максимальных расходов 8, 10 и 12 м^3/с и определены соответствующие площади затопления поймы (рис. 2). Установлено, что при Q = 8 м^3/с затопление нижележащих сельскохозяйственных угодий минимально — 10 % всей площади поймы. Время опорожнения прудов при этом расходе незначительно превышает нормативное и составляет 66 сут. При Q = 10 м^3/с затопление угодий охватывает 16 % всей площади поймы, время опорожнения прудов — 52 сут, при Q = 12 м^3/с эти показатели равны, соответственно, 25 % и 43 сут. Поэтому рекомендуется принять график сбросов, при котором максимальный суммарный расход составляет 10 м^3/с.

Выбранный режим сброса воды из рыбоводных прудов Любанского рыбхоза удовлетворяет требованиям ведения рыбного хозяйства и обеспечивает при сбросах минимум площадей затопления пойменных сельскохозяйственных угодий.

Следует отметить, что русло р. Орессы деформируется, и расходы, проходящие через водоспуски, медленно изменяются. Поэтому для уточнения полученных результатов необходимо выполнить достаточно детальную съемку поймы, оперативное измерение сбросных расходов и расчет неустановившегося движения воды на участке реки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станкевич А.П. Уточнение коэффициентов шероховатости для систем водотоков бассейна р. Припять. — В кн.: Проблемы Полесья. Минск, 1982, вып. 8, с. 149—155. 2. Математическая модель системы водотоков бассейна р.Припять в естественном состоянии и при обваловании/В.П.Рогунович, Ю.И.Вап, С.А.Бампи, Ф.Д.Шнипов. — Там же, с. 75—92. 3. Срибный Н.Ф. Формула средней скорости течения рек и их гидравлическая классификация по сопротивлению движению. — В кн.: Исследование и комплексное использование водных ресурсов. М., 1960. 4. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. — М., 1969. — 463 с.

УДК 532.517.4

Ф.Д.ШНИПОВ (ЦНИИКИВР)

К РАСЧЕТУ ТРЕХМЕРНОГО ПОЛЯ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ПО ДЛИНЕ ПОТОКАХ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В прямолинейных однородных по длине потоках некруглого поперечного сечения, помимо продольных, существуют поперечные компоненты осредненной скорости [1, 7, 8]. Причиной поперечных течений являются турбулентные напряжения, в основном нормальные компоненты. Небольшие по абсолютному значению поперечные компоненты осредненной скорости (3÷10 % от средней по сечению) играют важную роль во многих процессах: интенсифицируют перемешивание, тепло- и массообмен, влияют на распределение продольных скоростей и гидравлические сопротивления, увеличивают касательные напряжения в окрестности углов сечения, во взвесенесущих потоках создают дефициты взвешенных наносов в области повышенных касательных напряжений, однообразно транспортируют в поперечном сечении донные насосы и тем самым способствуют деформациям земляных русел водотоков и т.д.

В статье представлены основные положения расчета трехмерного поля осредненных скоростей в однородных по длине потоках трапецеидального поперечного сечения.

При решении задачи в качестве исходных использованы уравнения турбулентного движения, полученные в [1] из уравнений Рейнольдса:

$$
\begin{cases}
(K+\nu)\Delta^2\psi + \left(2\dfrac{\partial K}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Delta\psi + \left(2\dfrac{\partial K}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi = \\
= \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\overline{V_3' V_3'} - \overline{V_2' V_2'}\right); \\
(K+\nu)\Delta\overline{V}_1 + \left(\dfrac{\partial K}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_3}\overline{V}_1 + \left(\dfrac{\partial K}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\overline{V}_1 = -F_1,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $\overline{V}_1$ – продольная осредненная скорость; ψ – функция тока поперечной циркуляции; K – скалярный кинематический коэффициент турбулентной вязкости; ν – кинематический коэффициент физической вязкости; $\overline{V_i'V_i'}$ – нормальные турбулентные напряжения; $F_1 = g \cdot i_0$; i_0 – уклон дна; x_1, x_2, x_3 – соответственно, продольная, вертикальная и горизонтальная оси координат.

После подстановки турбулентных напряжений $V_i' V_i'$, вычисленных с помощью полуэмпирических зависимостей, расчет по которым удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [1], система (1) все же остается незамкнутой, так как в нее входят три неизвестные функции: ψ, K, $\overline{V}_1$. В подобных случаях, как правило, пытаются замкнуть (1) посредством гипотезы о распределении кинематического коэффициента турбулентной вязкости. Но ввиду слабой изученности характера его изменения выдвижение гипотезы, удовлетворительно подтверждаемой экспериментальными данными, даже в простейшем случае плоского потока, затруднительно [2]. В потоках ограниченных размеров задача значительно усложняется. Поэтому представляется целесообразным, используя способ, предложенный в [3] для прямоугольных каналов, разработать метод расчета кинематического коэффициента турбулентной вязкости в потоках трапецеидального поперечного сечения.

Пренебрегая в первом приближении инерцией поперечного осредненного движения $\partial\psi/\partial x_i$, второе уравнение системы (1) дополняется полуэмпирической зависимостью для продольной скорости $\overline{V}_1$ [4], расчет по которой в большей части потока удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [5], и для уравнения в частных производных первого порядка относительно K

$$
\frac{\partial \overline{V}_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{V}_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_2} = -F_1 - (K+\nu)\Delta\overline{V}_1 . \tag{2}
$$

формулируется задача Коши.

Сложные выражения для коэффициентов и свободного члена уравнения (2) не позволяют получить его аналитического решения. Поэтому разработан и реализован на ЭВМ метод численного решения (2). В результате получено распределение по трапецеидальному сечению кинематического коэффициента турбулентной вязкости.

Вычисленные значения K позволяют замкнуть первое уравнение системы (1) и получить для расчета поперечных компонентов осредненной скорости дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$\Delta^2\psi + \frac{2}{K_1}\cdot\frac{\partial K}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi + \frac{2}{K_1}\frac{\partial K}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\Delta\psi = \frac{1}{K_1}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}a_1K\left(\frac{\partial\bar{V}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\bar{V}_1}{\partial x_3}\right), \qquad (3)$$

где $K_1 = K + \nu$ – кинематический коэффициент суммарной вязкости; эмпирическая постоянная $a_1 = \text{const}$.

Аналогичное уравнение для расчета поперечных течений получено в [1]. Воспользуемся методом решения уравнения (3), изложенным в [1]. Введением вихря скорости $\Delta\psi = W$ заменяем (3) распадающейся системой двух уравнений в частных производных второго порядка:

$$\begin{cases}\Delta W + d(x_2, x_3)\dfrac{\partial W}{\partial x_2} + c(x_2, x_3)\dfrac{\partial W}{\partial x_3} = f(x_2, x_3);\\ \Delta\psi = W,\end{cases} \qquad (4)$$

где

$$d(x_2, x_3) = \frac{2}{K_1}\cdot\frac{\partial K}{\partial x_2}; \quad c(x_2, x_3) = \frac{2}{K_1}\cdot\frac{\partial K}{\partial x_3};$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{1}{K_1}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}a_1K\left(\frac{\partial\bar{V}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\bar{V}_1}{\partial x_3}\right),$$

для которых ставятся задачи Дирихле: в области, ограниченной пристенным слоем, осью симметрии и свободной поверхностью, найти функцию W, удовлетворяющую первому уравнению системы (4) и принимающую на границе $W|_г =$ $= 0$. Затем находим функцию ψ, удовлетворяющую второму уравнению системы (4) и принимающую на границе $\psi|_г = 0$.

После решения поставленных задач и получения значений функции тока ψ замыкается второе уравнение системы (1) и для расчета во втором приближении продольной скорости ставится смешанная задача: в области, ограниченной стенками, осью симметрии и свободной поверхностью, найти функцию V_1, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\bar{V}_1 + \frac{1}{K_1}\left(\frac{\partial K}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\bar{V}_1 + \frac{1}{K_1}\left(\frac{\partial K}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\bar{V}_1 = -F_1 \qquad (5)$$

и принимающую на жесткой поверхности $\overline{V}_1|_{\Gamma_1} = 0$, на оси симметрии и свободной поверхности $- \dfrac{\partial \overline{V}_1}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$, где n – нормаль к соответствующей границе. Краевые условия, назначаемые из физических соображений, являются приближенными и должны быть уточнены при последующих итерациях.

При решении задач Дирихле для уравнений (4) краевые условия задаются на границе пристенного слоя, толщина которого в общем случае зависит от локального касательного напряжения, размеров шероховатости и является величиной, переменной по периметру. Но при приближенном решении задачи погрешность расчетов в области, не слишком близкой к границам, будет небольшой, если толщину пристенного слоя принять постоянной и равной среднему значению, определяемому по локальным δ (или локальным значениям коэффициента шероховатости). Однако следует отметить, что при вычислении коэффициентов уравнений (4), (5) используются локальные значения δ и тем самым учитывается влияние на скоростную структуру потока его изменение по периметру. Из вида уравнений (4), (5) и выражений для коэффициентов следует, что аналитическое решение поставленных задач затруднительно. Поэтому целесообразно использование численных методов.

Решения уравнений (4), (5) отыскиваются на прямоугольной сетке с неравномерным шагом. Точка сгущения его – угол сечения. Шаг сетки изменяется по следующему закону:

1. Вертикальная ось x_2 :

$$x_2(J) = \delta \cdot j \cdot e^{h(j-1)}, \; j = \overline{1, N};$$

$$x_2(N+1) = H_0,$$

где $h = \dfrac{1}{N-1} \cdot \ln \dfrac{H_0 - \varepsilon}{N - \delta}$; N – количество расчетных слоев при $\delta \leqslant x_2 \leqslant H_0 - \varepsilon$; H_0 – максимальная глубина; δ – толщина пристенного слоя.

2. Горизонтальная ось x_3 :

а) дно:

$$x_3(1) = 0;$$

$$x_3(I) = \frac{B-\varepsilon}{H_0-\delta}\left[H_0 - \delta(N_1 - I + 1)e^{B(N_1 - I)}\right] + \varepsilon \; ; \; I = \overline{2, N_1},$$

где $B = \dfrac{1}{N_1-2} \cdot \ln \dfrac{H_0}{(N_1-1)\delta}$; N_1 – количество расчетных слоев.

б) откос:

$$x_3(I) = m \cdot \delta \cdot (I - N_1 + 1)e^{h(I-N_1)} + B_0 - \delta/\sin(\operatorname{arctg} m); I = \overline{N_1, N_2},$$

где m – коэффициент заложения откоса; B_0 – полуширина по дну; $N_2 = N + N_1 - 1$.

Таким образом, область решения покрыта сеткой, узлы которой плотно располагаются у угла сечения и у жестких границ и менее плотно – у свободной поверхности и оси симметрии. Поставленные задачи для уравнений (4) и (5) аппроксимированы разностными на сетке с использованием пятиточечного шаблона типа "крест". Погрешность аппроксимации – $O(h^2)$.

После замены производных в дифференциальных уравнениях конечно-разностными отношениями значений искомой функции в узлах принятой сетки получим систему разностных уравнений:

$$B_{i,j}W_{i,j-1} + Q_{i,j}W_{i-1,j} - R_{i,j}W_{i,j} + A_{i,j}W_{i+1,j} + E_{i,j}W_{i,j+1} = f_{i,j} \quad , \qquad (6)$$

где $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $E_{i,j}$, $Q_{i,j}$, $R_{i,j}$ – коэффициенты, вычисляемые через параметры сетки, и коэффициенты дифференциальных уравнений.

Система скалярных уравнений (6) сводится к системе трехточечных векторных уравнений, для которых разработан экономичный метод решения – метод матричной прогонки [6]. Воспользуемся им, причем все дальнейшие выкладки приведем для задачи Дирихле, а для смешанной задачи укажем лишь отличия.

Обозначим $\vec{W}_j = (W_{j,2}, W_{j,3}, ..., W_{j,M_j})$ – вектор искомой функции на j-м слое, компонентами которого являются значения функции во внутренних узлах сетки (M_j – количество внутренних узлов). Тогда система трехточечных векторных уравнений примет вид

$$C_1\vec{W}_1 - P_1\vec{W}_2 = \vec{F}_2 \, , \; j = 1 \, ;$$
$$-\theta_j\vec{W}_{j-1} + C_j\vec{W}_j - P_j\vec{W}_{j+1} = \vec{F}_j \, , \; 2 \leqslant j \leqslant N \, ; \qquad (7)$$
$$-\theta_{N+1}\vec{W}_N + C_{N+1}\vec{W}_{N+1} = \vec{F}_{N+1} \, , \; j = N+1 \, ,$$

где C_j – квадратная трехдиагональная матрица размерностью $M_j \times M_j$; θ_j; P_j – в общем случае прямоугольные матрицы специального вида размерностью, соответственно, $M_j \times M_{j-1}$ и $M_j \times M_{j+1}$.

Элементами матриц – коэффициентов векторных уравнений (7) являются коэффициенты разностных уравнений (6).

Рекуррентные соотношения, определяющие прогоночные коэффициенты, с учетом граничных условий первого рода имеют вид

$$\alpha_2 = 0 \, , \quad \vec{\beta}_2 = 0 \, ;$$
$$\alpha_{j+1} = (C_j - \theta_j \alpha_j)^{-1} \cdot P_j \, , \qquad j = 2, 3, ..., N \, ; \qquad (8)$$
$$\vec{\beta}_{j+1} = (C_j - \theta_j \alpha_j)^{-1} (\vec{F}_j + \theta_j \vec{\beta}_j) \, , \; j = 2, 3, ..., N+1.$$

Решение задачи (7) найдется в виде

$$\vec{W}_{N+1} = \vec{\beta}_{N+2} = 0 \, ;$$

$$\vec{W}_j = \alpha_{j+1} \vec{W}_{j+1} + \vec{\beta}_{j+1} \, , \; j = N, N-1, N-2, ..., 1,$$

где α_j – матрица размерности $M_j \times M_{j+1}$; $\vec{\beta}_j$ – вектор размерности M_j.

При решении смешанной задачи для уравнения (5) в вектор неизвестных, кроме того, входит значение функции в граничном узле на оси симметрии потока. Прогоночные коэффициенты α_2, $\vec{\beta}_2$ аналогичны (8), так как на жесткой границе поставлено условие первого рода. Вектор $\vec{\beta}_{N+2} = \vec{W}_{N+1}$ имеет вид

$$\vec{\beta}_{N+2} = (E - E\alpha_{N+1})^{-1}(-E\vec{\beta}_{N+1}),$$

где E — единичная матрица.

Таким образом, поставленные краевые задачи для уравнений (4) и (5) могут быть решены численными методами. В результате в узлах сетки будут получены значения функции тока ψ, вычислено распределение по трапецеидальному сечению поперечных компонентов осредненной скорости $\overline{V}_3 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}$, $\overline{V}_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_3}$, а также рассчитано распределение продольной осредненной скорости $\overline{V}_1$ с учетом влияния поперечных составляющих.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о г у н о в и ч В.П. Исследование трехмерного поля осредненных скоростей в однородных по длине потоках: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Минск, 1971. – 28 с. 2. Ш н и п о в Ф.Д. Обобщение исследований по распределению на средней вертикали кинематического коэффициента турбулентной вязкости. – В кн.: Водное хозяйство и гидротехническое строительство. Минск, 1982, вып. 12, с. 67–73. 3. Р о г у н о в и ч В.П. Распределение суммарной вязкости в потоке прямоугольного сечения. – В кн.: Проблемы использования водных ресурсов. Минск, 1971, с. 139–155. 4. Р о г у н о в и ч В.П., О с и п о в и ч А.А., Ц а ц у к Г.С. Распределение продольного компонента осредненной скорости в однородных по длине потоках трапецеидального сечения. – В кн.: Водное хозяйство и гидротехническое строительство. Минск, 1980, вып. 10, с. 109–117. 5. О с и п о в и ч А.А., Б о г д а н о в и ч М.И. Экспериментальная проверка модели распределения продольных скоростей в трапецеидальном канале. – В кн.: Моделирование речных потоков. М., 1982, с. 100–103. 6. С а м а р с к и й А.А., Н и к о л а е в Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М., 1978. – 589 с. 7. B r u n d r e t t E., B a i n e s W.D. The production and diffusion of vortity in duct flow. – J.Fluid Mech., 1964, vol. 19, p. 375–394. 8. E i n s t e i n H.A., L i H. Secondary currents in straight channels. – Transact. Amer. Geoph. Union, 1958, vol. 36., N 6, p. 1085–1088.

УДК 626.824

М.И.БОГДАНОВИЧ (ЦНИИКИВР)

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕРАВНОМЕРНОСТИ И НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ

Основным из преимуществ сокращенного способа определения расходов воды [1] является его высокая оперативность, достигаемая путем непосредственного измерения средней скорости потока $\overline{v}$ в точке живого сечения, координаты которой рассчитываются заранее по методике, разработанной для случая равномерного движения. Применение этого способа для неравномерных и нестационарных потоков требует анализа отличий распределения скоростей в названных и равномерном потоках, особенно в области расположения