УДК 517.518.42

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ФУРЬЕ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Акимов Валерий Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент
Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь
vm3_ftk@bntu.by

Аннотация: *Создание соответствующих третьему тысячелетию технологий невозможно без привлечения более современных идей и новейших математических достижений. В этой связи очевидна актуальность предлагаемого ниже нового математического метода разложения кусочно- гладких функций в ряд Фурье. Этот метод основан на применении специально разработанного класса дифференциальных операторов бесконечно высокого порядка.*

Ключевые слова: *ряды Фурье; операторный метод; операторный метод определения коэффициентов рядов Фурье.*

Аппроксимация функций тригонометрическими полиномами имеет большое научное и прикладное значение. Этой тематикой в XIX и XX столетиях занимались многие известные ученые всего мира. А сама тема, названная рядами Фурье, вошла в курс высшей математики и изучается студентами естественных факультетов высших учебных заведений. Вкратце напомним основные положения классической теории [1,2]

Периодичную функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \delta_n x + b_n \sin \delta_n x), \text{ где } \qquad \delta_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\delta_n x)dx\,, \quad n = 0,1,2,.....;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\delta_n x dx\,, \qquad n = 1,2,......; \qquad (1)$$

Числа a_n, b_n, определяемые по формулам (1) называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, а тригонометрический ряд, коэффициентами которого являются эти числа, называется рядом Фурье этой функции. Частные случаи:

если $f(x)$ – четная функция, то $b_n = 0$; $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\delta_n x)dx$, $n = 0,1,2,...$;

если $f(x)$– нечетная функция, то $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\delta_n x dx$, $n = 0,1,2,...$.

Фактически представляется возможным разложить только по косинусам или синусам функцию, заданную на отрезке $[0,l]$ и продолженную четным или нечетным способом на отрезок [–*l*, 0]. В точке разрыва первого рода ряд Фурье функции сходится к значению $f(x) = 0{,}5\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$.

Рассмотрим оператор $T_l = \dfrac{f(x+l) + f(x-l)}{2}$.

Используя альтернативную запись формулы Тейлора $f(x+l) = e^{ld_x} f(x)$, где $d_x = \dfrac{d}{dx}$ можно T_l представить в виде символического оператора дифференцирования бесконечного высокого порядка $\qquad T_l = sh(ld_x)\,, \qquad (2)$

имеющим геометрический смысл сдвига числовой оси на величину l.

Установим два необходимых для дальнейших выкладок свойства оператора T_l по отношению к основному $\left\{\sin\delta_n x, \cos\delta_n x\right\}_{n=0}^{\infty}$ и производному $\left\{x\sin\delta_n x, x\cos\delta_n x\right\}_{n=0}^{\infty}$ классам функций, где $\delta_n = \dfrac{\pi n}{l}$. (3)

Используя известные тригонометрические формулы $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, а также формулу сдвига числовой оси $e^{ld_x} f(x) = f(x+l)$, определяем:

$$T_l[\sin\delta_n x] = \frac{1}{2}[\sin\delta_n(x+l) - \sin\delta_n(x+l)] = \cos\delta_n x \sin\pi n = 0 \ ,$$

$$T_l\left[\cos\delta_n x\right] = \frac{1}{2}[\cos\delta_n(x+il) - \cos\delta_n(x-il)] = \sin\delta_n x \sin\pi n = 0 \quad (4)$$

Аналогично

$$T_l\left[x\sin\delta_n x\right] = \frac{1}{2}\left[(x+l)\sin\delta_n x - (x-l)\sin\delta_n(x-l)\right] =$$

$$= x\sin\pi n\cos\delta_n x + l\cos\pi n\sin\delta_n x = (-1)^n l\sin\delta_n x$$

$$T_l\left[x\cos\delta_n x\right] = (-1)^n l\cos\delta_n x \quad (5)$$

Кроме T_l введем оператор $V_n\left[f(x)\right] = \dfrac{f(x)}{1 + d_x^2 \big/ \delta_n^2}$ (6)

Общее решение операторного уравнения (3.6) можно представить в виде суммы, соответственно, частного и однородного решений

$$V_n\left[f(x)\right] = g_1(x) + g_2(x) \, .$$

На основании [3] имеем:

$$g_1(x) = \frac{1}{\delta_n}\sin\delta_n x \int f(x)\cos\delta_n x dx - \frac{1}{\delta_n}\cos\delta_n x \int f(x)\sin\delta_n x dx \ ,$$

$$g_2(x) = c_1 \sin\delta_n x + c_2 \cos\delta_n x\,, \tag{7}$$

причем $$V_n^{-1}\left[g_1(x)\right] = f(x)\,, \quad V_n^{-1}\left[g_2(x)\right] = 0\,. \tag{8}$$

Если функция *f(x)* принадлежит классу (3.3), то решение частного уравнения проще искать в виде $g_1(x) = A\sin\delta_m x + B\cos\delta_m x$ $g_1(x)$, когда $m = n$.

Исходя из представления $V_n^{-1} = 1 + d_x^2 / \delta_n^2$, после подстановки $g_1(x)$ в (8) и приравнивая коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях справа и слева, получим:

$$V_n\left[\sin\delta_m x\right] = \begin{cases} -\dfrac{\delta_n \cos\delta_n x}{2} & \text{, при } m=n \\ \dfrac{\sin\delta_m x}{1-\delta_m^2/\delta_n^2} & \text{, при } m \neq n \end{cases}$$

$$V_n\left[\cos\delta_m x\right] = \begin{cases} -\dfrac{\delta_n \cos\delta_n x}{2} & \text{, при } m=n \\ \dfrac{\sin\delta_m x}{1-\delta_m^2/\delta_n^2} & \text{, при } m \neq n \end{cases} \tag{9}$$

Теперь введем операторы $D_0 = \dfrac{T_l}{ld_x} = \dfrac{sh(ld_x)}{ldx}$, $D_1 = T_l V_n = \dfrac{sh(ld_x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2}$, $D_2 = ld_x D_1 = \dfrac{ld_x sh(ld_x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2}$, где $d_x = \dfrac{d}{dx}$, $\delta_n = \dfrac{\pi n}{l}$, l – половина длины отрезка [–*l*,*l*].

Используя дополнительные соотношения

$$\frac{\cos\delta_n x}{ld_x} = \frac{\sin\delta_n x}{l\delta_n} + const \qquad \frac{\sin\delta_n x}{ld_x} = \frac{\cos\delta_n x}{l\delta_n} + const\,, \tag{10}$$

а также учитывая выражения (4), (5) и (9), на основе принципа суперпозиций устанавливаем свойства этих операторов в классе функций $\{\sin\delta_n x;\cos\delta_n x\}_{n=0}^{\infty}$.

1. $D_0=\dfrac{shld_x}{ld_x}$; $D_0[\sin\delta_m x]=0$, $D_0[\cos\delta_m x]=0$, $D_0[C]=C$ (11)

2. $D_1=\dfrac{shld_x}{1+d_x^2\big/\delta_n^2}$; $D_1[C]=0$.

$$D_1[\sin\delta_m x]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}l\delta_n}{2}\cos\delta_n x & \text{при } m\neq n\\ 0 & \text{при } m=n\end{cases}\tag{12}$$

$$D_1[\cos\delta_m x]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n}l\delta_n}{2}\sin\delta_n x & \text{при } m\neq n\\ 0 & \text{при } m=n\end{cases}$$

3. $D_2=\dfrac{ld_x shld_x}{1+d_x^2\big/\delta_n^2}$; $D_2=[C]=0$.

$$D_1[\sin\delta_m x]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n}l^2\delta_n^2}{2}\sin\delta_n x & \text{при } m\neq n\\ 0 & \text{при } m=n\end{cases}\tag{13}$$

$$D_2[\cos\delta_m x]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n}l^2\delta_n^2}{2}\cos\delta_n x & \text{при } m\neq n\\ 0 & \text{при } m=n\end{cases}$$

Выше C – произвольная постоянная, а m, n=0,1,2,3 – числа натурального ряда.

Рассмотрим конкретные примеры нахождения коэффициентов рядов Фурье операторным методом.

1. Пусть $x^{2r+1}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\delta_n x$, r=1,1,2, ... , $\delta_n=\frac{\pi n}{l}$.

Произведем над обеими частями записанного ряда операцию D_1. Непосредственно устанавливаем:

$$V_n\left[x^{2r+1}\right]=(1-\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+\frac{d_x^4}{\delta_n^4}-\frac{d_x^6}{\delta_n^6}+...)\left[x^{2r+1}\right]=x^{2r+1}-\frac{(2r+1)2rx^{2r-1}}{\delta_n^2}+$$

$$+\frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^4}x^{2r-3}+...+(-1)^r\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r}}x,$$

где $V_n=\frac{1}{1+d_x^2/\delta_n^2}$.

Кроме того $sh\left(ld_x\right)=ld+\frac{l^3d_x^3}{3!}+...+\frac{l^{2r+1}d_x^{2r+1}}{\left(2r+1\right)!}+...$

В результате получим:

$$D_1\left[x^{2r+1}\right]=l^{2r+1}-\frac{(2r+1)2r}{\delta_n^2}l^{2r-1}+\frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^4}l^{2r-3}+$$

$$+...+(-1)^r\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r}}l \tag{14}$$

Выражение в правой части, на основании (4) принимает вид:

$$D_1\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\delta_n x\right]\Bigg|_{x=0}=b_n\frac{(-1)^{n+1}l\delta_n}{2} \tag{15}$$

Приравнивая (8) и (7) между собой, окончательно находим:

$$x^{2r+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{l^{2r}}{\delta_n} - \frac{(2r+1)2r}{\delta_n^3}l^{2(r-1)} + \ldots + (-1)^r\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r+1}}\right]\sin\delta_n x \quad (16)$$

Полагая в (8) для определенности $r=1$и $l=\pi$, получим известную в теории рядов Фурье формулу /1,2/.

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n 6}{n^3}\right]\sin nx\,.$$

2. Пусть $x^{2r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\delta_n x\,,$ $\qquad r = 0,1,2,\ \ldots\ .$

По аналогии с примером 1, предварительно определяем:

$$D_0\left[x^{2r}\right]\Big|_{x=0} = \frac{l^{2r}}{2r+1}\,,\quad D_0\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\delta_n x\right] = a_0\,,$$

$$D_2\left[x^{2r}\right]\Big|_{x=0} = 2rl^{2r} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{(2r)!\,l^2}{\delta_n^{2r-2}}\,,$$

$$D_2\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\delta_n x\right]\Bigg|_{x=0} = a_n\frac{(-1)^n l^2\delta_n^2}{2}\,.$$

Окончательно получим:

$$x^{2r} = \frac{l^{2r}}{2r+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2rl^{2r-2}}{\delta_n^2} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{(2r)!}{\delta_n^{2r}}\right]\cos\delta_n x \qquad (17)$$

Выражение (9) после подстановки в него значений r=2 и $l=\pi$ принимает вид

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\pi^2}{n^2} + \frac{(-1)^{n-1}6}{n^4}\right]\cos nx\,,$$

что также является хорошо известным результатом. Таким образом, подставляя в (9) и (10) всевозможные значения r и l, приходим к разложению четных и нечетных степенных функций в ряды Фурье. Сравнивая полученные результаты с известными можно убедиться в их полном совпадении.

Как известно, любую функцию можно представить в виде суммы ее четной и нечетной составляющих. Поэтому, разложив отдельно четную составляющую исходной функции в ряд Фурье по косинусам, а нечетную - в ряд по синусам, после суммирования получим ее разложение в полный ряд Фурье. Однако, конструкция полученных формул (4), (5) и (6) такова, что их применение позволяет (как и в классическом случае) получить требуемый результат непосредственно без выделения четной и нечетной составляющих функции. Убедимся в справедливости данного высказывания на конкретном примере.

3. $\exp(ax) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\delta_n x + b_n \sin\delta_n x)$

Как и в приведенных выше примерах, выпишем последовательно результат операций D_0, D_1 и D_2 над правой и левой частями при x=0. В соответствии с формулами (4), (5) и (6), находим:

$$D_0\left[\exp(ax)\right]\Big|_{x=0} = \frac{shla}{la}\exp(ax)\big|_{x=0} = \frac{shla}{la},$$

$$D_0\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\delta_n x + b_n\sin\delta_n x)\right]\Big|_{x=0} = \frac{a_0}{2},$$

$$D_1\left[\exp(ax)\right]\Big|_{x=0} = \frac{shla}{1 + a^2/\delta_n^2}\exp(ax)\big|_{x=0} = \frac{shla}{1 + a^2/\delta_n^2},$$

$$D_1\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\delta_n x+b_n\sin\delta_n x)\right]\Big|_{x=0}=$$

$$=\left[a_n\frac{(-1)^n l\delta_n}{2}\sin\delta_n x+b_n\frac{(-1)^n l\delta_n}{2}\cos\delta_n x\right]\Big|_{x=0}=b_n\frac{(-1)^n l\delta_n}{2},$$

$$D_2\left[\exp(ax)\right]\Big|_{x=0}=\frac{lashla}{1+a^2/\delta_n^2},$$

$$D_2\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\delta_n x+b_n\sin\delta_n x)\right]\Big|_{x=0}=a_n\frac{(-1)^n l^2\delta_n^2}{2},$$

Приравнивая выражения слева и справа для каждого оператора, мы в итоге получим:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{shla}{la},\qquad b_n=\frac{(-1)^n 2\delta_n shla}{l(a^2+\delta_n^2)},$$

$$a_n=\frac{(-1)^n 2ashla}{l(a^2+\delta_n^2)}.$$

Т.е.,

$$\exp(ax)=\frac{shla}{la}+\frac{2shla}{l}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a}{a^2+\delta_n^2}\cos\delta_n x+\frac{\delta_n}{a^2+\delta_n^2}\sin\delta_n x\right),$$

что совпадает с классическим разложением, полученным интегральным методом.

При нахождении коэффициентов представления функций $\sin ax$, $\cos ax$ их тригонометрическим рядам Фурье используются не все три оператора одновременно (как в 3-м примере), а соответственно D_1 или D_0 и D_2 в зависимости от четности или нечетности исходной функции (как показано в 1-м и 2-м примерах). Число примеров, при необходимости, может быть легко продолжено, и во всех случаях мы получим совпадение результатов операторного и классического метода разложения функций в ряд Фурье. В случае удовлетворения функции условиям Дирихле полученный ряд сходится к ней равномерно на всем отрезке [–l, l] /1,2/.

Так как в силу выражений (11), (12) и (13) правая часть известна заранее, то для нахождения коэффициентов достаточно найти оператор от функции в левой части при $x = 0$, что в некоторых случаях сделать проще, чем вычислить соответствующий интеграл, привлекая математический аппарат теории вычетов функции комплексной переменной.

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. //М.: Физматгиз, – 1961 – 936 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. // М.: Мир – 1965 – Т1. – 615 с.; Т2. – 537 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. //Т.2 Издание 21-е стереотипное. – М., 1974. – 656 с.