УДК 517.956.3

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО-ВЯЗКО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ

Корзюк Виктор Иванович [1], Рудько Ян Вячеславович [2], Колячко Владислав Владимирович [3]
[1] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь,
korzyuk@bsu.by
[2] Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 11, 220012, г. Минск, Беларусь, janycz@yahoo.com
[3] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь,
vlad.kolyachko@yandex.ru

Аннотация: *В настоящей работе исследуется одномерная гиперболическая система уравнений в частных производных, описывающая продольные колебания упруго-вязко-релаксирующего стержня постоянного поперечного сечения. Обосновывается корректность по Адамару задачи Коши и обсуждаются некоторые качественные свойства системы и ее решений: закон сохранения модифицированной «энергии», конечная скорость распространения колебаний, дисперсия и диссипация решений.*

Ключевые слова: *продольные колебания; вязкоупругость; модель стандартного линейного твердого тела; гиперболическая система уравнений; задача Коши; корректно поставленная задача.*

Введение. В строительстве различных сооружений очень часто приходиться иметь дело с колебаниями сплошных сред. Поэтому изучение математических моделей таких явлений является целесообразным. В данной работе мы исследуем одну из таких моделей, представляющую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных, исследуем задачу Коши для нее и обсуждаем качественные свойства решений.

Рассмотрим одномерный вязкоупругий по модели стандартного линейного твердого тела стержень постоянного поперечного сечения, свойства материала которого не зависят от времени и координаты. Для него верно уравнение движения [1]

$$\rho\partial_t^2 u = \partial_x \sigma + f, \tag{1}$$

где f – внешняя объемная сила, ρ – плотность материала стержня, u – дилатации (смещения) стержня, σ – напряжения стержня. А связь между деформацией ε и напряжением σ подчиняется закону [2]

$$\sigma + \tau_\varepsilon \partial_t \sigma = E_0(\varepsilon + \tau_\sigma \partial_t \varepsilon), \tag{2}$$

где E_0 – релаксированный (длительный) модуль упругости, $E_\infty = E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}$ – нерелаксированный (мгновенный) модуль упругости, τ_ε – время релаксации, τ_σ – время запаздывания.

Значит, с учетом определения деформации $\varepsilon = \partial_x \mathrm{u}$, для решения задачи о продольных колебаниях стержня, требуется определить функции $u = u(t,x)$ и $\sigma = \sigma(t,x)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\rho\partial_t^2 u = \partial_x \sigma + f, \qquad \sigma + \tau_\varepsilon \partial_t \sigma = E_0(\partial_x u + \tau_\sigma \partial_t \partial_x u) \tag{3}$$

и некоторым граничным условиями. В качестве таких условий можно взять следующие начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \partial_t u|_{t=0} = v_0, \qquad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \tag{4}$$

Таким образом, задача Коши (3), (4) представляет собой задачу об определении продольных колебаний по известным начальным данным. Из физических соображений, коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют неравенствам $\rho > 0$, $\tau_\varepsilon > 0$, $E_0 > 0$, $\tau_\sigma > 0$.

Законы сохранения. Простейшее обобщение модифицированной «энергии» из [3, 4] на однородную систему (3) при $f \equiv 0$ приводит к функционалу

$$\begin{aligned} E_1(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho(\partial_t u)^2 + \frac{\tau_\varepsilon}{E_0\tau_\sigma}\sigma^2\right)(t,x)dx + \\ + \frac{1}{E_0\tau_\sigma}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\sigma - E_0\partial_x u)(\tau,x)dx, \end{aligned} \tag{4}$$

который не является положительно-определенным. Однако, справедливо утверждение о законе сохранения величины E_1.

Теорема 1. Пусть пара функций u, σ есть классическое решение системы (3) при $f \equiv 0$ и функции $u(t,\cdot)$ и $\sigma(t,\cdot)$ имеют компактный носитель в пространстве для любого t. Тогда функция $t \mapsto E_1(t)$ есть константа.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 из работы [3].

Корректность задачи Коши. Оказывается, что при выполнении условия $E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1} > 0$ система уравнений (3) является гиперболической [5–7]. Это значит, что задача Коши для нее корректно поставлена в классе достаточно гладких функций. Однако, нахождение решения задачи Коши (3), (4) в явном аналитическом затруднительно, в отличии от случая $E_0 = 0$ и $\tau_\sigma E_0 \neq 0$, разобранного в [3]. Поэтому в настоящем докладе ограничимся общими теоремами существования и единственности.

Теорема 2. Пусть выполнены условия гладкости $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $\sigma_0 \in C^1(\mathbb{R})$ и $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Тогда классическое решение $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \ni (t,x) \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$, $v : [0,\infty) \times \mathbb{R} \ni (t,x) \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ задачи Коши (3), (4) существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Доказательство проводится с помощью метода характеристик [6] и теоремы о равенстве смешанных производных [7, с. 235–236].

Замечание 1. Решение u, v, построеное в теореме 2 является непрерывным вместе со всеми частными производными, входящими в уравнение (3), но при этом u не является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией.

Качественные свойства решения задачи Коши. Метод характеристик также позволяет получить ряд утверждений о свойствах решения задачи Коши (3), (4).

Для фиксированных $x_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 > 0$ рассмотрим конус прошлого с вершиной (t_0, x_0)

$$K(t_0, x_0) := \left\{(t,x)\middle|0 \leq t \leq t_0 \wedge |x - x_0| \leq \sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}|t - t_0|\right\}.$$

Утверждение 1 (Принцип причинности)**.** Пусть пара функций u, σ есть глобальное классическое решение задачи Коши (3), (4) при $f \equiv 0$. Значения $u(t_0, x_0)$ и $\sigma(t_0, x_0)$, где $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$, зависят только от значений функций u_0, v_0 и σ_0 на отрезке $[x_0 - t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}]$.

Приведенное выше утверждение 1 показывает, что $u(t_0, x_0)$ и $\sigma(t_0, x_0)$ зависят исключительно от начальных данных на основании характеристического треугольника. Другими словами, начальные данные u_0, v_0 и σ_0 в точке x_0 могут влиять на решение только в области, которая называется конусом будущего с вершиной (t_0, x_0) и определяется выражением

$$\left\{(t,x)\middle|0 \le t \le t_0 \wedge x - \sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}t \le x_0 \le x - \sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}t\right\}.$$

Утверждение 2 (Область зависимости)**.** Пусть пара функций u, σ есть классическое решение системы (3) при $f \equiv 0$. Если $u \equiv \partial_t u \equiv \sigma \equiv 0$ на множестве

$\left\{(t,x)\middle|t = 0 \wedge x \in [x_0 - t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}]\right\}$, то $u \equiv \sigma \equiv 0$ внутри конуса $K(t_0, x_0)$.

Доказательство утверждений 1 и 2 проводится методом характеристик [8, с. 47–49].

Из утверждения 2 следует, что любое возмущение начальных данных, заданное вне отрезка $[x_0 - t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}, x_0 + t_0\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}]$, не влияет на решение внутри $K(t_0, x_0)$. Следовательно, эффекты ненулевых начальных данных распространяются со скоростью, не превышающей $\sqrt{E_0\tau_\sigma\tau_\varepsilon^{-1}\rho^{-1}}$.

Также из утверждения 2 следует, что при каждом фиксированном t носитель решения $u(\cdot, t)$ и $\sigma(\cdot, t)$ является компактным, если $f \equiv 0$ и начальные данные u_0, v_0 и σ_0 являются функциями с компактным носителем.

Волновые решения. Аналогично [3], можно показать, что уравнение (3) допускает решение в виде плоских волн, т. е.

$$u(t,x) = U(kx - \omega t - \phi), \qquad \sigma(t,x) = S(kx - \omega t - \phi),$$

где k – волновое число, ω – циклическая частота, ϕ – фаза.

Как известно [9, с. 176–178], при изучении линейных уравнений в частных производных особенно полезно рассматривать комплекснозначные решения в виде экспоненциальных волн, т. е.

$$u(t,x) = U_0 \exp\big(i(kx - \omega t)\big), \qquad \sigma(t,x) = S_0 \exp\big(i(kx - \omega t)\big) \tag{5}$$

где $U_0 \in \mathbb{C}$ и $S_0 \in \mathbb{C}$ – комплексные амплитуды, $k \in \mathbb{R}$ – волновое число, $\omega \in \mathbb{C}$ – частота. Подставляя пробные решения вида (5) в систему (3) получим соотношения

$$U_0 = -\frac{ikS_0}{\rho\omega^2}, \qquad i\rho\omega^3\tau_\varepsilon - \rho\omega^2 - iE_0k^2\omega\tau_\sigma + E_0k^2 = 0, \tag{6}$$

Анализируя корни $\omega(k)$ кубического уравнения (6) заключаем, что волны различной частоты распространяются с разными скоростями: уравнение (3) создает дисперсию. Рассуждая аналогично [3], приходим к выводу, что решения уравнения (3) обладают свойством рассеяния или затухания.

Заключение. В данной работе показано, что задача Коши для одномерной системы уравнений в частных производных, описывающей продольные колебания упруго-вязко-релаксирующего стержня, является корректной. Также указаны некоторые качественные свойства решений.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2003. – Т. VII: Теория упругости. – 264 с.
2. Shitikova, M. V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review / M. V. Shitikova // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, № 1. – P. 1–33.
3. Корзюк, В. И. Задача о продольных колебаниях вязкоупругого по модели Максвелла стержня / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько, В. В. Колячко // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 3. – С. 489–498.
4. Корзюк, В. И. Продольные колебания упруго-релаксирующего стержня: корректность задачи Коши и качественные свойства решений / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько, В. В. Колячко // Дорожное строительство и его инженерное обеспечение: материалы III Междунар. науч.-техн. конф., 27–28 октября 2022 года, Минск / БНТУ; сост.: С. Н. Соболевская, Е. М. Жуковский. – Минск, 2022. – С. 374–377.
5. Strikwerda, J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations / J. C. Strikwerda. – 2nd ed. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 439 p.
6. Courant, R. Methods of Mathematical Physics: (2 vols.). / R. Courant, D. Hilbert. – New York: John Wiley & Sons, 1989. – V. II: Partial Differential Equations. – 830 p.
7. Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis / W. Rudin. – 3rd ed. – New York: McGraw Hill, 1976. – 342 p.
8. Roždestvenskiĭ, B. L. Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics / B. L. Roždestvenskiĭ, N. N. Janenko. – Providence: American Mathematical Society, 1983. – 676 p.
9. Evans, L. C. Partial Differential Equations / L. C. Evans. – 2nd ed. – Providence: American Mathematical Society, 2010. – 749 p.