УДК 517.518.42

ОПЕРАТОРНЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Акимов В.А., к.ф.-м.н., доцент
Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости 65, г. Минск, Республика Беларусь
vm3_ftk@bntu.by

Аннотация: *В некоторых случаях решение краевых задач математической физики можно разыскивать в виде разложения в ряд по собственным функциям дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемой краевой задаче. Для нахождения коэффициентов этого разложения по системе собственных функций будем использовать операторный метод, который с единых позиций осуществляет требуемое разложение как в ортогональные, так и неортогональные ряды. Для проверки правильности полученного результата привлечем математический аппарат теории вычетов функции комплексной переменной.*

Ключевые слова: *неортогональные ряды; операторный метод; теория функций комплексной переменной.*

Пусть $F(a_m x)$ – собственная функция оператора d_x^2, т.е. $d_x^2\left[F(a_m x)\right] = a_m^2 F(a_m x)$ или $(1-\frac{d_x^2}{a_m^2})F(a_m x)=0$.

Тогда

$$(1-\frac{d_x^2}{a_k^2})F(a_m x)=\begin{cases}(1-\frac{a_m^2}{a_k^2})F(a_m x) & \text{если } m\neq n \\ 0 & \text{если } m=n\end{cases}$$

Применим к ряду

$$F(\mu x) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k F(a_k x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{ч} F_ч(a_k x + A_k^{н} F_н(a_{kx} x) \right]$$

последовательно операции

$$D_0 = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{d_x^2}{a_k^2}) = \frac{\varphi(d_x)}{d_x}, \qquad D_1 = \prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty} (1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}) = \frac{\varphi(d_x)}{1 - d_x^2 / a_k^2},$$

и $D_2 = d_x D_1$.

Причем здесь введены обозначения:

$$F_ч(a_k x) = \frac{F(a_k x) + F(-a_k x)}{2}$$ – четная часть функции

$$F_,(a_k x) = \frac{F(a_k x) - F(-a_k x)}{2}$$ – нечетная

часть функции $$\varphi(\mu) = \mu \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{\mu^2}{a_k^2}) \cdot$$

При $x = 0$ получим:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} F(\mu x)\Big(_{x=0} = A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{\varphi(\mu) F(0)}{\mu} \cdot$$

С учетом

$$\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty} (1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}) \left[F(a_k x) \right] = \prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty} (1 - \frac{a_k^2}{a_m^2}) F(a_k x) =$$

$$= \left[\frac{d}{d\mu} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right] \Big|_{\mu = a_k} \cdot (-\frac{a_k}{2}) F(a_k x) = -\frac{1}{2} \varphi'(a_k) F(a_k x),$$

устанавливаем

$$D_1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{н} F_,(a_k x) \right] = -A_k^{н} \frac{a_k}{2} \varphi'(a_k) F_ч(a_k x)$$

$$D_1\left[F(\mu x)\right]=\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}F_ч(\mu x)\cdot$$

Приравнивая эти выражения при $x = 0$ и замечая, что

$$\left\{D_1\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k^н F_ч(a_k x)\right]\right\}\Big|_{x=0}=0 \text{ находим } \frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}=-A_k^н\frac{a_k}{2}\varphi'(a_k)$$

Откуда следует $$A_k^н=-\frac{2}{a_k\varphi'(a_k)}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}.$$

Аналогично, при помощи оператора D_2 мы определим

$$A_k^ч=-\frac{2\mu}{a_k^2\varphi'(a_k)}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}$$, и в результате получим:

$$F(\mu x)=F(0)\frac{\varphi(\mu)}{\mu}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi'(a_k)}\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_k^2}\cdot\left[\mu F_ч(a_k x)+a_k F_,(a_k x)\right] \quad (1)$$

Полученный результат можно легко проверить. Для этого применим к интегралу $I_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(xz)dz}{(z-\mu)\varphi(z)}$ обычные правила теории вычетов в комплексной плоскости, соединяя вместе вычеты, относящиеся к $\pm a_к$. Здесь μ – некоторое комплексное число, отличное от всех $a_к$, а x – некий вещественный параметр, C_n – описанный с начала координат плоскости комплексного переменного круг радиуса R_n, причем $R_n>|\mu|$ и $|a_n|<R_n<|a_{n+1}|$. В результате находим:

$$I_n=\frac{F(\mu x)}{\varphi(\mu)}-2\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\varphi'(a_k)(\mu^2-a_k^2)}\left[\mu F_ч(a_k x)+a_k F_,(a_k x)\right]-\frac{F(0)}{\mu}\cdot$$

Если при некотором x имеем в пределе независимо от взятого частного значения $|\mu| \leq \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, что будет, например, всегда тогда, когда отношение $\dfrac{F(xz)}{\varphi(z)}$ при $|z| \to \infty$ стремится к нулю равномерно во всех точках C_n, то при этом значении x имеет место равномерно сходящиеся (по отношению μ) разложение в ряд (1).

Разложение имеет место и тогда, когда отношение $\dfrac{F(xz)}{\varphi(z)}$ стремится в конечном числе точек круга C_n не к нулю, а к конечному пределу.

Полученный ряд (3.20) можно дифференцировать произвольное число раз по μ. Дифференцируя m раз и полагая μ=0, в результате получим:

$$F^{(m)}(0)x^m = F(0)\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\varphi(\mu)}{\mu}\right]_{\mu=0} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi'(a_k)}\left\{\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2-a_k^2}\right]_{\mu=0}\cdot F_{ч}(a_k x) + \right. \tag{2}$$
$$\left. + a_k\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\varphi(\mu)}{\mu}\right]_{\mu=0}\cdot F_{,}(a_k x)\right\}$$

Полагая $F^{(m)}(0)\neq 0$, получим разложение x^m в ряд требуемого вида.

Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2-a_k^2}\right)_{\mu=0} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_k^2}\right)_{\mu=0}$$

и тем, что все четные производные от $\dfrac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_k^2}$ равны нулю при μ=0, найдем из (2):

$$x^{2r}=\alpha_0\frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r}}-\frac{2}{\alpha_{2r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_ч(a_k x)}{a_k^2\varphi'(a_k)}\gamma^{(r-1)} \qquad (3)$$

$$x^{2r+1}=-\frac{2}{\alpha_{2r+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_н(a_k x)}{a_k^2\varphi'(a_k)}\gamma_k^{(r)} \qquad (4)$$

Причем введено обозначение $\gamma_k^{(r)}=\frac{1}{(2r+1)!}\left[\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}\right]_{\mu=0}$

Нетрудно убедиться в том, что заменив разлагаемую в ряд функцию $F(\mu x)$ на функцию x^m и используя введенные выше операторы D_0, D_1 и D_2, можно непосредственно получить формулы (3) и (4) операторным методом. Отметим также, что ряды для четных степеней x^{2r} содержат только четные функции $F_ч$, а для нечетных – только нечетные $F_н$.

Литература

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: //Монография/–Мн.: УП «Технопринт», 2003.–101 с.