УДК 624.131.52

С.В.СОБОЛЕВСКИЙ (БПИ)

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ И НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ ВОДОНАСЫЩЕННОМ ОСНОВАНИИ В НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД ПРИЛОЖЕНИЯ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Распределение фильтрационных напряжений при плоском напряженном состоянии в изотропном водонасыщенном основании в начальный период приложения внешней полосовой нагрузки с одинаковыми коэффициентами фильтрации в горизонтальном и вертикальном направлениях исследовано Н.М.Герсевановым [1], а с различными коэффициентами фильтрации – Ю.А.Соболевским [2].

В настоящей работе исследуем напряженное состояние при плоской деформации анизотропного по механическим свойствам водонасыщенного основания с различными коэффициентами фильтрации в горизонтальном и вертикальном направлениях в начальный период приложения внешней нормальной нагрузки. Наиболее ярким примером естественной механической и фильтрационной анизотропии являются ленточные глины. Примером искусственно создаваемой анизотропии основания может служить насыпь, отсыпаемая и трамбуемая слоями. Решаем задачу в общем виде для произвольной нагрузки, а затем рассмотрим частные случаи нагрузки. Конечные формулы данной работы могут служить базой для получения формул последующего периода деформирования, происходящего при изменении элементарного объема водонасыщенного основания.

Пусть на ортотропное водонасыщенное основание, занимающее область $y \geqslant 0$ с главными направлениями, параллельными и перпендикулярными плоскости $y = 0$, в начальный период действует нормальная нагрузка $P(x)$ (рис.1).

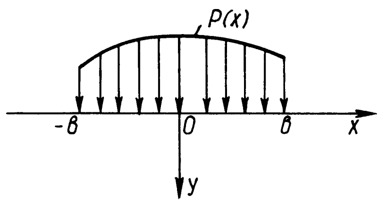

Рис. 1. Схема загружения ортотропного водонасыщенного основания произвольной нагрузкой.

Уравнения равновесия скелета водонасыщенного грунта имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 ; \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial H}{\partial y} = 0 , \end{cases} \tag{1}$$

где γ – объемная масса воды; H – напорная фильтрационная функция.

Уравнения обобщенного закона Гука для ортотропного тела в случае плоской деформации [3]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x}\left[(1-\mu_{xz}^2)\sigma_x - (\mu_{xy} + \mu_{xz}\mu_{zy})\sigma_y\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_y}\left[(1-\mu_{yz}^2)\sigma_y - (\mu_{yx} + \mu_{zx}\mu_{yz})\sigma_x\right]; \quad \varepsilon_z = 0;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \qquad (2)$$

$$\sigma_z = \mu_{zx}\sigma_x + \mu_{zy}\sigma_y,$$

где E_x, E_y – модули деформаций по главным направлениям x, y; $G_{xy}=G$ – модуль сдвига, характеризующий изменение углов между главными направлениями x, y; μ_{xy}, μ_{yx}, μ_{xz}, μ_{zx}, μ_{zy}, μ_{yz} – коэффициенты Пуассона; u, v – соответственно горизонтальные и вертикальные смещения точек основания.

Уравнение неразрывности деформации:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Уравнение напорной фильтрационной функции для ортотропного основания имеет вид [4]:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \text{ или } n^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0, \qquad (4)$$

где $n^2 = K_x/K_y$, K_x, K_y – коэффициенты фильтрации, соответственно, в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Сложим первое и второе уравнения системы (2), получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \left(\frac{1-\mu_{xz}^2}{E_x} - \frac{\mu_{yx} + \mu_{zx}\mu_{yz}}{E_y}\right)\sigma_x + \left(\frac{1-\mu_{yz}^2}{E_y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_{xy} + \mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}\right)\sigma_y. \qquad (5)$$

Если к горизонтальной поверхности ортотропного водонасыщенного основания приложить внешнюю нагрузку P(x), то, как показал Н.М.Герсеванов [1], в начальный период она передается целиком на грунтовую воду. В начальный момент приложения нагрузки содержание воды в любом элементарном объеме водонасыщенного основания не отличается от водосодержания до приложения внешней нагрузки. Поэтому, если пренебречь сжатием защемленного в воде воздуха, то в начальный момент времени грунтовый скелет может испытывать только деформации изменения формы, но не объема, т.е. $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$ [5]. В этом случае уравнение (5) преобразуется в

$$\left(\frac{1-\mu_{xz}^2}{E_x} - \frac{\mu_{yx}+\mu_{zx}\mu_{yz}}{E_y}\right)\sigma_x + \left(\frac{1-\mu_{yz}^2}{E_y} - \frac{\mu_{xy}-\mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}\right)\sigma_y = 0 \qquad (6)$$

или

$$\sigma_x + \nu^2\sigma_y = 0,$$

где

$$\nu^2 = \frac{E_x(1-\mu_{yz}^2) - E_y(\mu_{xy}+\mu_{xz}\mu_{zy})}{E_y(1-\mu_{xz}^2) - E_x(\mu_{yx}+\mu_{zx}\mu_{yz})}.$$

Так как поверхность грунта совпадает с поверхностью покрывающей ее воды, то до приложения внешней нагрузки напор H во всей массе грунта равен нулю. После приложения нагрузки во всех точках поверхности на участке [–b, b] напор H мгновенно повышается до $P(x)/\gamma$, так как вся нагрузка передается на воду.

Граничные условия на поверхности $y = 0$ и на бесконечной глубине $y = \infty$ имеют вид

$$\sigma_x|_{y=0} = 0, \quad \sigma_y|_{y=0} = 0, \quad H|_{y=0} = \begin{cases} \dfrac{P(x)}{\gamma}, & \text{при } -b \leqslant x \leqslant +b \\ 0, & \text{при } |x| > b \end{cases} \qquad (7)$$

$$\sigma_x|_{y=\infty} = \sigma_y|_{y=\infty} = \tau_{xy}|_{y=\infty} = H|_{y=\infty} = 0. \qquad (8)$$

Принимая во внимание (6), уравнения (1)–(2) можно записать следующим образом:

$$-\nu^2\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial H}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial H}{\partial y} = 0; \qquad (1')$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(1-\mu_{xz}^2)\nu^2 + \mu_{xy} + \mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}\sigma_y;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\mu_{yz}^2 + (\mu_{yx}+\mu_{zx}\mu_{yz})\nu^2}{E_y}\sigma_y, \quad \varepsilon_z = 0; \qquad (2')$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \quad \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx} + \mu_{zy})\sigma_y.$$

Исключая из уравнения неразрывности (3) с помощью уравнений (2′) и (1′) деформации, найдем

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + m^2 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \Upsilon \gamma \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{3'}$$

где
$$m^2 = \frac{\dfrac{1-\mu_{yz}^2+(\mu_{yx}+\mu_{zx}\mu_{yz})\nu^2}{E_y} - \dfrac{\nu^2}{2G}}{\dfrac{1}{2G} - \dfrac{(1-\mu_{xz}^2)\nu^2+\mu_{xy}+\mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}};$$

$$\Upsilon = \frac{n^2-1}{2G\left[\dfrac{1}{2G} - \dfrac{(1-\mu_{xz}^2)\nu^2+\mu_{xy}+\mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}\right]}.$$

Применяя к решению задачи (1) – (8) метод интегрального преобразования Фурье [6]

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx}\, dx, \tag{9}$$

получим

$$i\nu^2 s\bar{\sigma}_y(s,y) + \frac{d\bar{\tau}_{xy}(s,y)}{dy} - is\gamma\bar{H}(s,y) = 0;$$

$$-is\bar{\tau}_{xy}(s,y) + \frac{d\bar{\sigma}_y(s,y)}{dy} + \gamma\frac{d\bar{H}(s,y)}{dy} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{d^2\bar{\sigma}_y(s,y)}{dy^2} - m^2 s^2\bar{\sigma}_y(s,y) = -\Upsilon\gamma s^2 \bar{H}(s,y); \tag{11}$$

$$-n^2 s^2 \bar{H}(s,y) + \frac{d^2\bar{H}(s,y)}{dy^2} = 0; \tag{12}$$

$$\bar{\sigma}_x(s,0) = 0, \quad \bar{\sigma}_y(s,0) = 0, \quad \bar{H}(s,0) = \begin{cases} \dfrac{\bar{P}(s)}{\gamma}, & \text{при } -b \leqslant x \leqslant +b \\ 0, & \text{при } |x| > b \end{cases}; \tag{13}$$

$$\bar{\sigma}_x(s,\infty) = \bar{\sigma}_y(s,\infty) = \bar{\tau}_{xy}(s,\infty) = 0. \tag{14}$$

Таким образом, интегральное преобразование Фурье (9) свело решение задачи (1) – (8) к виду (10) – (14).

Общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$\overline{H} = C e^{nsy} + D e^{-nsy} \tag{15}$$

Теперь уравнение (11) выражается следующим образом:

$$\frac{d^2 \overline{\sigma}_y}{dy^2} - m^2 s^2 \overline{\sigma}_y = -\gamma \Upsilon s^2 (C e^{nsy} + D e^{-nsy}). \tag{16}$$

Общий интеграл уравнения (16) будем искать методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Общий интеграл однородного уравнения, соответствующего (16):

$$\overline{\sigma}_y = A e^{msy} + B e^{-msy}, \tag{17}$$

где A, B — пока произвольные функции y.

Согласно методу Лагранжа, функции A и B определяются из системы

$$e^{msy} \frac{dA}{dy} + e^{-msy} \frac{dB}{dy} = 0;$$

$$mse^{msy} \frac{dA}{dy} - mse^{-msy} \frac{dB}{dy} = -\gamma \Upsilon s^2 (C e^{nsy} + D e^{-nsy}).$$

Отсюда получим Υ

$$2e^{msy} \frac{dA}{dy} = -\frac{\gamma \Upsilon}{m} s(C e^{nsy} + D e^{-nsy})$$

или

$$A = A_1(s) - \frac{\gamma \Upsilon}{2m} s[C \int e^{-(m-n)sy} dy + D \int e^{-(m+n)sy} dy] =$$

$$= A_1(s) - \frac{\gamma \Upsilon}{2m} s[-\frac{C}{(m-n)s} e^{-(m-n)sy} - \frac{D}{(m+n)s} e^{-(m+n)sy}] =$$

$$= A_1(s) + \frac{\gamma \Upsilon}{2m(m^2-n^2)} [C(m+n)e^{-(m-n)sy} + D(m-n)e^{-(m+n)sy}];$$

и

$$2e^{-msy} \frac{dB}{dy} = \frac{\gamma \Upsilon}{m} s(C e^{nsy} + D e^{-nsy})$$

или

$$\frac{dB}{dy} = \frac{\gamma \Upsilon}{2m} s[C e^{(m+n)sy} + D e^{(m-n)sy}];$$

$$B = B_1(s) + \frac{\gamma \Upsilon}{2m} s[C \int e^{(m+n)sy} dy + D \int e^{(m-n)sy} dy] =$$

$$= B_1(s) + \frac{\gamma \Upsilon}{2m} s[\frac{C}{(m+n)s} e^{(m+n)sy} + \frac{D}{(m-n)s} e^{(m-n)sy}] =$$

$$= B_1(s) + \frac{\gamma \Upsilon}{2m(m^2-n^2)} [C(m-n)e^{(m+n)sy} + D(m+n)e^{(m-n)sy}].$$

Вводя значения A и B в (17), найдем общий интеграл уравнения

$$\bar{\sigma}_y = A_1(s)e^{msy} + B_1(s)e^{-msy} + \frac{\gamma \Upsilon}{m^2-n^2}(Ce^{nsy} + De^{-nsy}). \quad (18)$$

Граничные условия $\bar{\sigma}_y(s,\infty) = 0$ и $\bar{H}(s,\infty) = 0$ дают $A_1 = 0$ и $C = 0$. Поэтому уравнения (18) и (15) примут вид

$$\bar{\sigma}_y = B_1(s)e^{-msy} + \frac{\gamma \Upsilon}{m^2-n^2} De^{-nsy}; \quad (19)$$

$$\bar{H} = De^{-nsy} \quad (20)$$

Граничные условия $\bar{\sigma}_y(s,0) = 0$ и $\bar{H}(s,0) = \frac{\bar{P}(s)}{\gamma}$ дают

$$B_1(s) = -\frac{\gamma \Upsilon}{m^2-n^2} D \quad \text{и} \quad D = \frac{\bar{P}(s)}{\gamma}, \quad B_1(s) = -\frac{\Upsilon}{m^2-n^2}\bar{P}(s).$$

Уравнения (19) и (20) примут окончательный вид:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\Upsilon}{m^2-n^2}\bar{P}(s)(e^{-nsy} - e^{-msy}); \quad (21)$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{P}(s)}{\gamma} e^{-nsy}. \quad (22)$$

Из второго уравнения системы (10), вводя (21) и (22), найдем

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{is}\left(\frac{d\bar{\sigma}_y}{dy} + \gamma \frac{d\bar{H}}{dy}\right) = -\frac{i}{s}\left[\frac{\Upsilon}{m^2-n^2}\bar{P}(s)(mse^{-msy} - nse^{-nsy}) - \right.$$

$$\left. -\gamma \frac{\bar{P}(s)}{\gamma} nse^{-nsy}\right] = -\frac{i\bar{P}(s)}{m^2-n^2}[m\Upsilon e^{-msy} - n\Upsilon e^{-nsy} - n(m^2 -$$

$$- n^2)e^{-nsy}];$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{i\bar{P}(s)}{m^2-n^2}[-m\Upsilon e^{-msy} + n(\Upsilon + m^2-n^2)e^{-nsy}]. \quad (23)$$

Из первого и второго уравнений системы (2') легко выразить трансформанты смещений точек основания через трансформанты напряжений

$$\bar{u} = \frac{1}{is} \frac{(1-\mu_{xz}^2)\nu^2 + \mu_{xy} + \mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x} \bar{\sigma}_y;$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{s^2}\,\frac{(1-\mu_{xz}^2)\nu^2+\mu_{xy}+\mu_{xz}\mu_{zy}}{E_x}\,\frac{d\bar{\sigma}_y}{dy}+\frac{i}{sG}\,\bar{\tau}_{xy}\,.$$

По теореме обращения [6], $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-ixs}ds$. Учитывая, что $\bar{P}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\xi)e^{is\xi}\,d\xi$, имеем

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Upsilon}{m^2-n^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{-nsy}-e^{-msy})e^{-ixs}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)e^{is\xi}d\xi\,;$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y\,,\quad \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx}+\mu_{zy})\sigma_y\,; \tag{24}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{m^2-n^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[n(\Upsilon+m^2-n^2)e^{-nsy}-m\Upsilon e^{-msy}]e^{-ixs}\times$$

$$\times\,ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)e^{is\xi}\,d\xi\,; \tag{25}$$

$$H = \frac{1}{2\pi\gamma}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-nsy}e^{-ixs}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)e^{is\xi}\,d\xi + 2P(\xi)\kappa\pi\Big].$$

Делая перестановку порядка интегрирования в (24)–(25), получим

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon}{\pi(m^2-n^2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-nys}-e^{-mys})\cos(x-\xi)s\,ds\,;$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y\,,\quad \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx}+\mu_{zy})\sigma_y\,; \tag{26}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\pi(m^2-n^2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}[-m\Upsilon e^{-msy}+n(\Upsilon+m^2-n^2)e^{-nsy}]\times$$

$$\times\,\sin(x-\xi)s\,ds;$$

$$H = \frac{1}{\pi\gamma}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}e^{-nys}\cos(x-\xi)s\,ds + P(\xi)\kappa\pi\Big], \tag{27}$$

где $\kappa = 1$ для $-b \leqslant x \leqslant +b$ и $\kappa = 0$ для $|x| > b$ при $y = 0$; $\kappa = 0$ для $x^2 - b^2 + n^2y^2 > 0$, $\kappa = 1$ для $x^2 - b^2 + n^2y^2 \leqslant 0$ при $y > 0$.

Взяв в (26)–(27) квадратуры по переменной s [7], получим решение задачи (1)–(8) для произвольной нормальной нагрузки $P(\xi)$ в однократных интегралах:

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon}{\pi(m^2-n^2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(\xi)\Big[\frac{ny}{n^2y^2+(x-\xi)^2}-\frac{my}{m^2y^2+(x-\xi)^2}\Big]d\xi\,;$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y\,,\quad \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx}+\mu_{zy})\sigma_y\,; \tag{28}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\pi(m^2-n^2)} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi)[n(\Upsilon + m^2 - n^2)\frac{x-\xi}{n^2y^2+(x-\xi)^2} -$$
$$- m\Upsilon \frac{x-\xi}{m^2y^2+(x-\xi)^2}]d\xi ;$$

$$H = \frac{1}{\pi\gamma}[\int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) \frac{ny}{n^2y^2+(x-\xi)^2} d\xi + P(\xi)\varkappa\pi]. \tag{29}$$

Формулы (28) – (29) удовлетворяют граничным условиям (7) – (8) и уравнениям равновесия (1).

Рассмотрим частные случаи формул (28) – (29) для следующих законов распределения нагрузки $P(x)$: 1) равномерно распределенной $P(\xi) = P_0$ (рис. 2, а); 2) сосредоточенной P (рис. 2,б); 3) треугольной $P(\xi) = \frac{P_0}{2b}\xi$ (рис. 2, в); 4) трапецеидальной $P(\xi) = P_0 + l\xi$ (рис. 2, г) и 5) параболической $P(\xi) = P_0(1 - \frac{\xi^2}{b^2})$ (рис. 2, д).

Подставляя значения вышеуказанных нагрузок в формулы (28) – (29), интегрируя и выполняя простейшие преобразования, найдем распределение напряжений и фильтрационного напора в этих случаях загружения.

С л у ч а й 1. Равномерно распределенная нагрузка $P(\xi) = P_0$ (рис. 2, а):

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon P_0}{\pi(m^2-n^2)}(\operatorname{arctg}\frac{2nby}{x^2-b^2+n^2y^2} - \operatorname{arctg}\frac{2mby}{x^2-b^2+m^2y^2});$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y; \ \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx} + \mu_{zy})\sigma_y; \tag{30}$$

$$\tau_{xy} = \frac{P_0}{2\pi(m^2-n^2)}[m\Upsilon \ln\frac{m^2y^2+(x-b)^2}{m^2y^2+(x+b)^2} - n(\Upsilon + m^2 - n^2) \times$$
$$\times \ln\frac{n^2y^2+(x-b)^2}{n^2y^2+(x+b)^2}];$$

$$H = \frac{P_0}{\pi\gamma}(\operatorname{arctg}\frac{2byn}{x^2-b^2+n^2y^2} + \varkappa\pi). \tag{31}$$

Для изотропного водонасыщенного основания при $\nu = 1$ и $n \to 1$ формулы (30) – (31) примут вид

$$\sigma_y = -\frac{2bP_0y(x^2-y^2-b^2)}{\pi[(x^2+y^2-b^2)^2+4b^2y^2]}, \ \sigma_x = -\sigma_y, \ \sigma_z = 0; \tag{30'}$$

$$\tau_{xy} = \frac{4bP_0xy^2}{\pi[(x^2+y^2-b^2)^2+4b^2y^2]};$$

$$H = \frac{P_0}{\pi\gamma}\left(\operatorname{arctg}\frac{2by}{x^2 - b^2 + y^2} + \varkappa\pi\right). \qquad (31')$$

Решения (30′) – (31′) были получены другим математическим методом Н.М. Герсевановым [1].

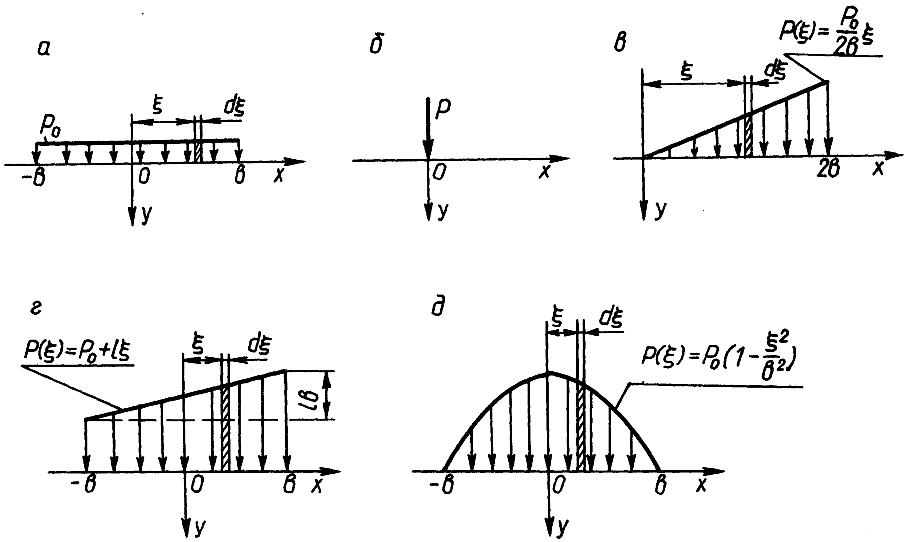

Рис. 2. Частные случаи загружения ортотропного водонасыщенного основания:
а – равномерно распределенная нагрузка; б – сосредоточенная; в – треугольная; г – трапецеидальная; д – параболическая нагрузка.

С л у ч а й 2. Сосредоточенная нагрузка P (рис. 2, б):

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon P}{\pi(m^2 - n^2)}\left(\frac{ny}{x^2 + n^2y^2} - \frac{my}{x^2 + m^2y^2}\right), \; \sigma_x = -\nu^2\sigma_y,$$

$$\sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx} + \mu_{zy})\sigma_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{Px}{\pi(m^2 - n^2)}\left[\frac{n(\Upsilon + m^2 - n^2)}{n^2y^2 + x^2} - \frac{m\Upsilon}{m^2y^2 + x^2}\right];$$

$$H = \frac{P}{\pi\gamma}\left(\frac{ny}{x^2 + n^2y^2} + \varkappa'\pi\right),$$

где $\varkappa' = 1$ для $x = 0$, $y = 0$ и $\varkappa' = 0$ для $|x| > 0$, $y > 0$.

С л у ч а й 3. Треугольная нагрузка $P(\xi) = \dfrac{P_0}{2b}\xi$ (рис. 2, в):

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon P_0}{2\pi(m^2-n^2)b}\Big\{x[\operatorname{arctg}\frac{2nby}{n^2y^2+(x-2b)x} - \operatorname{arctg}\frac{2mby}{m^2y^2+(x-2b)x}] +$$

$$+ \frac{y}{2}[n\ln\frac{n^2y^2+(x-2b)^2}{n^2y^2+x^2} - m\ln\frac{m^2y^2+(x-2b)^2}{m^2y^2+x^2}]\Big\};$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y,\ \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx}+\mu_{zy})\sigma_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{P_0}{2\pi(m^2-n^2)b}\Big\{\frac{x}{2}[m\Upsilon\ln\frac{m^2y^2+(x-2b)^2}{m^2y^2+x^2} - n(\Upsilon+m^2-n^2)\times$$

$$\times\ln\frac{n^2y^2+(x-2b)^2}{n^2y^2+x^2}] + y[n^2(\Upsilon+m^2-n^2)\operatorname{arctg}\frac{2nby}{x(x-2b)+n^2y^2} -$$

$$-m^2\Upsilon\operatorname{arctg}\frac{2mby}{x(x-2b)+m^2y^2}] + 2b(m-n)[\Upsilon-n(m+n)]\Big\};$$

$$H = \frac{P_0}{2\pi\gamma b}[\frac{ny}{2}\ln\frac{n^2y^2+(x-2b)^2}{n^2y^2+x^2} - x\operatorname{arctg}\frac{2nby}{n^2y^2+(x-2b)x} + \varkappa\pi x].$$

С л у ч а й 4. Трапецеидальная нагрузка $P(\xi) = P_0 + l\xi$ (рис. 2, г):

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon}{\pi(m^2-n^2)}\Big\{(P_0+lx)(\operatorname{arctg}\frac{2nby}{x^2-b^2+n^2y^2} - \operatorname{arctg}\frac{2mby}{x^2-b^2+m^2y^2}) +$$

$$+ \frac{ly}{2}[n\ln\frac{(x-b)^2+n^2y^2}{(x+b)^2+n^2y^2} - m\ln\frac{(x-b)^2+m^2y^2}{(x+b)^2+m^2y^2}]\Big\};$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\pi(m^2-n^2)}\Big\{\frac{P_0+lx}{2}[m\Upsilon\ln\frac{m^2y^2+(x-b)^2}{m^2y^2+(x+b)^2} - n(\Upsilon+m^2-n^2)\times$$

$$\times\ln\frac{n^2y^2+(x-b)^2}{n^2y^2+(x+b)^2}] + l[y(n^2(\Upsilon+m^2-n^2)\operatorname{arctg}\frac{2nby}{n^2y^2+x^2-b^2} -$$

$$-m^2\Upsilon\operatorname{arctg}\frac{2mby}{m^2y^2+x^2-b^2}) + (x-2b)(m-n)(n(m+n)-\Upsilon)]\Big\};$$

$$H = \frac{1}{\pi\gamma}[(P_0+lx)(\operatorname{arctg}\frac{2nby}{x^2-b^2+n^2y^2} + \varkappa\pi) + \frac{nly}{2}\ln\frac{(x-b)^2+n^2y^2}{(x+b)^2+n^2y^2}].$$

Случай 5. Параболическая нагрузка $P(\xi) = P_0 \left(1 - \frac{\xi^2}{b^2}\right)$ (рис. 2, д):

$$\sigma_y = \frac{\Upsilon P_0}{\pi(m^2-n^2)b^2}\Big\{(x^2-b^2-m^2y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2mby}{x^2-b^2+m^2y^2} - (x^2-b^2-n^2y^2)\,\times$$

$$\times\ \mathrm{arctg}\,\frac{2nby}{x^2-b^2+n^2y^2} + xy\Big[m\ln\frac{(x-b)^2+m^2y^2}{(x+b)^2+m^2y^2} - n\ln\frac{(x-b)^2+n^2y^2}{(x+b)^2+n^2y^2}\Big] +$$

$$+\ 2(m-n)by\Big\};$$

$$\sigma_x = -\nu^2\sigma_y\,,\quad \sigma_z = (-\nu^2\mu_{zx} + \mu_{zy})\,\sigma_y\,;$$

$$\tau_{xy} = \frac{P_0}{\pi(m^2-n^2)b^2}\Big\{m\Upsilon\,\frac{b^2-x^2+m^2y^2}{2}\ln\frac{m^2y^2+(x-b)^2}{m^2y^2+(x+b)^2} - 2bx(m-n)[\Upsilon -$$

$$-n(m+n)] - n(\Upsilon + m^2 - n^2)\,\frac{b^2-x^2+n^2y^2}{2}\ln\frac{n^2y^2+(x-b)^2}{n^2y^2+(x+b)^2} + 2xy\Big[m^2\Upsilon\ \times$$

$$\times\ \mathrm{arctg}\,\frac{2mby}{m^2y^2+x^2-b^2} - n^2(\Upsilon + m^2 - n^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2nby}{n^2y^2+x^2-b^2}\Big]\Big\};$$

$$H = \frac{P_0}{\pi\gamma b^2}\Big[(b^2 - x^2 + n^2y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2nby}{x^2-b^2+n^2y^2} - nxy\ln\frac{(x-b)^2+n^2y^2}{(x+b)^2+n^2y^2} -$$

$$-\ 2nby + (b^2 - x^2)\,\varkappa\pi\Big].$$

На основании вышеприведенных формул можно вычислить распределение напряжений, смещений и фильтрационного напора в любой точке основания и построить соответствующие эпюры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герсеванов Н.М. Основы динамики грунтовой массы. – М., 1937. – 241 с. 2. Соболевский Ю.А. Водонасыщенные откосы и основания. – Минск, 1975. – 398 с. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.-Л., 1950. – 299 с. 4. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. – М., 1974. – 295 с. 5. Флорин В.А. К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. – М., 1938. – 81 с. 6. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. – М., 1955. – 667 с. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М., 1963. – 1100 с.