

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗЕМНОЙ КОРЕ С УЧЕТОМ ВОДОНОСНОГО ПЛАСТА

Воронова Н.П., доцент, к.т.н., профессор

Герасименко П.В., магистрант

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь

***Аннотация:** Решены две краевые задачи для уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и второго рода для исследования изменения температур в недрах Земли при наличии водоносных пластов. Получены данные для реального водоносного горизонта, залегающего от 400 м до 450 м. Проанализирован удельный тепловой поток при заданной фильтрации по высоте водоносного горизонта. Для решения поставленной задачи применен аналитический метод решения, позволяющий с достаточной степенью точности применять полученные результаты на практике, в частности при исследовании пород в недрах Земли для проведения горных работ.*

***Ключевые слова:** тепломассоперенос, водоносные пласты, краевые задачи, теплопроводность, тепловой поток.*

Решение многих практических задач горного производства связано с изучением процессов тепломассопереноса в недрах Земли, особенно при наличии водоносных пластов [1]. Исследуем изменение температуры $T(K)$ по толщине слоя почвы от $h_1(м)$ до $h_2(м)$ при наличии водоносного пласта. Можно пренебречь теплообменом в горизонтальной плоскости и считать температуру жидкости равной температуре породы в водоносном пласте. Тогда процесс с учетом конвекции описывается краевой задачей для уравнения теплопроводности вида [2]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

$$T = T_1 \text{ при } x = h_1, \quad (2)$$

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \text{ при } x = h_2, \quad (3)$$

где v – скорость фильтрации воды по оси x , $м/с$; a – температуропроводность породы, $м^2/с$; q – удельный тепловой поток, $Вт/м^2$; λ – теплопроводность породы, $Вт/(м \cdot К)$.

Решение уравнения (1) при граничных условиях (2)–(3) имеет вид [3]:

$$T = A + B e^{\frac{v}{a} x}, \quad (4)$$

где постоянные A и B определяются по формулам

$$A = T - \frac{q \cdot a}{\lambda \cdot v} \cdot e^{\frac{v}{a}(h_1 - h_2)}, \quad (5)$$

$$B = \frac{q \cdot a}{\lambda \cdot v} \cdot e^{-\frac{v}{a} h_2}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в формулу (4), получим

$$T = T_1 + \frac{q \cdot a}{\lambda \cdot v} \cdot \left(e^{\frac{v}{a}(x - h_2)} - e^{\frac{v}{a}(h_1 - h_2)} \right). \quad (7)$$

Если водоносный пласт располагается от $h_1 = 400 м$ до $h_2 = 450 м$, скорость фильтрации в вертикальном направлении $v = 10^{-3} м/с$, теплопроводность пород и удельная теплоемкость соответственно равны $\lambda = 2 Вт/(м \cdot К)$ и $c = 0,5 \cdot 10^3 Дж/(кг \cdot К)$, плотность водонасыщенных пород $\rho = 2 \cdot 10^3 кг/м^3$, температура на глубине h_1

равна $T_1 = 200$ К, геотермический удельный поток на глубине h_2 равен $q = 4 \cdot 10^{-2}$ Вт/м², определим изменение температуры в диапазоне толщины водоносного пласта.

Для этого вычислим значения температуры в точках $x_1 = 410$ м, $x_2 = 420$ м, $x_3 = 430$ м, $x_4 = 440$ м, $x_5 = 450$ м по формуле (7).

Коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{2}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^2/\text{с)}.$$

$$T_{410} = 200 + \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(\frac{10^{-3}}{e^{2 \cdot 10^{-6}(410-450)}} - \frac{10^{-3}}{e^{2 \cdot 10^{-6}(400-450)}} \right) \approx 200 \text{ К}.$$

$$T_{420} \approx T_{430} \approx T_{440} \approx T_{450} \approx 200 \text{ К}.$$

При такой постановке задачи изменения температуры по толщине водоносного пласта незначительные. Если изменить граничные условия в виде граничных условий первого рода [4]:

$$T|_{x=h_1} = T_1, \quad T|_{x=h_2} = T_2, \quad (8)$$

То подставляя (8) в общее решение уравнения (1) получим

$$T = T_1 - \frac{(T_2 - T_1) \left(e^{\frac{v}{a} h_1} - e^{\frac{v}{a} x} \right)}{e^{\frac{v}{a} h_2} - e^{\frac{v}{a} h_1}}. \quad (9)$$

Удельный тепловой поток при фильтрации по высоте водоносного горизонта можно вычислить по формуле

$$q = \frac{\lambda \nu (T_2 - T_1) e^{\frac{\nu}{a} x}}{a \left(e^{\frac{\nu}{a} h_2} - e^{\frac{\nu}{a} h_1} \right)}. \quad (10)$$

В результате при заданной постановке задачи и $T_2 = 202 \text{ K}$ температура при $x = 425 \text{ м}$ по формуле (9) равна

$$T_{425} = 200 - \frac{(202 - 200) \left(e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 400} - e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 425} \right)}{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 450 - e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 400}} \approx 200,29 \text{ (K)}.$$

Величина теплового потока вычисляется по формуле (10)

$$q = \frac{2 \cdot 10^{-3} e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 425} (202 - 200)}{2 \cdot 10^{-6} \left(e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 450} - e^{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 400} \right)} \approx 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Литература

1. Шувалов Ю.В., Гендлер С.Т. Моделирование тепловых процессов. – Л.: ЛГИ, 1981.
2. Воронова, Н.П. Математическое моделирование и управление теплотехнологиями промышленных производств: монография / Н.П. Воронова. – Минск: БНТУ, 2009 – 260 с.
3. Воронова, Н.П. Математическое моделирование энергосберегающих технологий нагрева, сушки и термообработки: монография / Н.П. Воронова. – Мн.: БНТУ, 2006. – 86 с.
4. Воронова, Н.П. Выбор определяющих критериев при моделировании процессов тепломассопереноса / Н.П. Воронова, Н.И. Березовский // Прикладные задачи математики и механики: материалы XIII Международной конференции – Севастополь, 2005. – С. 168-170.