\ z=4-t. \end{cases}$ Определить расстояние d, которое пройдет эта точка за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=5$.

28. Доказать параллельность прямых: $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7. \end{cases}$ найти расстояние между ними.

29. Проверить перпендикулярность прямых: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$.

30. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x + y - 3z + 1 = 0$ с прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ и $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 4t + 3 \\ z = -6t - 4 \end{cases}$.

31. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ будет перпендикулярна прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

32. Найти точку симметричную точке $M(0;3;-2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1{,}5}{1} = \frac{z}{1}$.

33. Точка $Q(x;y;z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $Q_0(15;-24;-16)$ со скоростью $v = 12$ в направлении вектора $\vec{s}(-2;2;1)$. Показать, что траектория точки Q пересекает плоскость $3x + 4y + 7z - 17 = 0$ и найти: 1) точку M их пересечения; 2) время, затраченное на движение точки Q от Q_0 до M ; 3) длину отрезка Q_0M .

34. Доказать, что плоскость $2x - 12y - z + 16 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2 - 4y^2 = 2z$ по прямолинейным образующим и найти их уравнения.

35. Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{1} = 1$ по гиперболе и найти ее полуоси.

36. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе и найти ее фокальный параметр.

37. Найти уравнение проекции на плоскость yOz сечения эллиптического параболоида $z^2+y^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$.

РАЗДЕЛ 3. ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

№1. а) $y+1=0$; б) $x-y-4=0$.№2. да.№3. $1)\parallel 2)$; $1)\perp 4)$; $2)\perp 4)$; $5)\parallel 7)$; $5)\perp 6)$; $7)\perp 6)$.№4. $2x+7y+22=0$ $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$. №5. Рис.№6. а) $x^2+y^2=16$; б) $x^2+(y+1)^2=1$. 7. №7. $(x-3)^2+(y+1)^2=38$. №8. $|k|<\frac{3}{4}$; $k=\pm\frac{3}{4}$; $|k|>\frac{3}{4}$. №9. $x+2y-4=0$.№10. $x+y\pm\sqrt{13}=0$, $x-y\pm\sqrt{13}=0$.№11. Половина эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$, расположенная в левой полуплоскости. №12. $4x-5y-10=0$. №13. $S=12$. №14. $x-4\sqrt{5}y+10=0$, $x-10=0$. №15. а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, $y\ge 0$; б) левая ветвь гиперболы $\frac{(x-9)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$. №16. $\left(10;\frac{9}{2}\right)$, $\left(10;-\frac{9}{2}\right)$. №17. $R=12$. №18. $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$. №19. $x+2y+8=0$. №20. 5 метров. №21. $M_1(0;0;3)$, $M_2\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$. №22. 1) $x-4y+5z+15=0$; 2) $2x-y-z=0$; 3) $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$. №23. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}-\frac{z}{1}=1$.№24. $k=-19$. №25. $d=\sqrt{6}$. №26. 1) $A_1=0, A_2=0$; 2) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 3) $C_1=D_1=0, C_2=D_2=0$; 4) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; 5) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$;

6) $D = D_1 = 0$.№27. $d = 15$. №28. $d = \frac{2\sqrt{165}}{3}$. №29. Прямые перпендикулярны.

№30. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-2}{1}$. №31. $A = 4$, $B = -8$. №32. $(3;-5;3)$. №33. 1) $M(-25;16;4)$; 2) $t = 5$; 3) $|Q_0M| = 60$. №34. $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$. №35. $a = 4; b = 3$. №36. $p = 15$. №37. $\begin{cases} y^2 + z^2 - 2y - z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

.

РАЗДЕЛ 4. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛОВ

Тема 4.1 Последовательность. Предел последовательности

Числовой последовательностью называется упорядоченное множество вещественных чисел, когда каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$, называются элементами или членами последовательности. Числовую последовательность (далее – последовательность) будем также обозначать $\{x_n\}$, выражение x_n будем называть общим членом последовательности, n – номером члена последовательности.

Например, бесконечная геометрическая прогрессия $1, q, q^2, \dots, q^n, \dots$ является числовой последовательностью.

Последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ называются суммой, разностью, произведением и частным последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

Удобным способом определения последовательности является задание формулы n-го члена последовательности (аналитический способ):

$$x_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

В этом случае мы можем определить любой член последовательности по его номеру. Например, равенство $z_n = n^3+1$ задает последовательность $\{2, 9, 28, \dots, n^3+1, \dots\}$.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$$

такое, что $\forall\, n > N_0 \ : |x_n - a| < \varepsilon$ и обозначается $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Иначе говоря, число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если почти все члены последовательности мало отличаются от a: насколько мало отличаются – следит параметр ε, а какое конечное значение членов последовательности нам придется отбросить – N_0.

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она сходится, и расходится в противном случае.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность сходится, то предел – единственный.
2. Сходящаяся последовательность ограничена.
3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n.=b$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=a\pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=a\cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a / b$$ (при условии, что $b \neq 0$).

4. Если $\forall\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.= a$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n.= b$, то $a \le b$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, где e – основание натурального логарифма.

Тема 4.2 Функция. Предел функции

Пусть X и Y два произвольных подмножества множества действительных чисел $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Если каждому элементу множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие единственный элемент множества Y, то говорят, что задана *функция* f: $y = f(x)$ (f: $x \to y$).Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом* функции f, y – *зависимой переменной* или *значением функции* f. Множество X называется *областью определения* функции f: $D(f) = X$, множество $E(f) = Y$ – *областью значений* функции. Иногда правило соответствия f может задаваться без указания множеств X и Y. В этом случае описание области определения и области значений становится отдельной задачей. *Графиком* функции называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in X$.

Число c называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (при $x \to x_0$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$:

$$c = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Предел функции в точке может не существовать.

Замечание. Неравенство $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ эквивалентно неравенству $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$. Такая область называется окрестностью точки x_0, если саму точку x_0 из этой области исключить, то – проколотой окрестностью точки x_0.

Теорема (о единственности предела функции). Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

В некоторых случаях определение предела функции следует дополнить, поскольку в общем случае не учитывается, как именно $x \to x_0$. Рассмотрим, например, случай, когда множество X является отрезком $X = [a, b]$ и речь идет о вычислении предела функции в концах отрезка a и b. Тогда будет полезно ввести следующие определения.

Число c называется *пределом справа функции* $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (при $x \to x_0 + 0$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ (т.е. $x > x_0$), выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$:

$$c = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Число с называется *пределом слева функции* $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (при $x \to x_0 - 0$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$ (т.е. $x < x_0$), выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$:

$$c = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Предел слева и предел справа называются *односторонними пределами*.

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, то существуют и оба односторонних предела, равных c. Верно и обратное: если существуют оба односторонних предела и они равны между собой, то существует $c = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и

$$c = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Определим понятие предела функции для еще одного специального случая. Число c называется *пределом функции y = f(x) при* $x \to \infty$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x| > \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$:

$$c = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Иногда полезно различать случаи, когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Тогда соответствующие неравенства имеют вид $x > \delta(\varepsilon)$ и $x < \delta(\varepsilon)$. Обозначается это следующим образом: $c = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $c = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Простейшие свойства предела функции

Пусть α – один из символов: $x_0,\ \infty, +\infty, -\infty, x_0 + 0, x_0 - 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = d$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = h$. Тогда:

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{c} = \mathrm{c}$, где $c = const$.
2. $\lim\limits_{x\to\alpha} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = c \cdot d$.
3. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = d \pm h$.
4. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = d \cdot h$.
5. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) / \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = d/h$, где $h \neq 0$.

Бесконечно малые, бесконечно большие и эквивалентные функции.

Функция y = f(x) называется *бесконечно малой при* $x \to \alpha$ (что обозначает α – смотри выше), если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$.

Функция y = f(x) называется *бесконечно большой при* $x \to \alpha$, если

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to \alpha$. Если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)/g(x) = 1$, то функции $f(x)$, $g(x)$ называются эквивалентными в точке α: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \alpha$.

Например, при $x \to 0$ следующие функции будут эквивалентны:

Таблица 4.2.1 – эквивалентные функции

$\sin\beta x \sim \beta x$	$\ln(1+\beta x) \sim \beta x$
$tg\,\beta x \sim \beta x$	$\log_a x \sim x/\ln a$
$\arcsin\beta x \sim \beta x$	$e^{\beta x} - 1 \sim \beta x$
$\mathrm{arctg}\,\beta x \sim \beta x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$(1+x)^k - 1 \sim kx$

Иногда использование эквивалентных функций позволяет существенно упростить вычисление предела.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения двух бесконечно малых функций, им эквивалентных.

Теорема. Если при $x \to \alpha$ функция *f(x)* эквивалентна функции *g(x)*, а функция *g(x)* эквивалентна *h(x)*, то функции *f(x)* и *h(x)* эквивалентны.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел:

$$\mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (4.1)$$

Второй замечательный предел:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=e \tag{4.2}$$

где e – основание натурального логарифма.

Тема 4.3 Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это означает, что выполнены три условия:

1. Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

2. Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$.

3. Предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Заметим, что в этом случае выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0) \tag{4.3}$$

Аналогично можно определить понятия *непрерывности в точке слева* и *непрерывности в точке справа*, применяя соответствующие определения пределов. При этом справедливо следующее равенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \tag{4.4}$$

Приращением аргумента x в точке x_0 называется разность $\Delta x = x - x_0$, разность $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции*, соответствующим приращению аргумента. Дадим эквивалентное определение непрерывности функции в точке: функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции *f(x)*, если функция *f(x)* не является непрерывной в этой точке. Возможны следующие нарушения условий непрерывности.

1. Односторонние пределы в точке x_0 существуют, равны между собой, но не равны значению функции в этой точке. В этом случае точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва.*

2. Односторонние пределы в точке x_0 существуют, но не равны между собой. Тогда точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода.*

3. Хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо равен ∞. В этом случае точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода.*

РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Записать три первых члена последовательности:

а) $a_n = (1-(-1)^n)n^2$; б) $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$; в) $a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+2}$.

Решение.

а) при $n=1$ получаем $a_1 = \big(1-(-1)\big)\cdot 1 = 2$; при $n=2$ – $a_2 = (1-(-1)^2)\cdot 2^2 = 0$; при $n=3$ – $a_3 = (1-(-1)^3)\cdot 3^3 = 18$. Т.о. $a_1 = 2$; $a_2 = 0$; $a_3 = 18$.

б) $а_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{5}{5} = 1$; $a_3 = \frac{9}{7}$.

в) $a_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} = 0$; $a_2 = \frac{\cos\pi}{4} = -\frac{1}{4}$; $a_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{5} = 0$.

Пример 2. Написать формулу общего члена последовательности:

а) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$ б) $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{11}{11}, \ldots$

Решение.

а) в числителе стоят четные, а в знаменателе – начетные числа, поэтому $a_n = \frac{2n}{2n-1}$;

б) разница между соседними числами в числителе равна 3, разница между соседними числами в знаменателе равна 2. Поэтому $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$.

Ответ: а) $a_n = \frac{2n}{2n-1}$; б) $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+7}{2n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+7}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(4+\frac{7}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \left[\frac{7}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0\right] = \frac{4}{2} = 2.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0\right] = -1.$

Ответ: а) 2; б) -1.

Пример 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5+3x^2+5}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{3x^2+4x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{3x\cdot\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5+3x^2+5}{x^3+1} = \begin{bmatrix}\text{подставим предельное}\\ \text{значение } x=\infty\end{bmatrix} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$
$\begin{bmatrix}\text{вынесем в числителе и знаменателе}\\ \text{максимальную степень } x \to x^5\end{bmatrix} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5\left(1+\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}} =$
$\left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{3x^2+4x+2} = \begin{bmatrix}\text{подставим предельное}\\ \text{значение } x=1\end{bmatrix} = \left(\frac{0}{0}\right) =$
$\begin{bmatrix}\text{разложим квадратные}\\ \text{трехчлены на множители}\end{bmatrix} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{3(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{3x+7} = -\frac{1}{10}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{bmatrix}\text{умножим числитель и знаменатель}\\ \text{на сопряженное число}\end{bmatrix} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x})(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})}{3x(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{6+x-(6-x)}{3x(\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x\cdot\sin x}=\begin{bmatrix}\text{подставим предельное}\\ \text{значение } x=0\end{bmatrix}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$\begin{bmatrix}\text{используем эквивалентные б.м.ф.:}\\ 1-\cos kx\sim\frac{(kx)^2}{2},\sin kx\sim kx \text{ при } x\to 0\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{2}:\ 3x^2=\frac{8}{3}.$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x}=\begin{bmatrix}\text{подставим предельное}\\ \text{значение } x=\infty\end{bmatrix}=(1^\infty)=$

$$\begin{bmatrix}\text{используем 2-ой замечательный}\\ \text{предел } \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{bmatrix}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+5}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3-x-5}{x+5}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-8}\cdot\frac{-8}{x+5}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-8}{x+5}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-16x}{x+5}}=e^{-16}.$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\text{эквивалентные б.м.ф. при } x\to 0:\\ e^{kx}-1\sim kx,\ \ln(1+kx)\sim kx\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$

Ответ: а) ∞; б) $-\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{3\sqrt{6}}$; г) $\frac{8}{3}$; д) e^{-16}; е) $\frac{3}{2}$.

Пример 5. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{2+x}{4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2+x}{(2+x)(2-x)}=\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{2-x}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{2+x}{(2+x)(2-x)}=\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{2-x}=\left(\frac{1}{2-(2-0)}\right)=\left(\frac{1}{+0}\right)=\infty.$

б) $\lim\limits_{x\to +0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{1}{+0}}\right)=(2^\infty)=\infty;$

$\lim\limits_{x\to -0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{1}{-0}}\right)=(2^{-\infty})=\left(\frac{1}{2^\infty}\right)=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$

Ответ: а) правосторонний $-\infty$, левосторонний - $+\infty$; б) правосторонний ∞, левосторонний – 0.

Пример 6. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

а) $y = \begin{cases} x-3, \ x \le 2 \\ \frac{x}{x-5}, \ x > 2 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 4-x, \ x > 0, \\ 4^{\frac{1}{x+1}}, \ x \le 0. \end{cases}$

Решение.

а) Подозрительные точки на разрыв: $x = 2$ – место соединения двух функций и $x = 5$ – их области определения.

$x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x-3) = -1$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} \frac{x}{x-5} = -\frac{2}{3}$.

Т.к. $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$ – конечны, то в точке $x = 2$ разрыв 1-го рода;

$x = 5$: $\lim\limits_{x \to 5+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 5+0} \frac{x}{x-5} = \left(\frac{5}{+0}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 5-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 5-0} \frac{x}{x-5} = \left(\frac{5}{-0}\right) = -\infty$.

Т.к. односторонние пределы равны бесконечности, то в точке $x = 5$ имеем разрыв 2-го рода.

б) Подозрительные на разрыв точки: $x = 0$; $x = -1$.

$x = 0$: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} (4 - x) = 4$,

$\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} 4^{\frac{1}{x+1}} = 4$,

$f(x) = f(0) = 4$, поэтому точка $x = 0$ – точка непрерывности.

$x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} 4^{\frac{1}{x+1}} = \left(4^{\frac{1}{+0}}\right) = (4^{\infty}) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} 4^{\frac{1}{x+1}} = \left(4^{\frac{1}{-0}}\right) = (4^{-\infty}) = \left(\frac{1}{4^{\infty}}\right) = 0$.

Т.к. один из односторонних пределов равен бесконечности, то в точке $x = -1$ имеем разрыв 2-го рода.

Ответ: а) $x = 2$ – точка разрыва первого рода, $x = 5$ – разрыв второго рода; б) $x = 0$ – точка непрерывности, $x = -1$ – разрыв второго рода.

РАЗДЕЛ 4. АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1. Напишите первые пять членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 3^{n-1}$

б) $x_n = \frac{n+1}{n}$

2. Какие из данных последовательностей ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены; монотонны; строго монотонны:

а) $\mathrm{x}_n = n$

б) $x_n = -\frac{n^2}{n+1}$

в) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

г) $x_n = -n^3 + 2n$

д) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$

3. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3}{6n+1}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-1000n^2+1}{1000n^2+17n}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)^4}{1-5n^4}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3-4n^2} - n\right)$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

4. Вычислите пределы, применяя свойства пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x+4}{x^2-2}$

б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^2+2x+1}{x^2-4}$

в) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$

е) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4+2x^2+1}{x^5+1}$

з) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)^2\left(\frac{7}{x^2}-1\right)$

и) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{6x+7}{3x-1}}$

к) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x-4}{2x+2}\right)^{2x}$

5. Вычислить пределы, применяя первый замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{tg\ 9x}$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2}$

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5-\sqrt{4x^2+25}}{\sin^2 x}$

е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 6x-\cos 4x}{3x^2}$

6. Вычислить пределы, применяя второй замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[2x]{1-2x}$

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^{x}$

7. Вычислите пределы, применяя эквивалентно бесконечно малые функции:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ 6x}{2x}$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\arcsin 3x}{5\sin^2 x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{e^{x^2}-1}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}}{tg\,3x}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

8. Найти левый и правый пределы функции при $x\to x_0$:

а) $f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}},\ x_0=3$

б) $f(x)=\begin{cases}-2 \text{ при } x\le 1\\ \frac{x}{10} \text{ при } x>1\end{cases}$

9. Найти множество, на котором функция $f(x)$ непрерывна:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-15}$

б) $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$

в) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}$

10. Найти точки разрыва функции и определить их род:

а) $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0\\ x^2,\ 0<x<1\\ x^3-1,\ x\ge 0\end{cases}$

б) $f(x)=\frac{1}{x^3-x^2}$

в) $f(x)=\begin{cases}2x+5,\ x<-1\\ \frac{1}{x},\ x>-1\end{cases}$

РАЗДЕЛ 4. ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

1. а) 1, 3, 9, 27, 81; б) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5}$. **2.** а) ограничена снизу, строго монотонна (возрастает); б) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); в) ограничена, не является монотонной; г) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); д) ограничена, строго монотонна (убывает). **3.** а) $\frac{1}{6}$; б) ∞; в) $-\frac{1}{5}$; г) $-\frac{4}{3}$, д) $\frac{1}{2}$. **4.** а) 5; б) -1; в) $\frac{10}{3}$; г) $-\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) 0; з) -4; и) 4; к) $+\infty$. **5.** а) $\frac{1}{9}$; б) 9; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{25}{9}$; д) $-\frac{2}{5}$; е) $\frac{10}{3}$. **6.** а) e^{10}; б) e^{-1}; в) e^{12}; г) e^{2}; д) e^{2}. **7.** а) 3; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$. **8.** а) $f(3-0)=\frac{1}{3}$, $f(3+0)=0$; б) $f(1-0)=f(1)=-2$, $f(1+0)=\frac{1}{10}$. 9. а) $R/\left\{-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\}$; б) $R/-1$; в) $(-1;2)\cup(2;+\infty)$. **10.** а) $x=1$ – точка разрыва I рода; б) $x=0, x=1$ – точки разрыва II рода; в) $x=-1$ – точка разрыва I рода, скачек функции в точке равен -4, $x=0$ – точка разрыва I рода.

РАЗДЕЛ 4. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Для каждого из заданных последовательностей напишите формулу общего члена:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

б) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots$

2. Какие из данных последовательностей ограничены сверху, ограничены снизу, ограничены, не ограничены?

а) $x_n = 2 + 3(-1)^n$

б) $x_n = 2\sin\frac{\pi n}{2} + n$

в) $x_n = \sqrt{x+1} - \sqrt{n}$

г) $x_n = \frac{3n^2-1}{2n+1}$

д) $x_n = n + (-1)^n n^2$

е) $x_n = n^2 + (-1)^n n$

3. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+5}{2n^2-2n^3+7}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6}{n-3} - \frac{2}{3n-1}\right)$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-7n+4}-2n\right)$

4. Вычислите пределы, применяя свойства пределов:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{5x^2-4x+1}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x^3}$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$

е) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$

и) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x-11}{3x^4-x^2-1}$

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{2-3x+x^2}$

5. Вычислить пределы, применяя первый замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 4x}{\sin^3 x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{3x\, tg\, 3x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$

6. Вычислите пределы, применяя второй замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{1+3x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$

7. Вычислите пределы, применяя эквивалентные бесконечно малой функции:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\ 3x}{\sin x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin\frac{\pi}{2}x}$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ x-\sin x}{x^3}$

е) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{arctg(x-2)}{x^2-2x}$

8. Найти левый и правый пределы функции при $x \to x_0$:

а) $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}},\ x_0 = a$

б) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1},\ x_0 = 1$

9. Найти множество, на котором функция $f(x)$ непрерывна:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x-20}$

б) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-5}$

в) $f(x) = \frac{1+x}{8+x^3}$

10. Найти точки разрыва функции и определить их род:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1,\ x \le -1 \\ x^2, -1 < x \le 0 \\ 4,\ x > 0 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1,\ x \le 0 \\ \cos x,\ 0 < x < \pi \\ x,\ x \ge \pi \end{cases}$

РАЗДЕЛ 4. ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. а) $x_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $x_n = \frac{1}{n^3}$. **2.** а) ограничены; б) ограничены снизу; в) ограничены; г) ограничены снизу; д) не ограничена; е) ограничены снизу. **3.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $-\frac{7}{4}$. **4.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{6}$; е) -12; ж) 4; з) -4; и) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$; к) ∞; л) $\frac{1}{3}$; м) 0. **5.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 64; в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **6.** а) e^5; б) e^3; в) e^5; г) e. **7.** а) 3; б) $\frac{1}{8}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{8}{\pi}$; д) $\frac{1}{18}$; е) $-\frac{1}{2}$. **8.** а) $f(a-0)=0,\ f(a+0)=+\infty$; б) $f(1-0)=-2,\ f(1+0)=2$. **9.** а) $R/\{-1;5\}$; б) $R/\{2;3;5\}$; в) $R/-2$. **10.** а) $x=-1,\ x=0$ – точки разрыва I рода; б) $x=\pi$ – точка разрыва I рода.

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 5.1. Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают символом $f'(x_0)$ (читается: «эф штрих от x_0») или $y'(x_0)$. Следовательно, по определению:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{или } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (5.1)$$

Употребляются и другие обозначения: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, если $x = f(t)$.

Геометрический смысл производной. Производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т.е.

$$f'(x_0) = tg\ \alpha \qquad (5.2)$$

где α – угол наклона касательной к оси Ox прямоугольной декартовой системы координат.

Уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (5.3)$$

Нормалью к кривой в некоторой ее точке называется перпендикуляр к касательной в той же точке. Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали к линии $y =$

$f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ запишется так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x_0 - x_0) \tag{5.4}$$

Физический смысл производной. Если $x = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $x' = f'(t)$ – скорость этого движения в момент времени t.

Быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.*

Основные правила дифференцирования

Перечислим *основные правила дифференцирования*. Пусть c – постоянная, $u = u(x), v = v(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда справедливы следующие формулы:

1) $c' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(cu)' = cu'$; 4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Приведем *таблицу производных основных элементарных функций*, составленную на основании определения производной и правил дифференцирования:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

4) $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0)$; 5) $(e^x)' = e^x$;

6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$; 7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

8) $(\sin x)' = \cos x$; 9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$; 11) $(ctg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;

12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 13) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 15) $(arctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Если $y = f(u), u = u(x)$, т.е. $y = f\big(u(x)\big)$, где функции $f(u), u(x)$ имеют производные, то:

$$y'_x = y'_u u'_x \tag{5.5}$$

Эту формулу называют *правилом дифференцирования сложной функции.*

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\frac{1}{\varphi'(y)}$, т.е. справедлива формула

$$y'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ или } y'_x = \frac{1}{x'_y}\ \left(x'_y \neq 0\right) \tag{5.6}$$

Производные неявных функций и функций, заданных параметрически. **Производная функции** $y = u^v$. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F'_x = 0$, где $F = F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически:

$$x = x(t), y = y(t), \qquad (\alpha < t < \beta),$$

где $x(t),\ y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$, то ее производная y'_x определяется формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{5.7}$$

Производная степенно-показательной функции u^v, где u, v – дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования, которое приводит к формуле

$$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) \tag{5.8}$$

Производные высших порядков. Производной второго порядка, или второй производной, функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$ (которую называют первой производной).

Обозначения второй производной:

$$y'' = (y')', f''(x) = \big(f'(x)\big)', \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} \tag{5.9}$$

Механический смысл второй производной. Если $x = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $x'' = f''(t)$ – ускорение этого движения в момент времени t.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и более порядков:

$$y''' = (y'')' = \big(f''(x)\big)', y^{IV} = (y''')', \dots , y^{(n)} = \big(y^{(n-1)}\big)' \tag{5.10}$$

Производная n-го порядка обозначается и так:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} \tag{5.11}$$

Если функция задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ее вторая производная определяется формулой

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \tag{5.12}$$

Тема 5.2. Дифференциал функции

Понятие дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некотором промежутке (a, b), и ее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке x_0, где x_0, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$.

Если приращение функции представимо в виде:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A – постоянная, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, то слагаемое $A\Delta x$ называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают dy или $df(x_0)$: $dy = A\Delta x$; функцию $y = f(x)$ в этом случае называют *дифференцируемой в точке* x_0.

Если приращение функции $y = f(x)$ представимо формулой $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, то $A = f'(x_0)$: следовательно:

$$dy = f'(x_0)\Delta x \tag{5.13}$$

Так как

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, то:

$$dy = f'(x_0)dx, \qquad dy = y'_x dx, \tag{5.14}$$

Откуда:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \tag{5.15}$$

т.е. производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Формулу $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ можно записать так:

$$\Delta y = dy + o(\Delta x).$$

Дифференциал функции называют также *главной линейной частью ее приращения.*

Теорема. Бесконечно малое приращение функции эквивалентно ее дифференциалу при всех значениях независимой переменной, для которых производная функции конечна и отлична от нуля.

Из равенства $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ при достаточно малых Δx получаем

$$\Delta y \approx dy, \text{или } f(x_0 + \Delta x) - f(x) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

Откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{5.16}$$

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в соответствующей точке, когда аргумент получает приращение Δx.

Отметим, что если функция равна постоянной, то $dy = \Delta y = 0$.

Физический смысл дифференциала. Рассмотрим прямолинейное движение точки по закону $s = f(t)$, где s – длина пути, t – время, $f(t)$ – дифференцируемая функция; тогда $ds = f'(t)dt = v(t)dt$, где $v(t)$ – скорость движения. Следовательно, дифференциал пути равен приращению пути, полученному в предположении, что, начиная с данного момента t, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

Тема 5.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (a < c < b).$$

Следствие 1. Если производная функции равна нулю в каждой точке некоторого промежутка, то функция есть тождественная постоянная в этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные в некотором промежутке, то они отличаются в этом промежутке лишь постоянным слагаемым.

Корнем (или нулем) функции $y = f(x)$ называется такое значение $x = x_0$ ее аргумента, при котором эта функция обращается в нуль. Геометрически корень функции обозначает абсциссу точки, в которой график функции пересекает ось Ox или касается ее.

Теорема Ролля. Между двумя различными корнями дифференцируемой функции содержится по меньшей мере один корень ее производной.

Замечание 1. Теорема Ролля имеет простую геометрическую интерпретацию: между значениями a и b имеется по меньшей мере одно значение c такое, что в точке $C(c, f(c))$ графика функции касательная к графику параллельна оси Ox.

Замечание 2. Теорему Ролля можно сформулировать в более общем виде. Если $y = f(x)$ – функция, дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = f(b)$, то между a и b найдется точка c, в которой производная равна нулю, т.е. $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ – две функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые в интервале (a, b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$, то между a и b найдется такая точка c, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{5.17}$$

Правило Лопиталя-Бернулли

При исследовании функции может появиться необходимость нахождения предела дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, числитель и знаменатель которой при $x \to a$ стремятся к нулю или к бесконечности. Нахождение таких пределов называют раскрытием неопределенностей соответствующего вида. Основой его является правило Лопиталя-Бернулли, выражаемое следующей теоремой.

Теорема Лопиталя-Бернулли. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, тогда существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (5.18)$$

Другими словами, правило Лопиталя-Бернулли при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

Правило Лопиталя-Бернулли применимо и при раскрытии неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку ее можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, представив рассматриваемую дробь так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{\varphi(x)}:\frac{1}{f(x)} \qquad (5.19)$$

С помощью тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести неопределенности других видов, таких, как $0\cdot\infty$, $\infty-\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$, т.е. произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$, где $f(x)\to 0,\ \varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ по формулам:

$$f(x)\cdot\varphi(x)=f(x):\frac{1}{\varphi(x)}, \qquad f(x)\cdot\varphi(x)=\varphi(x):\frac{1}{f(x)}\ , \qquad (5.20)$$

а затем применяется правило Лопиталя-Бернулли.

Тема 5.4. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей в промежутке* (a,b), если для любых двух значений x_1 и $x_2\in(a,b)$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей в некотором промежутке*, если для любых значений, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции выражается следующей теоремой.

Теорема. Если в данном промежутке производная функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке; если производная отрицательна, то функция убывает в соответствующем промежутке.

Экстремум функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток (a, b).

Если можно указать такую δ-окрестность точки x_1, принадлежащую промежутку (a, b), что для всех $x \in O(x_1, \delta), x \neq x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x),$$

то $y_1 = f_1(x_1)$ называют *максимумом функции* $y = f(x)$.

Максимум функции $y = f(x)$ обозначим через $\max f(x)$.

Если можно указать такую δ-окрестность точки x_2, принадлежащую промежутку (a, b), что для всех $x \in O(x_2, \delta), x \neq x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_2) < f(x),$$

то $y_2 = f(x_2)$ называют максимумом функции $y = f(x)$.

Минимум функции $y = f(x)$ обозначим через $\min f(x)$.

Другими словами, *максимумом (минимумом) функции* $y = f(x)$ называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых в точках, достаточно близких к данной и отличных от нее.

Теорема (необходимый признак экстремума). В точке экстремума дифференцируемой функции производная ее равна нулю.

Теорема (достаточный признак экстремума). Если при $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через эти значения, то x_0 является точкой экстремума, причем: 1) x_0 – точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2) x_0 – точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

Теорема имеет следующий геометрический смысл: если в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ графика дифференцируемой функции касательная параллельна оси Ox, в точках слева от M_0 образует тупой угол с осью Ox, в точках справа – острый, то x_0 – точка минимума; если в точках слева от M_0 касательная образует с осью Ox острый угол, а в точках справа – тупой, то x_0 – точка максимума.

Направления выпуклости, точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз (вогнутым вверх)* в данной промежутке, если он целиком расположен выше касательной в его произвольной точке.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (вогнутым вниз)* в данной промежутке, если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке.

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке положительна ($f''(x) > 0$), то график ее является выпуклым вниз в этом промежутке; если $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым вверх в соответствующем промежутке.

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется такая его точка M_0, в которой выпуклость меняется на вогнутость (по отношению к одному и тому же направлению: вверх или вниз).

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба). Если вторая производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через x_0, то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика этой функции.

Асимптоты

Асимптотой линии называется прямая, к которой неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

По виду уравнений относительно выбранной декартовой системы координат различают асимптоты вертикальные (параллельные оси Oy) и наклонные (пересекающие ось Oy).

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ является бесконечным.

Например, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{8}{x-2}$, так как $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{8}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{8}{x-2} = +\infty$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ определяется при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если это функция представима в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \tag{5.21}$$

Исследование функции и построение графиков

Под исследованием функции понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функции и построение их графиков можно проводить по *следующей схеме:*

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.

2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения.

3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.

4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.

5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.

7. Найти асимптоты графика функции.

8. Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

9. Если рассматриваемая функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно

оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

10. Отметим также, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой, на которой лежит биссектриса первого координатного угла.

Задачи на наибольшие и наименьшие значения

Наибольшим значением (абсолютным максимумом) функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют такое ее значение, которое больше всех других значений, принимаемых функцией на данном отрезке. Чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке, необходимо вычислить значения максимумов на этом отрезке, значения функции на концах отрезка, а также во всех точках отрезка, в которых производная не определена; из полученных чисел выбрать самое большое. Аналогично определяется и разыскивается *наименьшее значение функции (абсолютный минимум).*

РАЗДЕЛ 5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1: Найти производную функции

$$y = (3x^2 + 7)^5 - \log_2 e^{2x^2} + arctg2x.$$

Решение: Применяя правила дифференцирования суммы и разности функций и правило дифференцирования сложной функции, а также используя таблицу основных производных, запишем:

$$y' = 5(3x^2 + 7)^4 \cdot (3x^2 + 7)' - \frac{1}{e^{2x^2} \cdot \ln 2} \cdot \left(e^{2x^2}\right)' + \frac{1}{1+4x^2} \cdot (2x)'.$$

Вычислив оставшиеся производные, получим:

$$y' = 5(3x^2 + 7)^4 \cdot 6x - \frac{e^{2x^2} \cdot 4x}{e^{2x^2} \cdot \ln 2} + \frac{2}{1+4x^2}.$$

Сократив дробь, получим ответ

$$y' = 30x(3x^2 + 7)^4 \cdot 6x - \frac{4x}{\ln 2} + \frac{2}{1+4x^2}.$$

Ответ: $30x(3x^2+7)^4 \cdot 6x - \frac{4x}{\ln 2} + \frac{2}{1+4x^2}$.

Пример 2: Найти производную функции $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно уравнением: $x^3 + y^3 - 3xy = 7$.

Решение: Дифференцируем обе части равенства, помня, что у — это сложная функция от переменной х:

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0.$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые получим:

$x^2 + y^2 \cdot y' - y - x \cdot y' = 0.$

Затем выполним необходимые преобразования, для того чтобы выразить y':

$x^2 \cdot y' - xy' = y - x^2$;

$y'(y^2 - x) = y - x^2$ и тогда $y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}$.

Ответ: $\frac{y-x^2}{y^2-x}$.

Пример 3: Найти производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin 2t\,. \end{cases}$$

Решение: Согласно формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ получим:

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos 2t \cdot (2t)'}{-\sin 2t \cdot (2t)'} = \frac{\cos 2t \cdot 2}{-\sin 2t \cdot 2} = -ctg 2t.$

Ответ:- $ctg2t$.

Пример 4: Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{\cos x - \cos 3x}$.

Для раскрытия этой неопределенности вида $\frac{0}{0}$ применим правило Лопиталя- Бернуллии дважды:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{\cos x - \cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x + 7\sin 7x}{-\sin x + 3\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x + 49\cos 7x}{-\cos x + 9\cos 3x} = \frac{-1+49}{-1+9} = 6.$

Ответ:6.

Пример 5: Найти экстремумы функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$.

Поскольку $f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5)$, то точками, для которых $f'(x) = 0$, являются $x_1 = -\sqrt{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{5}$.

Исследуем знак второй производной $f''(x) = 12x^2 - 20$ в этих точках: $f''(-\sqrt{5}) = 12 \cdot 5 - 20 > 0,\ f(\sqrt{5}) = 12 \cdot 5 - 20 > 0,\ f(0) = -20 < 0$.

Значит $x_1 = -\sqrt{5}$ и $x_3 = \sqrt{5}$ -точки минимума функции, а $x_2 = 0$ – точка максимума функции. Вычислив значение функции в данных точках, получим:

$$f(-\sqrt{5}) = -10,$$

$$f(\sqrt{5}) = -10,$$

$$f(0) = 15.$$

Ответ: минимумы функции $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = -10$,

Максимум функции $f(0) = 15$.

Пример 6: Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Поскольку вторая производная $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$ обращается в нуль при $x = 2$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 2$ – абсцисса точки перегиба, ордината этой точки $y = f(2) = 3$, т.е. $M(2{,}3)$ – точка перегиба.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 2)$ и выпуклым вниз в интервале $(2, +\infty)$.

Пример 7: Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить ее график.

1. Функция не определена лишь при $x = -1$ и $x = 1$. Следовательно, область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty, -1),\ (-1{,}1),\ (1, +\infty)$, два из которых являются бесконечными.

2. При стремлении аргумента к концам промежутков области определения соответственно получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1,\qquad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1.$$

3. Находим производные данной функции:

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\,,\qquad f''(x)=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Поскольку $f'(x)>0$ при $x<-1$ и $-1<x<0$, то функция возрастает в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(-1,0)$. Так как $f'(x)<0$ при $0<x<1$ и $x>1$, то функция убывает в интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$.

Поскольку $f'(x)=0$ при $x_0=0$ и $f''(x_0)=f''(0)<0$, то $x_0=0$ – точка максимума.

Других критических точек нет, ибо $f'(x)$ не определена только при $x=-1$ и $x=1$, но в этих точках не определена и сама функция.

4. Вычисляем значение максимума функции $\max f(x)=f(0)=-1$.

5. Поскольку $f''(x)>0$ при $x<-1$ и $x>1$, то график функции является выпуклым вниз в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Так как $f''(x)<0$ при $-1<x<1$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(-1,1)$.

Точек перегиба график данной функции не имеет, ибо вторая производная в нуль нигде не обращается и не определена в тех же точках, в которых не определена и сама функция.

6. График функции не пересекает ось Ox, так как уравнение $\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}=0$ не имеет действительных корней. Если $x=0$ (уравнение оси Oy), то $y=-1$, в точке $B(0,-1)$ график пересекает ось Oy.

7. Из п. 2 следует, что график функции имеет две вертикальные асимптоты

$x = -1$ и $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. Последнее вытекает также из того, что

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} \text{ и } \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-1} = 0.$$

Заметив еще, что $f(x) > 0$ при $x < -1$ и $x > 1$, $f(x) < 0$ при $-1 < x < 1$, строим график функции:

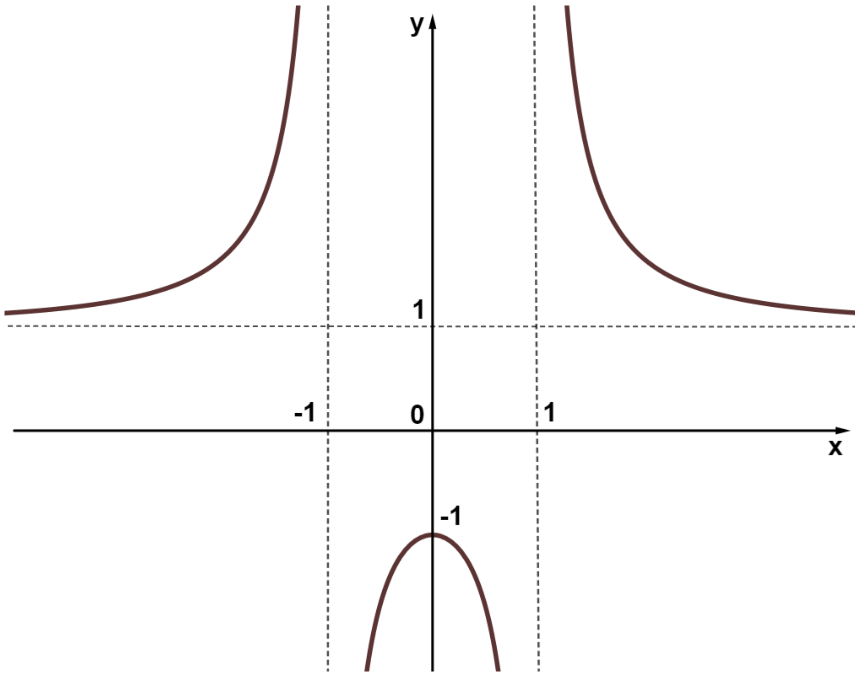


Рисунок 5.1 – график функции

Пример 8: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на отрезке [0,3].

Решение: Найдем сначала экстремумы данной функции: $f'(x) = 3x^2 - 12$, $f''(x) = 6x$, $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Точка $x_1 = -2$ не принадлежит данному отрезку. Так как $f''(2) > 0$, то $x = 2$ – точка минимума, причем $\min f(x) = f(2) = -9$. Находим значения функции на концах отрезка: $f(0) = 7$, $f(3) = -2$. Сравнивая эти числа, заключаем, что наибольшее значение данной функции на заданном отрезке равно 7, а наименьшее -9.

Ответ: наибольшее значение 7,наименьшее -9.

Пример 9: Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение: Пусть прямоугольник $ABCD$, вписанный в эллипс, с основанием $2u$ и высотой $2v$. Площадь прямоугольника определяется формулой $S = 2u \cdot 2v$, где $v = \left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{a^2 - u^2}$ (получено из уравнение эллипса). Следовательно, $S = \left(\frac{4b}{a}\right)u\sqrt{a^2 - u^2}$ – функция переменной u. Так как $S' = \frac{\left(\frac{4b}{a}\right)(a^2-2u^2)}{\sqrt{a^2-u^2}}$, то $S' = 0$ при $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Поскольку $S' > 0$ при $u < \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $S' < 0$ при $u > \frac{a}{\sqrt{2}}$, то $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ – точка максимума функции $S = S(u)$. Если $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то $v = \left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{a^2 - u^2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Следовательно, площадь прямоугольника будет наибольшей, когда его стороны равны $\frac{2a}{\sqrt{2}}, \frac{2b}{\sqrt{2}}$ (тогда площадь равна $2ab$).

Ответ: $\frac{2a}{\sqrt{2}}, \frac{2b}{\sqrt{2}}$.

Пример 10. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за время 8 секунд. Найти угловую скорость вращения колеса в момент времени 32 секунды после начала движения.

Решение: угловая скорость ω зависит от времени t по формуле:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

где $\alpha = kt^2$

$$k = \frac{\alpha}{t^2} = \frac{360}{8^2} = \frac{45}{8}$$

Тогда:

$$\omega = 2kt = 2 \cdot \frac{45}{8} t = \frac{45}{4} t$$

Искомая угловая скорость ω:

$$\omega(32) = \frac{45}{4} \cdot 32 = 360^0 = 2\pi$$

Ответ: 2π (рад/с)

Пример 11. Радиус шара изменяется со скоростью ϑ. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

Решение: Объем шара радиуса r равен:

$$\vartheta = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

Производная:

$$\vartheta' = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot r' = 4\pi r^2 \vartheta$$

Аналогично поверхность шара S:

$$S = 4\pi r^2,$$

$$S' = 4\pi \cdot 2r \cdot r' = 8\pi r \vartheta$$

Ответ: $4\pi r^2 \vartheta$, $4\pi * 2r * r'$

Пример 12. Лестница длиной 10м одним концом прислонена к вертикальной стене, а другим опирается о пол. Нижний конец отодвигается от стены со скоростью 2 м/мин. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы, когда основание ее отстает от стены на 6 м?

Решение: путь в 6 м со скоростью 2 м/мин будет пройден за время:

$$t = \frac{6}{2} = 3 \text{ (мин)}$$

Путь верхнего конца лестницы за это время равен:

$x = \vartheta t = 2t$,

Тогда:

$S = 10 - \sqrt{10^2 - x^2} = 10 - \sqrt{100 - 4t^2}$,

$$S' = \frac{4t}{\sqrt{100 - 4t^2}}$$

$$S'(3) = \frac{4 * 3}{\sqrt{100 - 4 * 3^2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}}\right)$$

Ответ: $\frac{3}{2} \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}}\right)$

Пример 13. По окружности $x^2 + y^2 = a^2$ движется точка M с постоянной скоростью ω. Найти закон движения ее проекции M_1 на ось x, если в момент t=0 точка занимает положение $M_0(a; 0)$. Найти скорость и ускорение точки в начальный момент времени и в момент прохождения начала координат.

Решение: закон движения определяется формулой $x = a\cos\omega t$, тогда скорость движения:

$$x' = -a\omega\sin\omega t\ ,$$

$$x'' = -a\omega^2\cos\omega t$$

В начальный момент времени:

$$x'(0) = 0,$$

$$x''(0) = -a\omega^2$$

В момент прохождения начала координат, т.е. при x=0, $a\cos\omega t = 0$ и $\omega t = \frac{\pi}{2}$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm a\omega$$

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ответ: 0; $-a\omega^2$; $\pm a\omega$;0

Пример 14. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон этой трапеции сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

Рисунок 1 – равнобочная трапеция

Решение: площадь трапеции, изображенной на рис. 1 можно вычислить по формуле:

$$\mathrm{S} = \frac{2a + 2a\cos\alpha}{2} a\sin\alpha = a^2(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$$

Исследуем функцию S на экстремум:

$$S' = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 0,$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0,$$

$$2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

Т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0\ ,$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = 0\ ,$$

$$\frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Проверим, достигает ли функция S своего наибольшего значения при $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$S'' = a^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha)\ ,$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = -a^2\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0\ .$$

Следовательно, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция S достигает наибольшего значения $S \quad = a^2\frac{3\sqrt{3}}{4}$, т.к. $S \quad (0) = 0, S \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 < S_{\text{наиб}}$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1. Найти производные указанных функций

а) $\mathrm{y} = 4x^5 - 6x^3 + 3x^2 + 10x + 14$

б) $y = 6x^7 + 4x^3 - \frac{1}{8}x$

в) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7}x$

г) $y = \sin x + x^2\cos x$

д) $y = x^3\log_2 x$

е) $y = \frac{5x^2 - 6x - 4}{x^2 + 1}$

2. Найти производные указанных функций, применяя правило дифференцирования сложной функции

а) $y = 7^{3x-1}$

б) $y = \ln(tg\ x)$

в) $y = \sqrt{\frac{2x+6}{x+4}}$

г) $y = e^{\sqrt{x^2+4}}$

д) $y = \sin^9\left(\frac{x}{2}\right)$

е) $y = x^3 \sin(\cos x)$

3. Найти производную функции y, заданной неявно или параметрически

а) $x^2 + 2xy + 4y^2 + 9 = 0$

б) $x^2 + y^2 = \ln\frac{y}{x} + 7$

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

г) $x^2 + xy + \cos y = 0$

д) $x = t^3 + t,\ y = t^2 + t + 1$

е) $x = t(1 - \sin t),\ y = t\cos t$

4. Найти производные указанных порядков для следующих функций

а) $\mathrm{y} = 5^x,\ y''$

б) $y = \frac{x}{x^2+1}\ ,\ y''$

в) $y = x^3 + e^{-x},\ y'',\ y''',\ y^{(5)}$

г) $x = \cos^3 t\,,\ y = \sin^3 t\,,\ y''_{xx}$

5. Найти дифференциал функции

а) $y = 2^{\cos x}$

6. Вычислить приблизительно

а) $(0{,}99)^4$

б) $\ln 1{,}02$

в) $\sqrt{24}$

7. Найти пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-2x+1}{x^{20}-4x+3}$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\, x - x}{x^3}$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\pi-2x}\right)$

8. Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума

а) $y=\frac{x}{x^2+1}$

б) $y=\frac{\ln x}{x}$

в) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

г) $y=\ln(2x+3)$

9. Найти точки перегиба графика функции

а) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

б) $y=\frac{x^3}{x-1}$

10. Исследовать функции и построить график

а) $y=\frac{1-x^2}{x^2}$

б) $y=\frac{x}{(1+x)^3}$

в) $y=\frac{x^2}{1-x}$

г) $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$

д) $y=\frac{4x^3}{1-x^3}$

11. Тело движется по прямой по закону $x=\frac{t^3}{3}-7\frac{t^2}{2}+10t-16$ Определить скорость и ускорение тела. В какие моменты времени оно меняет направление движения?

12. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

13. От канала шириной 32 м под прямым углом отходит другой канал шириной 4 м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавить по этой системе каналов (толщину бревна не учитывать).

14. Геодезист размечает прямоугольный участок, одна сторона которого а = 10 м, а другая b изменяется, возрастая с движением геодезиста со скоростью 4 м/мин. С какой скоростью растет площадь участка в момент, когда b = 30 м.

15. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)

РАЗДЕЛ 5. ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

1. а) $20x^4-18x^2+6x+10$. б) $42x^6+12x^2-\frac{1}{8}$. в) $\frac{3}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. г) $\cos x+2x\cos x-x^2\sin x$. д) $3x^2\log_2 x+\frac{x^2}{\ln 2}$. е) $\frac{6x^2+18x-6}{(x^2+1)^2}$. **2.** а) $3\ln 7\cdot 7^{3x-1}$. б) $\frac{1}{\sin x\cos x}$. в) $\frac{1}{\sqrt{(2x+6)(x+4)^3}}$. г) $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot e^{\sqrt{x^2+4}}$. д) $4{,}5\sin^8\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. е) $3x^2\sin(\cos x)-x^3\sin x\cdot\cos(\cos x)$. **3.** а) $-\frac{x+y}{x+4y}$. б) $\frac{(2x^2+1)y}{x(1-2y^2)}$. в) $-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. г) $-\frac{2x+y}{x-\sin y}$. д) $y'_x=\frac{2t+1}{3t^2+1}$. е) $y'_x=\frac{t\sin t-\cos t}{\sin t+t\cos t-1}$ **4.** б) $y''=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. в) $y''=6x+e^{-x}$, $y'''=6-e^{-x}$, $y^{(5)}=-e^{-x}$. г) $-y''_{xx}=\frac{1}{3\sin t\cos^4 t}$. **5.** а) $d_y=-2\sin x\cdot\ln 2\cdot 2^{\cos x}\,dx$. **6.** а) $\approx 0{,}96$. б) $\approx 0{,}02$. в) $\approx 4{,}9$. **7**. а) 0,5; б) 1; в) $-\frac{1}{3}$; г) 1. **8.** а) (-1;1) – интервал возрастания, $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – интервалы убывания, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ – min, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ – max; б) $(0;e)$ – интервал возрастания, $(e;+\infty)$ - интервал убывания, $\left(e;\frac{1}{e}\right)$ – max; в) $(-\infty;+\infty)$ – интервал возрастания, экстремумов нет; г) $(-\infty;0)$ – интервал убывания, $(0;+\infty)$ – интервал возрастания, $(0;\ln 3)$ – min. **9.** а) точек перегиба нет; б) (0;0). 11. 2с., 5с. 12. 3; 6; 4 см. 13. $20\sqrt{5}\approx 44{,}72$ м. 14. 40 м^2/мин. 15. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

РАЗДЕЛ 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Найти производные указанных функций

а) $y=2x^6+6x^5+13x^2+16x+4$

б) $y=\sqrt{x}-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}$

в) $y=x\sqrt[4]{x}+5\cos 1$

г) $y=-10arctg\,x+7\cdot e^x$

д) $y = x\sin x + \cos x$

е) $y = \sqrt[5]{x}\arccos x - \frac{\log_6 x}{x^2}$

2. Найти производные указанных функций, применяя правило дифференцирования сложной функции

а) $y = \sin(x^2 + 2x + 4)$

б) $y = \sqrt{tg\, x}$

в) $y = \arccos(e^x)$

г) $y = e^{\sin x^2}$

д) $y = \sqrt[3]{(1 - 3x)^2}$

е) $y = \frac{x + e^{3x}}{x - e^{3x}}$

3. Найти произведение функции y, заданной неявно или параметрически

а) $2x^2 + 6xy + 7y^2 + 6x - 5y = 0$

б) $e^y - xy + e^{-y} = 0$

в) $x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t$

г) $x = 2^t + 2^{-t},\ y = 2^t - 2^{-t}$

4. Найти произведение указанных порядков для следующих функций

а) $y = x^3 + 9x^2 + 6x - 7,\ y'',\ y'''$

б) $y = \ln\cos x\,,\ y''$

в) $x = e^{3t},\ y = e^{5t},\ y''_{xx}$

5. Найти дифф…….

а) $y = \sqrt[3]{x^5 - 1}$

6. Вычислить приблизительно

б) $\sin 29°$

в) $arctg\ 1{,}05$

7. Найти пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - x}{5x^3 + x^2 - 8x - 2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln ctg\, x$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$

8. Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума

а) $y = \frac{x^3}{x-1}$

б) $y = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$

в) $y = \frac{x^3-4}{4x^2}$

г) $y = \sin x + \cos x$

9. Найти точки перегиба графика функции

а) $y = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$

б) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$

10. Исследовать функции и построить график

а) $\mathrm{y} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

б) $y = \frac{x^2}{x-1}$

в) $y = \frac{x^3}{x^3-1}$

г) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

11. Барометрическое давление p изменяется с высотой h в соответствии с формулой $\ln\frac{p}{p_0} = ch$, где p_0 – нормальное давление, c – постоянная. На высоте 5000 м давление достигает половины нормального. Найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

12. Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается равномерно со скоростью 10 км/ч. С какой скоростью они удаляются друг от друга?

13. Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 3 м, со скоростью 6,34 км/ч. С какой скоростью перемещается тень его головы?

14. Закон движения материальной точки, брошенной в вертикальной плоскости под углом α к горизонту с начальной скоростью ϑ_0 , задается формулами(без сопротивления воздуха) $x = \vartheta_0 t \cos\alpha$, $y = \vartheta_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$, где t – время, g – ускорение силы тяжести. Найти траекторию движения, дальность полета, величину скорости движения.

15. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? Величина прогиба обратно пропорционально произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h.

РАЗДЕЛ 5. ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. а) $12x^5 + 30x^4 + 26x + 16$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{18}{x^3}$; в) $\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$; г) $\frac{-10}{1+x^2} + 7 \cdot e^x$; д) $x\cos x$; е) $\frac{\arccos x}{x\sqrt[5]{x^4}} - \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\ln 6 \cdot \log_4 x - 1}{x^3 \ln 6}$. **2.** а) $(2x+2)\cos(x^2+2x+4)$; б) $\frac{1}{2\sqrt{tg\, x \cos^2 x}}$; в) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; г) $2x \cdot \cos x^2 \cdot e^{\sin x^3}$; д) $\frac{2}{\sqrt[3]{ex-1}}$; е) $\frac{2e^{3x}(3x-1)}{(x-e^{3x})^2}$. **3.** а) $\frac{-2(2x+3y+3)}{6x+14y-5}$; б) $\frac{y}{e^y-e^{-y}-x}$; в) $\frac{\sin t}{1-\cos t}$ или $ctg\frac{t}{2}$; г) $\frac{4^t+1}{4^t-1}$. **4.** а) $y'' = 6x + 18$, $y'''' = 6$; б) $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$; в) $y''_{xx} = \frac{10}{9e^t}$. **5.** а) $dy = \frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5-1)^4}}dx$. **6.** а) $\approx 0{,}485$; б) $\approx 0{,}811$. **7.** а) 1; б) $\frac{1}{5}$; в) 0; г) 10. **8.** а) $(-\infty;-1) \cup \left(-1;\frac{3}{2}\right)$ – интервал убывания, $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ - интервал возрастания, $\left(\frac{3}{2};\frac{27}{4}\right)$ – min; б) экстремумов нет, $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ – интервал убывания, экстремумов нет; в) $(-\infty;-2) \cup (0;\infty)$ – интервал возрастания, $(-2;0)$ – интервал убывания, $\left(-2;-\frac{3}{4}\right)$ – max; г) $\left(2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi +\right.$

$2\pi k; 2\pi + 2\pi k\Big)$ – интервал возрастания, $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5}{4}\pi + 2\pi k\right)$ – интервал убывания, $\left(\frac{5}{4}\pi + 2\pi k; -\sqrt{2}\right)$ – min, $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2}\right)$ – max. **9.** а) (1;-11); б) $\left(-\sqrt[3]{2}; -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. 11. $\frac{dp}{dh} = -\frac{\ln 2}{5000} p_0 2^{-\frac{h}{5000}}$. 12. $10\sqrt{26} \approx 51$ км/ч. 13. 14,63 км/ч. 14. $y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2$; $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$; $\sqrt{v_0^2 - 2\vartheta_0 \sin\alpha\, gt + g^2t^2}$. 15. $b = \frac{d}{2}$; $h = \frac{\sqrt{3}}{2} d$.