

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенберг Л.И., Русинов М.И. Особенности в схематизации пойменных русел при расчетах неустановившегося движения воды // Тр. ГГИ. — 1967. — Вып. 140. — С. 83–90.
2. Федосеев В.А. Одномерная схематизация неустановившегося движения при изоляции русла и поймы // Тр. ГГИ. — 1969. — Вып. 173. — С. 3–33.
3. Шугрин С.М. Соединение одномерной и двухмерной (плановой) моделей течения воды // Водные ресурсы. — 1987. — № 5. — С. 5–15.
4. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики открытых потоков. — М., 1978. — 240 с.
5. Никифоровская В.С. О численных моделях неустановившихся течений в руслах с поймами // Динамические задачи механики сплошных сред. — Новосибирск, 1978. — Вып. 35. — С. 89–98.
6. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. — М., 1982. — 240 с.
7. Шабрин А.М. Швидкісна структура відкритих потоків при несталеному русі // Доповіді АН УРСР. — 1963. — № 11. — С. 1448–1451.
8. Шабрин А.Н. Исследование скоростей структуры неустановившегося открытого потока: Автореф. ... канд. техн. наук. — Киев, 1964. — 17 с.
9. Богданович М.И. Анализ влияния неравномерности и нестационарности движения на распределение продольных осредненных скоростей // Водное хоз-во и гидротехн. стр-во. — Мн., 1985. — Вып. 14. — С. 81–85.
10. Рогунович В.П., Богданович М.И. Распределение продольных скоростей в руслах неправильной формы сечения // Водное хоз-во и гидротехн. стр-во. — Мн., 1984. — Вып. 13. — С. 56–62.
11. Богданович М.И. Метод расчета продольного компонента осредненной скорости в равномерных потоках неправильной формы поперечного сечения // Динамика и термика рек, водохранилищ и эстуариев. — М., 1984. — Т. 1. — С. 21–23.
12. Рогунович В.П. Определение приведенного коэффициента шероховатости // Метеорология и гидрология. — 1986. — № 3. — С. 81–88.
13. Бампи С.А. Определение коэффициента шероховатости на границе транзитного потока и водоворотной зоны в круглой трубе с диафрагмами // Изучение и использование водных ресурсов. — М., 1980. — С. 105–110.
14. Рогунович В.П., Вап Ю.И., Бампи С.А., Шнипов Ф.Д. Математическая модель системы водотоков бассейна р. Припять в естественном состоянии и при обваловании // Проблемы Полесья. — 1982. — № 8. — С. 75–92.
15. Abbott M.B., Verhoeg F.A. Data reversible sustems for flood routing // 13 th Congr. Internat. Assoc. Hydraul. Res. Kyoto, 1969. — Vol. 1. — P. 305–312.

УДК 532.543

Ф.Д. ШНИПОВ

К ВОПРОСУ О ГЕНЕРАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

Изучению трехмерного движения воды в прямолинейных руслах некруглой формы уделяется большое внимание. Исследования проводятся в двух тесно взаимосвязанных направлениях: теоретическом, посвященном созданию математических моделей, и экспериментальном, направленном на углубленное изучение механизма турбулентных течений в каналах ограниченных размеров и получение данных для обоснования разрабатываемых математических моделей. Однако все достигнутое относится в основном к простейшим видам течений, в частности трубам прямоугольной формы [1].

Важным аспектом турбулентного движения воды в руслах некруглой формы являются поперечные течения, существование которых доказано теорети-

чески [2] и экспериментально [3, 4]. Они оказывают значительное влияние на различные процессы (устойчивость сечений, транспорт наносов, тепло- и массоперенос и т.д.). Нами рассматривается механизм формирования этих течений в прямолинейных руслах, причем основное внимание уделено потокам со свободной поверхностью. По мнению О.Ф. Васильева [5], это одна из актуальных задач гидродинамики русл.

Для изучения механизма возникновения поперечных течений в прямолинейных потоках используют уравнение баланса завихренности осредненного движения. Применяя операцию $rot_{x_1} \bar{F}$ к проекциям на оси x_2, x_3 параболизированного уравнения сохранения количества движения, получим

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial W_1}{\partial t}}_{P_1} + \underbrace{\bar{v}_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1}}_{P_2} + \underbrace{\bar{v}_2 \frac{\partial W_1}{\partial x_2}}_{P_3} + \underbrace{v_3 \frac{\partial W_1}{\partial x_3}}_{P_4} = \underbrace{\nu \Delta W_1}_{P_4} + \underbrace{W_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}}_{P_5} + \\ & \underbrace{W_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + W_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}}_{P_6} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{v}_3^2 - \bar{v}_2^2)}_{P_7} - \\ & \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (-\bar{v}_2' \bar{v}_3')}_{P_8}, \end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты (продольная, вертикальная и горизонтальная), \bar{v}_i, W_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты соответственно осредненной скорости и завихренности осредненного движения:

$$W_1 = \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}; \quad W_2 = \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}; \quad W_3 = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}.$$

Из уравнения (1) следует, что в трехмерном нестационарном турбулентном потоке, имеющем преимущественно вдоль x_1 направление движения, существуют два источника генерации поперечных течений: генерация, обусловленная градиентами турбулентных напряжений P_7, P_8 ; генерация, обусловленная поперечными градиентами продольной осредненной скорости P_6 и так называемым растяжением продольной компоненты вихря P_5 . Изменение интенсивности поперечной циркуляции может происходить также за счет локального P_1 и конвективного P_2, P_3 переносов завихренности W_1 , а также вязкой диффузии P_4 . Конвективные слагаемые (1) не создают и не уничтожают поперечные течения, они могут лишь перемещать их из областей высокой в области низкой интенсивности, причем P_2 направляет завихренность вниз по по-

току, а P_3 выравнивает ее в поперечном сечении. Аналогичное действие оказывает и диффузионное слагаемое P_4 .

В различных областях потока знаки слагаемых P_5, P_6, P_7, P_8 могут быть разными и, следовательно, будут входить в уравнение завихренности или в виде источника, или в виде стока, т.е. формируют поперечную циркуляцию противоположного направления. В областях с одинаковыми знаками источников членов интенсивность поперечных течений увеличивается, с различными — уменьшается.

Простейшей идеализацией турбулентного течения в прямолинейных руслах ограниченных размеров является продольно-однородный поток, в котором все параметры по длине водотока не изменяются. Для этого случая уравнение баланса завихренности (1) имеет вид

$$P_3 = P_4 + P_7 + P_8, \quad (2)$$

т.е. единственным источником генерации поперечных течений являются градиенты турбулентных напряжений. Поскольку в ламинарном продольно-однородном потоке P_7 и P_8 равны нулю, поперечная циркуляция возникнуть не может.

Количественная оценка вклада слагаемых уравнения (1) в баланс завихренности осредненного движения может быть дана лишь на основе экспериментальных данных. Однако измерение турбулентных характеристик (напряжений Рейнольдса, поперечных скоростей и компонентов вихря) в трехмерном нестационарном потоке представляет собой задачу чрезвычайной сложности и требует малоинерционных приборов и высокой степени автоматизации эксперимента. Поэтому существующие оценки выполнены применительно к стационарным потокам: пограничному слою [6] и продольно-однородному движению в трубах [3, 7]. В руслах другой формы и особенно в потоках со свободной поверхностью, роль слагаемых уравнения баланса завихренности может быть иной.

Особый интерес при изучении механизма поперечной циркуляции вызывает распределение источниковых слагаемых, знак и величина которых определяют направление и интенсивность поперечных течений. Следует отметить, что, согласно оценкам [3, 7], P_7 в уравнении (2) значительно превосходит P_8 и продукция завихренности с высокой степенью точности оценивается величиной смешанной производной от разности турбулентных нормальных напряжений.

С целью изучения трехмерной кинематической структуры потока в открытых руслах трапециевидальной формы автором с помощью термоанемометрической системы постоянной температуры "DISA" проведены экспериментальные исследования [8], позволившие выявить основные закономерности распределения по сечению трехмерного поля осредненных скоростей, турбулентных напряжений, в том числе разности $(\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)/v_*^2$, а также основного члена генерации поперечных течений P_7 .

Прежде чем приступить к обсуждению результатов исследования (рис. 1, 2, 3), целесообразно на основе анализа физических закономерностей течения в трубах и открытых руслах сделать некоторые общие выводы о характере из-

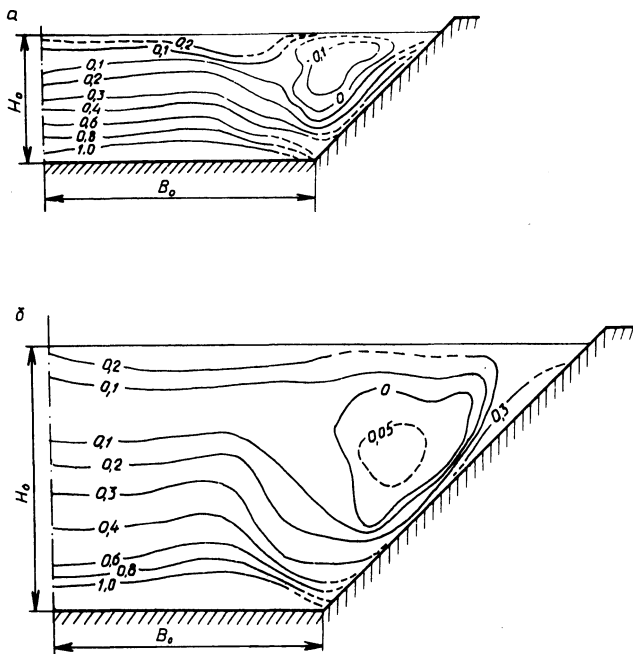


Рис. 1. Линии равных значений разности нормальных напряжений Рейнольдса $(\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)/v_*^2$ в открытом трапециевидальном русле с $B_0 = 0,075$ м:
 $a - H_0 = 0,036$ м; $б - H_0 = 0,075$ м.

менения величины $(\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)$.

Известно, что границы потока оказывают демпфирующее влияние на пульсации по нормали к ним, увеличивая их значения в других направлениях. Физически это можно представить следующим образом. Из уравнения баланса турбулентной энергии следует, что энергия осредненного движения непосредственно передается только продольным пульсациям, а поперечные получают ее от продольных посредством пульсации давления [9]. Поэтому как только пульсирующий объем жидкости проявляет свою индивидуальность, перемещаясь со скоростью \bar{v}'_1 в направлении x_1 , возникают пульсации давления p' , вызывающие перемещение объема в поперечных направлениях x_2, x_3 . Граница потока (жесткая или свободная) ограничивает движение пульсирующего объема по нормали к ней (\bar{v}'_2) и, как следует из условия неразрывности $dv'_i/dx_1 = 0$ ($i = 1, 2, 3$), усиливает его в двух других направлениях (v'_1, v'_3). Поэтому в потоке между двумя бесконечно широкими горизонтальными пластинами разность нормальных турбулентных напряжений вдоль границы $\rho \bar{v}_3'^2$ и по нормали к ней $\rho \bar{v}_2'^2$ положительна и изотропность достигается на оси симметрии. Нетрудно показать, что в потоке между двумя бесконечно ши-

роками наклонными под углом α к оси x_3 пластинами нормальные напряжения Рейнольдса вдоль x_2, x_3 связаны с нормальными напряжениями вдоль стенки $\rho \bar{v}'^2_{\Pi}$ и по нормали к ней $\rho \bar{v}'^2_{\text{пр}}$ соотношениями:

$$\rho \bar{v}'^2_2 = \rho \bar{v}'^2_{\Pi} \sin \alpha + \rho \bar{v}'^2_{\text{пр}} \cos \alpha;$$

$$\rho \bar{v}'^2_3 = \rho \bar{v}'^2_{\Pi} \cos \alpha + \rho \bar{v}'^2_{\text{пр}} \sin \alpha$$

и

$$\rho (\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2) = \rho \bar{v}'^2_{\Pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) + \rho \bar{v}'^2_{\text{пр}} (\sin \alpha - \cos \alpha). \quad (3)$$

Аналогичные выражения могут быть получены при рассмотрении напряжений вдоль главных осей эллипсоида деформаций.

Из (3) следуют предельные переходы: у горизонтальной стенки ($\alpha = 0$) $\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2 > 0$, вертикальной — ($\alpha = 90^\circ$) $\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2 < 0$. Течение вдоль двугранных углов формируется под влиянием двух пересекающихся плоскостей и является трехмерным. Поэтому соотношение (3) можно использовать лишь для предварительных оценок. В прямоугольных трубах на биссектрисе угла демпфирующее влияние границ на поперечные пульсации одинаково (это следует также из (3)), поэтому она разделяет две области с различными по знаку значениями $\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2$, т.е. независимые области поперечных течений с различным направлением циркуляции: у вертикальной стенки — против хода часовой стрелки, у горизонтальной — по ходу [3]. Нетрудно показать, что на биссектрисе угла в трапециевидальной трубе равенство нормальных напряжений Рейнольдса не выполняется ($\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2 > 0$) и положение линии, разделяющей независимые области поперечной циркуляции, зависит от соотношения поперечных размеров и угла наклона боковых стенок [10]. В области у боковых откосов (не слишком близко к углу) с уменьшением α демпфирующее влияние границы на вертикальные пульсации возрастает, а на горизонтальные — уменьшается. Из (3) следует, что при $\alpha = 45^\circ$ оно приблизительно одинаково — в этой области должна иметь место зона с близкими к нулю значениями $(\bar{v}'^2_3 - \bar{v}'^2_2)$. Дальнейшее уменьшение угла наклона, очевидно, приведет к положительной разности напряжений Рейнольдса во всем сечении трубы с приуменьшенными ее абсолютными значениями в области боковых откосов.

В открытых потоках турбулентность формируется как под воздействием жестких границ, так и свободной поверхности. Хотя о влиянии последней на характеристики турбулентности известно сравнительно мало, она, по-видимому, действует аналогично жестким границам [1, 11, 12]. Однако ограничивающее действие свободной поверхности значительно слабее, чем жесткой стенки, и пульсирующий объем, получивший вертикальное движение \bar{v}'_2 , как бы "выскакивает" за границу. Поэтому свободная поверхность имеет неустойчивое, пульсирующее положение и представляет собой некоторую область вихревых образований воды и спутного воздуха с перемежающимся характером движения. Экспериментальные данные показывают, что у свободной границы

увеличиваются $\sqrt{\bar{v}_1'^2}$, $\sqrt{\bar{v}_3'^2}$, продукция и диссипация кинетической энергии турбулентности, уменьшается $\sqrt{\bar{v}_2'^2}$, турбулентная вязкость [1, 11, 12].

Таким образом, свободная поверхность усиливает анизотропность турбулентности даже в отсутствие внешних воздействий (например, ветровых), и, следовательно, ее нельзя отождествлять с осью симметрии закрытого потока. Именно ее влияние обуславливает увеличение размеров и интенсивности области с положительными значениями разности нормальных напряжений Рейнольдса [13], что приводит соответственно к изменению характера поперечных течений — в прямоугольных открытых руслах размер и интенсивность вихря у свободной границы возрастают и биссектриса угла уже не играет, как в трубах, столь определяющую роль [4, 12, 13].

Полученные данные о распределении $(\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)/v_*^2$ в продольно-однородных открытых потоках трапецидальной формы (см. рис. 1) подтверждают вышеизложенные выводы. В частности, в большей части сечения значения $(\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)/v_*^2$ положительные и лишь в области над боковым откосом имеет место зона небольших (близких к нулю в пределах доверительного интервала экспериментальных данных) отрицательных величин. Сложное взаимодействие свободной, горизонтальной и наклонной границ вызывает появле-

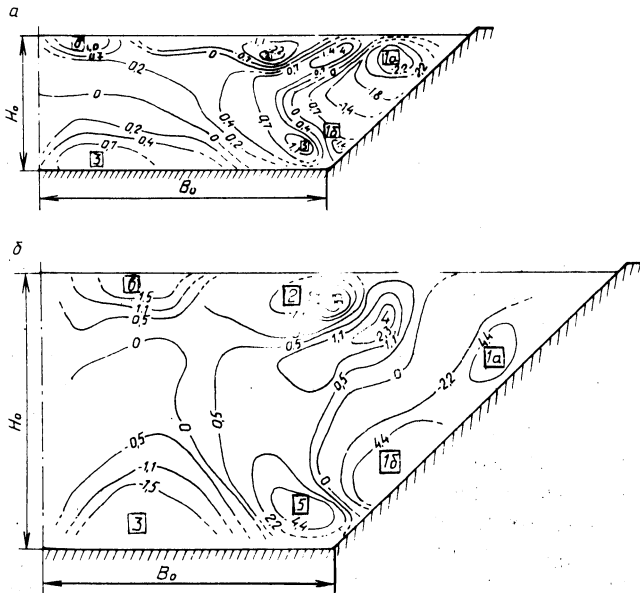


Рис. 2. Распределение основного члена генерации поперечных течений

$$\frac{R^2}{v_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} x$$

$\times (\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)$ в открытом трапецидальном русле с $B_0 = 0,075$ м:

$a - H_0 = 0,036$ м; $b - H_0 = 0,075$ м.

ние положительных значений разности нормальных напряжений Рейнольдса в придонной части откоса. Свободная поверхность увеличивает $(\bar{v}'_3 - \bar{v}'_2)/v_*^2$, а также \bar{v}'_1/v_*^2 , подтверждая тем самым предположение о демпфирующем ее влиянии на вертикальные пульсации, однако более слабо, чем жесткая стенка. Минимальные, близкие к нулю значения разности нормальных напряжений Рейнольдса находятся на расстоянии $(0,1...0,3)H_0$ от поверхности, что удовлетворительно согласуется с данными в прямоугольных руслах [13].

Вычисление экспериментального распределения основного члена генерации поперечных течений P_7 вызывает определенные трудности из-за необходимости дифференцирования опытных кривых $(\bar{v}'_3 - \bar{v}'_2)$, имеющих некоторый разброс. Поэтому, как правило, ограничиваются анализом распределения $(\bar{v}'_3 - \bar{v}'_2)$ и по сгущению линий равных значений этой величины делают выводы о характере изменения источникового слагаемого [10]. Привлечение аппарата сглаживающих сплайнов позволило (для условий опытов автора) получить численные значения последнего (см. рис. 2).

Распределение по сечению основного члена генерации поперечных течений P_7 в открытых продольно-однородных потоках трапецеидальной формы с $m = 1,0$ имеет более сложный характер, чем в прямоугольных трубах и открытых руслах. Если в первом случае существуют две располагающиеся в биссектрисе области генерации завихренности [3], в прямоугольных руслах — три, причем области у свободной границы и вертикальной стенки имеют одинаковые знаки [12, 13], то в полусечении трапецеидального канала имеют место

шесть областей $\frac{R^2}{v_*^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{v}'_3 - \bar{v}'_2)$ с разными знаками (см.

рис. 2), взаимодействие которых определяет трехмерную кинематическую структуру течения. Основные источники поперечных течений (1, 2, 4, 5) располагаются у бокового откоса, где вследствие сложного характера взаимодействия свободной, наклонной и горизонтальной границ наблюдается наибольшее сгущение линий равных значений $(\bar{v}'_3 - \bar{v}'_2)/v_*^2$. Из ранее выполненного анализа следует, что их расположение и интенсивности определяются соотношением поперечных размеров потока и величиной заложения откосов. Однако у боковых границ русла источники поперечных течений существуют при любых значениях B_1/H_0 и m (B_1 — полуширина русла поверху, H_0 — глубина над горизонтальным дном, m — коэффициент заложения откосов), поскольку именно здесь наблюдается наибольшая в сечении анизотропность турбулентных характеристик. При больших отношениях B_1/H_0 (> 5) распределение последних в средней части русла аналогично плоскому потоку и, следовательно, источники завихренности в этой области отсутствуют. Однако это не означает отсутствие поперечной циркуляции. Экспериментальные данные показывают, что при больших отношениях B_1/H_0 в средней части потока существуют вихри поперечных течений, индуцированные основными вихрями у откосов [14]. В наших исследованиях B_1/H_0 было относительно небольшим (≤ 3), поэтому

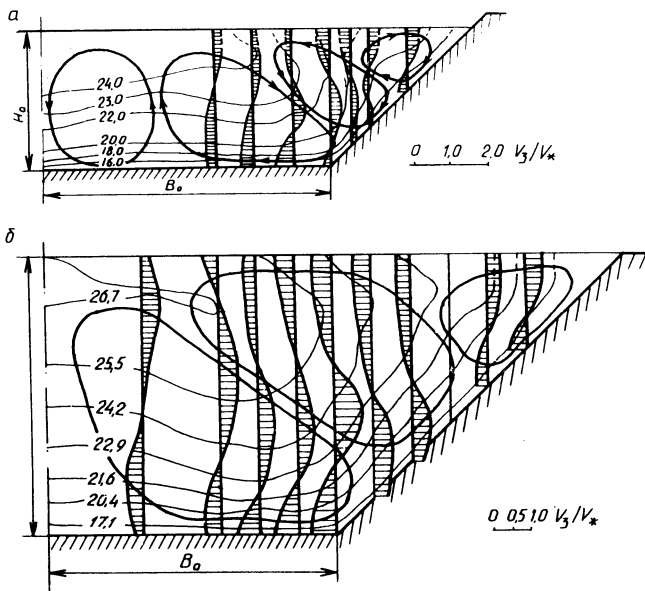


Рис. 3. Экспериментальные план изотех \bar{v}_1/v_* и эпюры поперечных осредненных скоростей \bar{v}_3/v_*

$a - H_0 = 0,036$ м; $b - H_0 = 0,075$ м; \rightarrow — направление поперечных течений.

у оси симметрии имеют место источники завихренности 3,6 небольшой интенсивности (см. рис. 1). Отметим, что аналогично течениям в прямоугольных и трапецидальных трубах в зоне сопряжения наклонной и горизонтальной стенок трапецидального канала вдоль линии, параллельной биссектрисе угла, располагаются области генерации завихренности 1б, 5.

Экспериментальное распределение $\frac{R^2}{v_*^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)$ (см. рис.

2) позволяет прогнозировать качественную картину поперечной циркуляции. Если в уравнении (2) пренебречь конвективным членом P_3 , не способным ни создать, ни уничтожить поперечные течения, и ввести функцию тока, то получим уравнение в частных производных четвертого порядка, аналогичное уравнению прогиба упругой пластины. Причем величина и знак свободного члена P_7 характеризуют интенсивность и направление поперечной циркуляции (величину и направление прогиба пластины).

Аналогом физического процесса ее формирования является процесс прогиба упругой пластины с жестко закрепленными границами [15]. Тогда нетрудно показать, что области 1, 2 с отрицательным знаком источникового члена создают два вихря циркуляции с вращением против хода часовой стрелки, которые при определенных условиях объединяются, подавляя циркуляцию противоположного знака в области 4 (это следует из условия непрерывности прогиба пластины), и формируют первый основной вихрь поперечных течений

Парный с ним основной вихрь с циркуляцией по ходу часовой стрелки соз-

дает область 5 с положительным значением $\frac{R^2}{v_*^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)$.

Области 3 и 6 формируют поперечные течения небольшой интенсивности у оси симметрии, подавляемые при определенных значениях B_1/H_0 основными вихрями. В прирусной части измерения турбулентных характеристик не выполнялись, но по аналогии с циркуляцией в треугольном канале можно предположить существование вихря с вращением по ходу часовой стрелки.

Таким образом, в полусечении открытого трапецидального канала с $m = 1$ имеют место пять винтов поперечных течений, причем их размеры и интенсивности определяются величиной $\frac{R^2}{v_*^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\bar{v}_3'^2 - \bar{v}_2'^2)$. Прогнозируемый характер поперечных течений хорошо согласуется с непосредственными измерениями [8], частично представленными на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о д и В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. — М., 1984. — С. 227–322.
2. E i n s t e i n H.A., L i H. Secondary currents in straight channels // Trans Amer. Geoph. Unio, 1958. — Vol. 36. — N 6. — Pp. 1085–1088.
3. B r u n d r e t t E., V a i n e s W.D. The production and diffusion of vorticity in duct flow // J. Fluid. Mech., 1964. — Vol. 19. — Pp. 375–394.
4. Р о г у н о в и ч В.П. К экспериментальному изучению распределения осредненных скоростей в двухпараметрических прямолинейных потоках // Использование водных ресурсов. — Мн., 1969. — С. 100–196.
5. В а с и л ь е в О.Ф. Проблемы гидродинамики больших каналов // Динамика сплошной среды. Нестационарные задачи механики сплошной среды. — Новосибирск, 1985. — Вып. 70. — С. 63–71.
6. О с а к а Х., Я м а д а Х., Н а к а м у р а И. Трехмерная структура турбулентного следа за крестообразно пересекающимися круговыми цилиндрами // Трехмерные турбулентные пограничные слои. — М., 1985. — С. 216–227.
7. P e r k i n s H.J. The formation of streamwise vorticity in turbulent flow // J. Fluid. Mech. — Vol. 44. — Pp. 721–740.
8. Ш н и п о в Ф.Д. Экспериментальные исследования трехмерного поля осредненных скоростей и турбулентных напряжений в прямолинейных потоках трапецидального сечения // Гидравлика открытых русл. Сб. науч. тр. ЦНИИКИВР. — М., 1984. — С. 45–55.
9. М о н и н А.С., Я г л о м А.М. Статистическая гидромеханика. — М., 1965. — Ч. 1. — 640 с.
10. R o d e t E. Etude de L'ecoulement d'un Tunnel Prismaticque de Section Trapezoidale // Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de L'air. — 1960. — N 369.
11. Н и к и т и н И.К. Особенности структуры турбулентного потока у его свободной поверхности // Гидротехника и гидромеханика. — Киев, 1964. — С. 3–6.
12. N e z u I., N a k a g a w a H. Investigation an three-dimensional turbulent structure in uniform open channel and closed duct flows // Добокы rakкай помбунею, Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., 1986. — N 369. — Pp. 89–98.
13. Т о м и н а г а А., Е з а к и К. An ex̄perimental study on three-dimensional turbulent structure in a rectangular open channel flow. // Добокы rakкай помбунею, Proc. Jap. Civ. Eng., 1985. — N 357. — Pp. 81–88.
14. Б о г д а н о в и ч М.И., О с и п о в и ч А.А., Ц а ц у к Г.С., Ш н и п о в Ф.Д. Экспериментальные исследования полей осредненных скоростей в земляных каналах // Водное хоз-во и гидротехн. стр-во. — Мн., 1984. — Вып. 13. — С. 62–65.
15. C i r a y C. On secondary currents // IANR, 1967. — Pp. 408–413.