



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

С. В. Босаков
П. Д. Скачѣк

**ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД
В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ
И ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕЙ**

Пособие

Минск
БНТУ
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

С. В. Босаков
П. Д. Скачёк

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД
В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ
И ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕЙ

Пособие
для магистрантов специальности
7-06-0732-01 «Строительство»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2024

УДК 624.072.2.046.3(075.8)

ББК 38.112я7

Б85

Рецензенты:

кафедра строительных конструкций Полоцкого государственного университета им. Евфросинии Полоцкой
(зав. кафедрой, канд. техн. наук *А. М. Хаткевич*);
доцент кафедры геотехники и транспортных коммуникаций учреждения образования «Брестский государственный технический университет», доцент, канд. техн. наук *А. Н. Тарасевич*

Босаков, С. В.

Б85 Вариационно-разностный метод в задачах устойчивости и динамики стержней : пособие для магистрантов специальности 7-06-0732-01 «Строительство» / С. В. Босаков, П. Д. Скачэк. – Минск : БНТУ, 2024. – 34 с.

ISBN 978-985-31-0029-7.

В пособии даются примеры определения критических нагрузок, частот и форм собственных колебаний различно опертых стержней, приложенных сил и масс, что позволит читателю расширить свои представления о применении вариационно-разностных методов в сопротивлении материалов и строительной механике.

Пособие предназначено для магистрантов строительных специальностей технических вузов Республики Беларусь и Российской Федерации.

УДК 624.072.2.046.3(075.8)

ББК 38.112я7

ISBN 978-985-31-0029-7

© Босаков С. В., Скачэк П. Д., 2024

© Белорусский национальный
технический университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ПРИМЕНЕНИИ ВРМ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕЙ	5
ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	8
ЗАДАЧА 2.1. Устойчивость шарнирно опертого стержня.....	8
ЗАДАЧА 2.2. Устойчивость стержня с защемленными концами	11
ЗАДАЧА 2.3. Устойчивость стержня с защемленным и шарнирно опертым концами	12
ЗАДАЧА 2.4. Устойчивость стержня с защемленным и свободным концами	14
ЗАДАЧА 2.5. Устойчивость стержня с шарнирно опертыми концами под действием силы, приложенной посередине	15
ЗАДАЧА 2.6. Устойчивость стержня под действием продольной распределенной нагрузки	17
ЗАДАЧА 2.7. Устойчивость двухпролетной стойки с консолью.....	18
ЗАДАЧА 2.8. Устойчивость стойки с упругой опорой.....	20
ЗАДАЧА 2.9. Устойчивость стойки переменной жесткости.....	22
ГЛАВА 3. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕЙ.....	23
ЗАДАЧА 3.1. Шарнирно опертая однопролетная балка.....	23
ЗАДАЧА 3.2. Свободные колебания стойки с консолью и двумя сосредоточенными массами	26
ЗАДАЧА 3.3. Свободные колебания трехпролетной неразрезной балки с тремя сосредоточенными массами	29
ЗАДАЧА 3.4. Использование форм собственных колебаний для определения критических нагрузок	31
ЗАДАЧА 3.5. Использование форм потери устойчивости для определения частот собственных колебаний стержня	32
ЛИТЕРАТУРА	34

ВВЕДЕНИЕ

Решение статических задач расчета конструкций вариационными методами основано на свойстве полной потенциальной энергии системы и действующей на нее нагрузки обладать минимумом в состоянии статического равновесия. Это свойство конструкции позволяет находить перемещения, деформации и напряжения и выполнять расчеты строительных конструкций по двум группам предельных состояний.

При использовании вариационных методов в задачах устойчивости и динамики стержней необходимо, как правило, задаваться формой потери устойчивости или формой колебаний. Эти функции формы должны обязательно удовлетворять геометрическим граничным условиям опирания стержня и необходимой полноте.

Применение вариационно-разностных методов (далее – ВРМ) в задачах динамики и устойчивости стержней имеет свои особенности по сравнению с точными аналитическими методами. Этот метод позволяет несложно учесть переменную жесткость стержня, любой вид сжимающей консервативной нагрузки, различное расположение опорных закреплений и их податливости, расположение колеблющихся масс.

В представленном пособии даются примеры определения критических нагрузок, частот и форм собственных колебаний различных опертых стержней, приложенных сил и масс, что позволит читателю расширить свои представления о применении вариационно-разностных методов в сопротивлении материалов и строительной механике.

Пособие предназначено для магистрантов строительных специальностей технических вузов Российской Федерации и Республики Беларусь.

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ПРИМЕНЕНИИ ВРМ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕЙ

При использовании ВРМ выражения производных заменяются выражениями в конечных разностях, интегралы – конечными суммами. Например, при использовании конечных разностей обычной точности [1] для расчета изгибаемой балки (рис. 1.1).

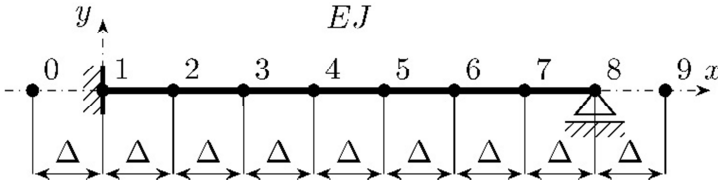


Рис. 1.1. Разбиение балки сеткой с одинаковым шагом

Первая и вторая производные выражаются для точки 3, например, следующим образом:

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{y_4 - y_2}{2\Delta}; \quad \frac{d^2y_3}{dx^2} = \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{\Delta^2}. \quad (1.1)$$

И энергия изгиба всей балки [2]:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta, \quad (1.2)$$

при выполнении граничных условий для защемленного края балки $y_0 = y_2$ и для шарнирно опертого $y_9 = -y_7$. Эти соотношения получаются из выражений для производной в точке 1 и изгибающего момента для точки 8:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_2 - y_0}{2\Delta} = 0; \quad M_8 = -EJ \frac{d^2y_8}{dx^2} = -EJ \frac{y_9 - 2y_8 + y_7}{\Delta^2} = 0. \quad (1.3)$$

В задачах устойчивости стержня [3] критические нагрузки определяются из условия минимума частного $P_{cr} = \frac{U}{\Pi}$, где U – энергия изгиба, а Π – сближение концов стержня при изгибе в момент потери устойчивости.

Согласно «Устойчивости стержней, пластин и оболочек» С. П. Тимошенко [2], это сближение определяется как интеграл:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (1.4)$$

Использование ВРМ приводит к исследованию на минимум частного:

$$\frac{\frac{EJ}{2} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta}{\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^7 \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta} = \frac{4EJ \sum_{k=1}^7 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2}{\Delta^2 \sum_{k=1}^7 (y_{k+1} - y_{k-1})^2}. \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, 7.$$

Так как в точке минимума

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{U}{\Pi} \right) = \frac{1}{\Pi^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} \Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} U \right) = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - P_{cr} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \right), \quad (1.6)$$

то определение совокупности критических сил сводится к нахождению собственных чисел определителя:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y_2} - P_{cr} \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial U}{\partial y_7} - P_{cr} \frac{\partial \Pi}{\partial y_7} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

После чего можно найти формы потери устойчивости, соответствующие каждой критической силе. Для этого решается система линейных алгебраических уравнений, полученная из (1.7) вычеркиванием одной строки при условии $y_k = 1$, и определяются ординаты кривой формы потери устойчивости. Значение k обычно выбирается несколько раз для каждого критического параметра $\nu^2 = P_{cr} \frac{\ell^2}{EJ}$.

Нахождение частот и форм собственных колебаний балки с несколькими степенями свободы [4] также сводится к определению собственных чисел определителя типа (1.7), где Π представляет максимальную величину кинетической энергии колеблющихся масс V , а вместо P_{cr} подставляется квадрат собственной частоты:

$$\omega^2 = \frac{U}{V} = \frac{\frac{EJ}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^{\ell} m(x) y^2 dx}, \quad (1.8)$$

где в знаменателе стоит амплитудное значение кинетической энергии V всей распределенной массы на балке. При использовании ВРМ распределенные массы заменяют сосредоточенными, а интегрирование – численным суммированием по методу конечных разностей. Принимается, что сами балки невесомые.

Доказано [3], что погрешность предлагаемого ВРМ пропорциональна квадрату шага сетки, т. е. если в два раза уменьшить шаг сетки Δ , то точность определения собственных чисел возрастет в четыре раза.

При выполнении расчетов также можно использовать дифференциальные зависимости в конечных разностях повышенной точности [1]:

$$\frac{dy_4}{dx} = \frac{-y_6 + 8y_5 - 8y_3 + y_2}{12\Delta}, \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 y_4}{dx^2} = \frac{-y_6 + 16y_5 - 30y_4 + 16y_3 - y_2}{12\Delta^2}.$$

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

ЗАДАЧА 2.1. Устойчивость шарнирно опертого стержня

На рис. 2.1 показан стержень центрально сжатый силой P . Необходимо определить величины критических сил, вызывающие потерю его устойчивости. Разобьем равномерной сеткой стержень на $n - 1$ равных частей (рис. 2.1). Граничные условия рассматриваемой задачи следующие:

$$y_1 = y_n = 0; \quad \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\Delta^2} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta^2} = 0. \quad (2.1)$$

Из последних двух условий следует:

$$y_0 = -y_2; \quad y_{n+1} = -y_{n-1}. \quad (2.2)$$

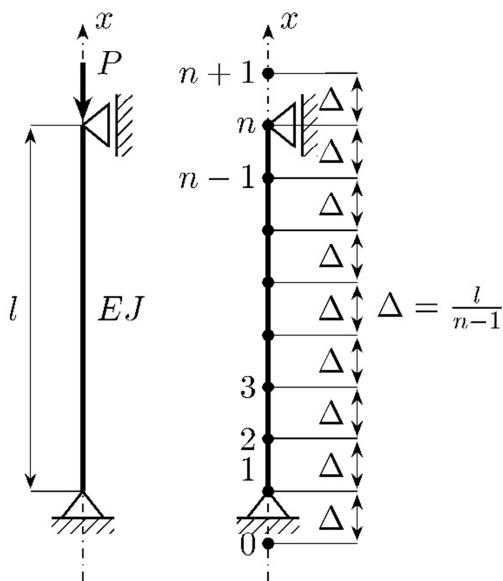


Рис. 2.1. Центрально сжатый шарнирно опертый стержень

Запишем энергию деформаций изгиба стержня в конечно-разностной форме:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta. \quad (2.3)$$

Работа силы P на перемещении от сближения концов стержня в момент потери его устойчивости

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{P}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{P}{2} \left(\left(\frac{y_2 - y_0}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta + \left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В (2.4) крайние участки берутся длиной $\Delta/2$. В момент потери устойчивости $U = \Pi$ и поэтому:

$$P = \frac{4EJ}{\Delta^2} \frac{\sum_{k=2}^{n-1} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2}{\sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_{k-1})^2}. \quad (2.5)$$

Для определения наименьшей критической силы необходимо составить определитель из системы однородных уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial y_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.6)$$

и приравнять его нулю. Решение уравнения дает возможность найти несколько значений критической силы, наименьшая из которых является расчетной. Для $n = 5$ определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 640 - 6v^2 & -512 & 128 + 2v^2 \\ -512 & 768 - 4v^2 & -512 \\ 128 + 2v^2 & -512 & 640 - 6v^2 \end{vmatrix}, \quad v^2 = P \frac{l^2}{EJ}. \quad (2.7)$$

Наименьшая критическая сила $P_{cr} = 3,3137^2 \frac{EJ}{\ell^2}$. Для $n=9$ получаем $P_{cr} = 3,1826^2 \frac{EJ}{\ell^2}$.

Сближение концов стержня при изгибе можно определять по иной формуле:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta}. \quad (2.8)$$

Тогда:

$$P = \frac{EJ}{\Delta^2} \frac{\sum_{k=2}^{n-1} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})^2}{\sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)^2}. \quad (2.9)$$

При этом для $n=5$ получаем $P_{cr} = 3,0615^2 \frac{EJ}{\ell^2}$; $n=9$ — $P_{cr} = 3,1215^2 \frac{EJ}{\ell^2}$.

Интересно заметить, что точное значение критической силы находится между величинами, полученными по формулам (2.5) и (2.9). Ниже будем пользоваться двумя выражениями для производных (1.1) и (2.8).

Укажем, как по двум расчетам с переменным шагом сетки можно получить более точное значение критической силы. Обозначим погрешность вычислений при $\Delta = \frac{\ell}{6}$ через X , тогда при $\Delta = \frac{\ell}{4}$ погрешность будет $2,25X$. Имеем при $\Delta = \frac{\ell}{6}$ $P_{cr} = 3,2154^2 \frac{EJ}{\ell^2}$.

При $\Delta = \frac{\ell}{4}$ $P_{cr} = 3,3137^2 \frac{EJ}{\ell^2}$. Тогда погрешность будет равна

$2.25X - X = (3,3137^2 - 3,2154^2) \cdot \frac{EJ}{\ell^2}$; $X = 0,5134 \frac{EJ}{\ell^2}$. Уточненное значение критической силы будет

$$(3,2154^2 - 0,5134) \frac{EJ}{\ell^2} = (3,3137^2 - 2,25 \cdot 0,5134) \frac{EJ}{\ell^2} = 9,8254 \frac{EJ}{\ell^2}.$$

Точная величина критической силы равна:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 9,8696 \frac{EJ}{\ell^2}.$$

ЗАДАЧА 2.2. Устойчивость стержня с защемленными концами

Рассмотрим стержень с двумя защемленными концами (рис. 2.2). Разобьем его на $n-1$ одинаковых частей и составим конечно-разностные выражения для энергии деформаций изгиба U и работы сжимающей силы Π с учетом граничных условий для защемленных концов $y_0 = y_2$; $y_{n+1} = y_{n-1}$; $y_1 = y_n = 0$.

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{EJ}{2} \left[\left(\frac{2y_2}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta + \left(\frac{2y_{n-1}}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right]; \quad (2.10)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} P \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} \right)^2 \Delta; \quad (2.11)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} P \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta. \quad (2.12)$$

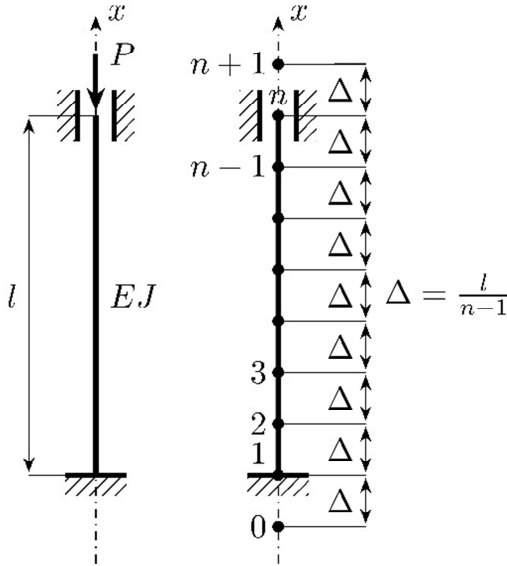


Рис. 2.2. Стержень с двумя защемлениями

Для $n = 11$ ($\Delta = \frac{\ell}{10}$) при использовании (2.11) получено $P_{cr} = 38,1966 \frac{EJ}{\ell^2}$, а при использовании (2.12) – $P_{cr} = 42,2291 \frac{EJ}{\ell^2}$. Точное теоретическое решение равно $P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 39,4784 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ЗАДАЧА 2.3. Устойчивость стержня с защемленным и шарнирно опертым концами

Для стержня с защемленным и шарнирно опертым концами (рис. 2.3) конечно-разностные выражения для энергии деформаций изгиба U и работы сжимающей силы Π с учетом граничных условий для защемленного и шарнирно опертого концов $y_0 = y_2$; $y_{n+1} = -y_{n-1}$; $y_1 = y_n = 0$ имеют вид:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{2y_2}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta \right); \quad (2.13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} P \left(\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta + \left(\frac{y_{n-1}}{\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right). \quad (2.14)$$

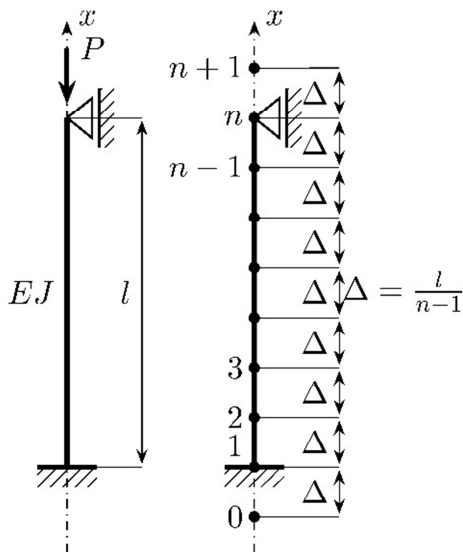


Рис. 2.3. Стержень с защемленным и шарнирно опертым концами

Для $n = 11$, $\Delta = \frac{\ell}{10}$ и для первой формы потери устойчивости получено $P_{cr} = 20,8167 \frac{EJ}{\ell^2}$. Точное теоретическое решение равно $P_{cr} = 20,19 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ЗАДАЧА 2.4. Устойчивость стержня с зашечленным и свободным концами

Принятые граничные условия для этого стержня (рис. 2.4) имеют вид $y_0 = y_2$; $y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1}$; $y_1 = 0$. Формулы энергии изгиба и потенциала сжимающей силы имеют вид

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{2y_2}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta \right); \quad (2.15)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} P \left(\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta + \left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right); \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.17)$$

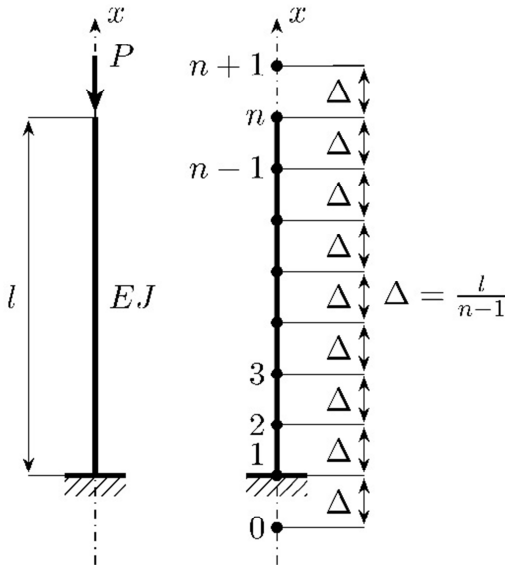


Рис. 2.4. Стержень с зашечленным и свободным концами

На рис. 2.5 приводится график изменения определителя системы однородных уравнений для нахождения критического параметра ν ($n = 11, \Delta = \frac{\ell}{10}$).

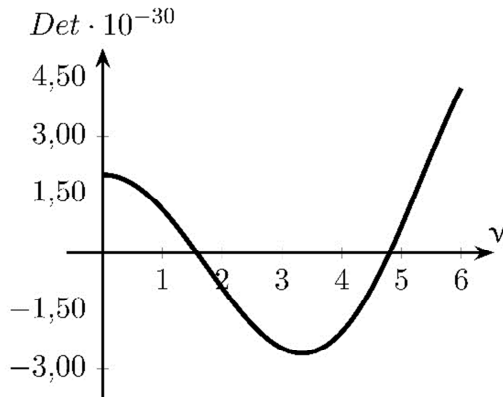


Рис. 2.5. График определителя для нахождения критического параметра

Графически найдено $\nu \approx 1,574$, $P_{cr} = 2,4776 \frac{EJ}{\ell^2}$. Точное значение $P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{\ell^2} = 2,4674 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ЗАДАЧА 2.5. Устойчивость стержня с шарнирно опертыми концами под действием силы, приложенной посередине

Рассмотрим шарнирно опертый стержень, к середине которого приложена сжимающая сосредоточенная сила (рис. 2.6). Очевидно, число участков, на которые разбивается стержень, должно быть четным. Также отметим, что опускание точки приложения сжимающей силы происходит на полудлине стержня.

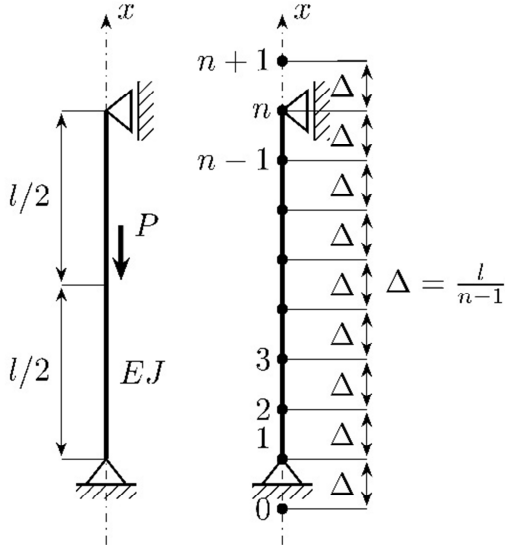


Рис. 2.6. Стержень с шарнирно опертymi концами под действием силы, приложенной посередине

Поэтому энергия деформаций изгиба стержня будет определяться формулой (2.3), а работа сжимающей силы в момент потери устойчивости – половиной формулы (2.4).

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta; \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{P}{2} \int_0^{l/2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{P}{2} \left(\left(\frac{y_2 - y_0}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta + \left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

При четырех участках ($n = 5$) получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 640 - 5v^2 & -512 & 128 + v^2 \\ -512 & 768 - 2v^2 & -512 \\ 128 + v^2 & -512 & 640 - 5v^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

корнями которого являются

$$v_1 = 4,5756 \Rightarrow P_{cr1} = 20,9364 \frac{EJ}{\ell^2};$$

$$v_2 = 12,7972 \Rightarrow P_{cr2} = 163,767 \frac{EJ}{\ell^2};$$

$$v_3 = 34,9757 \Rightarrow P_{cr3} = 1223,3 \frac{EJ}{\ell^2}.$$

Более точное решение для наименьшей критической силы приводится в практикуме [4] и равно $P_{cr} = 2\pi^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 19,7392 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ЗАДАЧА 2.6. Устойчивость стержня под действием продольной распределенной нагрузки

Разобьем длину стержня ℓ на равные участки длиной $\Delta = \frac{\ell}{6}$ ($n = 7$) и распределенную нагрузку приведем к совокупности узловой (рис. 2.7). Тогда энергия деформаций изгиба стержня выразится формулой (2.15). Работа внешних сил выразится суммой работ сил $\frac{q\ell}{12}$ и $\frac{q\ell}{6}$ на вертикальных перемещениях, вызванных изгибом в момент потери устойчивости, и при выполнении граничных условий имеет вид

$$\Pi = \frac{ql}{6} \left(\frac{1}{16\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(y_{k+1} - y_{k-1})^2 + (y_{k+2} - y_k)^2}{2} + \frac{1}{2\Delta} \sum_{m=2}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-m} (y_{k+1} - y_k)^2 \right). \quad (2.21)$$

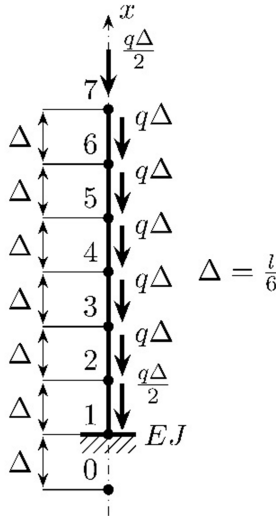


Рис. 2.7. Вертикальный стержень под действием вертикальной распределенной нагрузки

После выполнения необходимых вычислений получаем значение критической нагрузки $q = 7,9264 \frac{EJ}{\ell^3}$. При $n = 11$ и $n = 21$ значения критической нагрузки будут $q_{cr11} = 7,8447 \frac{EJ}{\ell^3}$ и $q_{cr21} = 7,8336 \frac{EJ}{\ell^3}$, соответственно. Точное значение составляет $7,83 \frac{EJ}{\ell^3}$ [5].

ЗАДАЧА 2.7. Устойчивость двухпролетной стойки с консолью

Рассмотрим сжатую двухпролетную стойку постоянного поперечного сечения с консолью (рис. 2.8). Для ее расчета на устойчивость необходимо в задачу 2.4 добавить граничные условия для точек m и n :

$$y_0 = y_2; \quad y_{nx+1} = 2y_{nx} - y_{nx-1}; \quad y_1 = 0; \quad y_m = 0; \quad y_n = 0.$$

Такие же изменения необходимо внести в формулы для энергии деформаций (2.15) и работы силы (2.16). Дальнейшие вычисления будем вести для $m = 5$; $\Delta = \frac{\ell}{4}$; $a = 2\Delta$; $EJ = 3500 \text{ кНм}^2$; $\ell = 4 \text{ м}$.

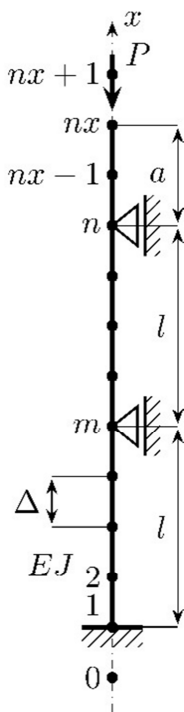


Рис. 2.8. Сжатая двухпролетная стойка с консолью

После вычислений получено $\nu_1 = 1,9383$; $\nu_2 = 4,6282$; $\nu_3 = 6,7851$. На рис. 2.9 приведены формы потери устойчивости для каждой критической силы.

$$P_1 = 1,9383^2 \frac{EJ}{\ell^2} \quad P_2 = 4,6282^2 \frac{EJ}{\ell^2} \quad P_3 = 6,7851^2 \frac{EJ}{\ell^2}$$

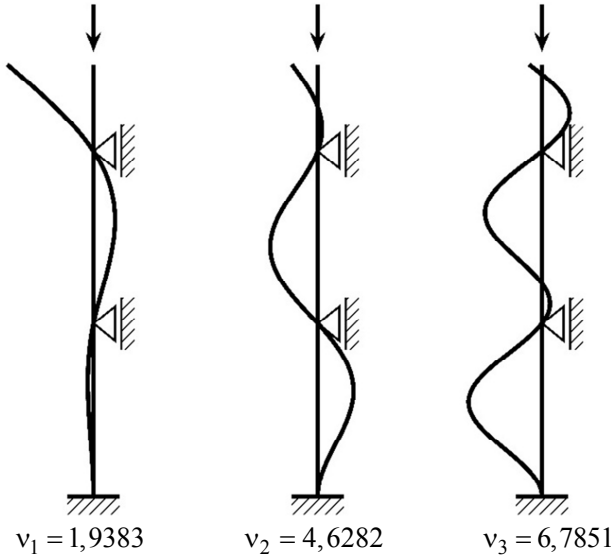


Рис. 2.9. Формы потери устойчивости для сжатой двухпролетной стойки с консолью

ЗАДАЧА 2.8. Устойчивость стойки с упругой опорой

Рассмотрим сжатую стойку с упругой опорой (рис. 2.10). Для определения величины критической силы ВРМ к энергии деформаций (2.15) добавим энергию сжатой пружины. Получим

$$U = \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{2y_2}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^{nx-1} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta \right) + \frac{ry_m^2}{2}. \quad (2.22)$$

Работа внешней силы на перемещениях от изгиба останется в виде (2.16)

$$\Pi = \frac{1}{2} P \left(\sum_{k=2}^{nx-1} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta} \right)^2 \Delta + \left(\frac{y_{nx+1} - y_{nx-1}}{2\Delta} \right)^2 \frac{\Delta}{2} \right). \quad (2.23)$$

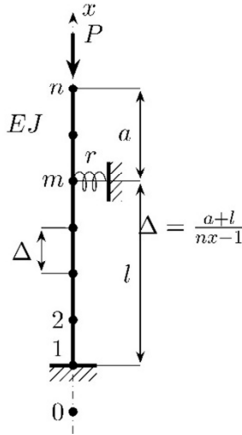


Рис. 2.10. Сжатая стойка с упругой опорой

При выполнении граничных условий $y_1 = 0$; $y_0 = y_2$; $y_{nx+1} = 2y_{nx} - y_{nx-1}$ получается следующий определитель, из которого подстановкой конкретных значений размеров и жесткости можно определить критический параметр:

$$\begin{vmatrix}
 \frac{448EJ}{\ell^3} - \frac{v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{384EJ}{\ell^3} - \frac{2v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & 0 & 0 \\
 \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{384EJ}{\ell^3} - \frac{2v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & 0 \\
 0 & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{384EJ}{\ell^3} + r - \frac{2v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} \\
 0 & 0 & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & -\frac{256EJ}{\ell^3} & \frac{320EJ}{\ell^3} - \frac{3v^2}{\ell} & -\frac{128EJ}{\ell^3} + \frac{2v^2}{\ell} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{64EJ}{\ell^3} + \frac{v^2}{\ell} & -\frac{128EJ}{\ell^3} + \frac{2v^2}{\ell} & \frac{64EJ}{\ell^3} - \frac{3v^2}{\ell}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

При следующих параметрах $m = 5$; $nx = 7$; $a = 2\Delta$; $r = \frac{EJ}{\ell^3}$ значение критической силы $P_{cr} = 1,3993 \frac{EJ}{\ell^2}$, а при $nx = 13$; $r = 100 \frac{EJ}{\ell^3}$ — $P_{cr} = 9,8021 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ЗАДАЧА 2.9. Устойчивость стойки переменной жесткости

В случае сжатой стойки переменной жесткости (рис. 2.11) запишем выражения для энергии изгиба и вертикального перемещения точки приложения силы вследствие этого изгиба:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{EJ_2}{2} \left(\left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{\Delta_2^2} \right)^2 \frac{\Delta_2}{2} + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^4 \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta_2^2} \right)^2 \Delta_2 + \left(\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{\Delta_2^2} \right)^2 \frac{\Delta_2}{2} \right) + \quad (2.25) \\
 & + \frac{EJ_1}{2} \left(\sum_{k=6}^7 \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta_1^2} \right)^2 \Delta_1 + \left(\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{\Delta_1^2} \right)^2 \frac{\Delta_1}{2} \right);
 \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta_2} \right)^2 \Delta_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=5}^7 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta_1} \right)^2 \Delta_1. \quad (2.26)$$

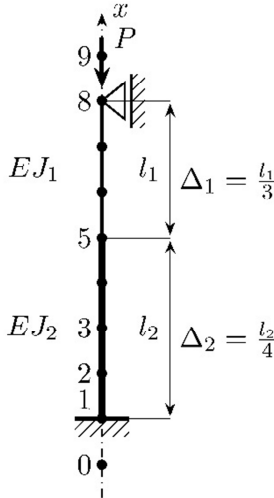


Рис. 2.11. Сжатая стойка переменной жесткости

Граничные условия: $y_1 = 0$; $y_2 = y_0$; $y_8 = 0$; $y_9 = 2y_8 - y_7 = -y_7$.

Дальнейшие действия по определению критической силы остаются как в предыдущих примерах. Так, при $EJ_2 = 2EJ_1 = EJ$; $\ell_2 = \ell_1 = \ell / 2$ значение критической силы составляет $P_{cr} = 5,1777^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 26,8088 \frac{EJ}{\ell^2}$.

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕЙ

ЗАДАЧА 3.1. Шарнирно опертая однопролетная балка

Для определения частот и форм собственных колебаний шарнирно опертой однопролетной балки с равномерно распределенной массой последовательно решим три задачи при разбиении пролета балки на 2, 4 и 6 одинаковых частей.

Разбиение на две части и замена распределенной массы сосредоточенными (рис. 3.1).

Граничные условия: $y_1 = y_3 = 0$; $y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$; $y_2 - 2y_3 + y_4 = 0$.

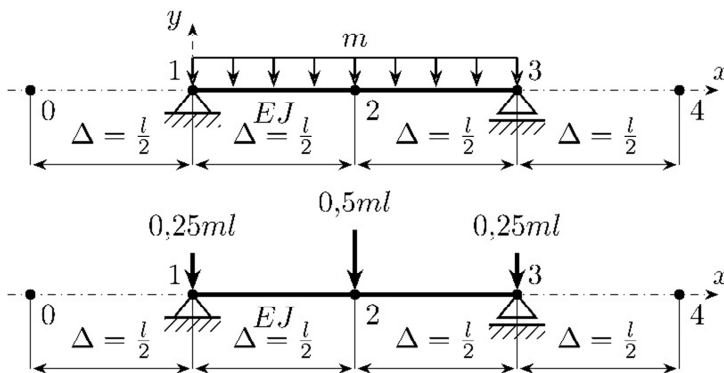


Рис. 3.1. Балка разбита на две части

В соответствии с главой 1 квадрат собственной частоты определяется формулой:

$$\omega^2 = \frac{U}{V} = \frac{\frac{EJ}{2} \left(\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\ell^2 / 4} \right)^2 \frac{\ell}{2}}{\frac{1}{2} 0,5m\ell y_2^2} = \frac{64EJ}{m\ell^4}, \quad (3.1)$$

где в знаменателе стоит амплитудное значение кинетической энергии колеблющейся массы $0,5m\ell$.

Разбиение на четыре части и замена распределенной массы сосредоточенными (рис. 3.2).

Граничные условия: $y_1 = y_5 = 0$; $y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$; $y_6 - 2y_5 + y_4 = 0$.

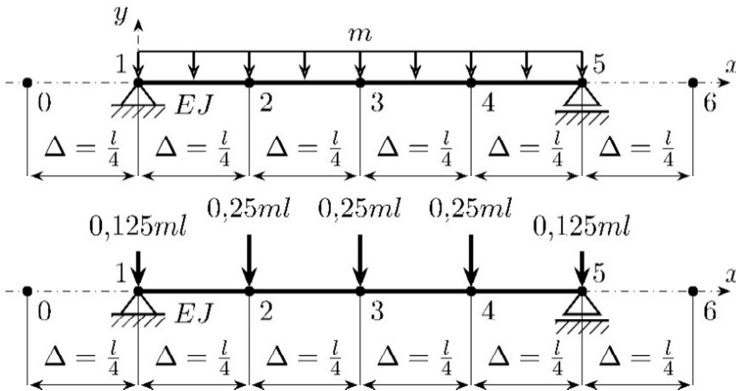


Рис. 3.2. Балка разбита на четыре части

Энергия изгиба и кинетическая энергия колеблющихся масс:

$$U = \frac{EJ}{2} \sum_{k=2}^4 \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta; \quad (3.2)$$

$$V = \frac{m\ell}{8} \sum_{k=2}^4 y_k^2. \quad (3.3)$$

Подстановка (3.2) и (3.3) в левую часть (3.1) и поиск наименьшей частоты приводит к системе однородных уравнений, определитель которой равен

$$\begin{vmatrix} 320 - 0,25\omega^2 \frac{m\ell^4}{EJ} & -256 & 64 \\ -256 & 384 - 0,25\omega^2 \frac{m\ell^4}{EJ} & -256 \\ 64 & -256 & 320 - 0,25\omega^2 \frac{m\ell^4}{EJ} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Раскрыв определитель, получаем три первые собственные частоты:

$$\omega_1 = 9,3726 \sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_2 = 32 \sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_3 = 54,6274 \sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}. \quad (3.5)$$

Разбиение на шесть частей и замена распределенной массы сосредоточенными (рис. 3.3).

Граничные условия: $y_1 = y_7 = 0$; $y_0 = y_2$; $y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$;
 $y_8 - 2y_7 + y_6 = 0$.

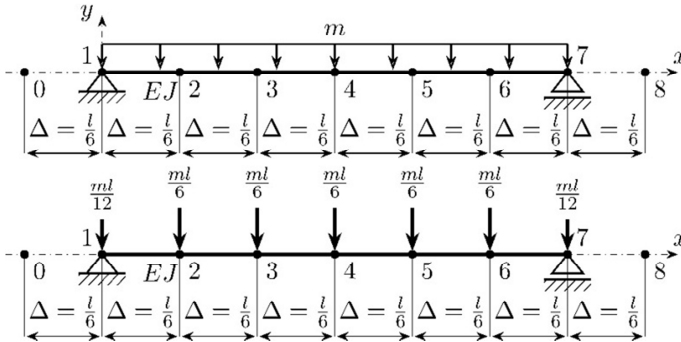


Рис. 3.3. Балка разбита на шесть частей

Энергия изгиба и кинетическая энергия колеблющихся масс:

$$U = \frac{EJ}{2} \sum_{k=2}^6 \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta; \quad (3.6)$$

$$V = \frac{m\ell}{12} \sum_{k=2}^6 y_k^2. \quad (3.7)$$

Опуская промежуточные вычисления, получаем

$$\omega_1 = 9,6462\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_2 = 36\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_3 = 72\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}.$$

Точные значения первых трех собственных частот равны

$$\omega_1 = \pi^2\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_2 = 4\pi^2\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}; \quad \omega_3 = 9\pi^2\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^4}}.$$

ЗАДАЧА 3.2. Свободные колебания стойки с консолью и двумя сосредоточенными массами

Рассмотрим двухмассовую систему в виде стойки с консолью (рис. 3.4).

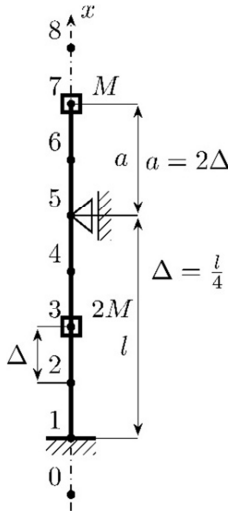


Рис. 3.4. Стойка с консолью и двумя массами

Амплитудные значения энергии изгиба и кинетической энергии колеблющихся масс при граничных условиях $y_1 = y_5 = 0$; $y_0 = y_2$; $y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$; $y_8 - 2y_7 + y_6 = 0$ определяются выражениями:

$$U = \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{2y_2}{\Delta^2} \right)^2 \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^6 \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta \right); \quad (3.8)$$

$$V = \frac{M}{2} (2y_3^2 + y_7^2). \quad (3.9)$$

Определитель для нахождения собственных частот имеет вид

$$\begin{vmatrix} 448 & -256 & 64 & 0 & 0 \\ -256 & 384 - \frac{2M\ell^3}{EJ}\omega^2 & -256 & 0 & 0 \\ 64 & -256 & 384 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 320 & -128 \\ 0 & 0 & 0 & -128 & 64 - \frac{M\ell^3}{EJ}\omega^2 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Приравнивая (3.10) нулю, получаем

$$\omega_1 = 2,87416 \sqrt{\frac{EJ}{M\ell^3}}; \quad \omega_2 = 7,42245 \sqrt{\frac{EJ}{M\ell^3}}.$$

Найдем формы колебаний. Для этого составим систему уравнений, полученную из (3.10) при $\omega_1 = 2,87416 \sqrt{\frac{EJ}{M\ell^3}}$, $y_7 = 1$. Также необходимо вычеркнуть в (3.10) одну строку, например последнюю. Получаем систему линейных алгебраических уравнений, в которой все неизвестные y_k , $k = 2; 3; 4; 6$ будут выражены через y_7 . Матричная запись СЛАУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 448 & -256 & 64 & 0 \\ -256 & 384 - \frac{2M\ell^3}{EJ}\omega^2 & -256 & 0 \\ 64 & -256 & 384 & 64 \\ 0 & 0 & 64 & 320 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 128 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Получаем для первой частоты собственных колебаний

$$\{y_2^1, y_3^1, y_4^1, y_6^1\} = \{-0,07518; -0,175898; -0,177312; 0,43546\}.$$

Для второй собственной частоты получено

$$\{y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_6^2\} = \{1,38831; 2,84256; 1,65206; 0,069588\}.$$

На рис. 3.5 показаны формы собственных колебаний.

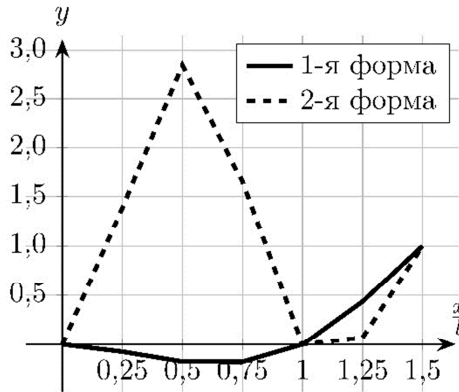


Рис. 3.5. Формы собственных колебаний стойки с консолью и двумя сосредоточенными массами

Также проверим ортогональность форм собственных колебаний

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,07518 \\ -0,175898 \\ -0,177312 \\ 0 \\ 0,43546 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,38831 \\ 2,84256 \\ 1,65206 \\ 0 \\ 0,069588 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Ортогональность форм собственных колебаний соблюдается.

ЗАДАЧА 3.3. Свободные колебания трехпролетной неразрезной балки с тремя сосредоточенными массами

Выражения для амплитудных значений энергии деформаций и кинетической энергии колеблющихся масс получаются в следующем виде (рис. 3.6):

$$\begin{aligned}
 U = \frac{EJ}{2} & \left(\left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=1}^8 \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \Delta + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{y_{10} - 2y_9 + y_8}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta}{2} \right) + \\
 & + \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{y_{10} - 2y_9 + y_8}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=10}^{14} \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \Delta + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{y_{16} - 2y_{15} + y_{14}}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta}{2} \right);
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$V = \frac{M}{2} (y_3^2 + y_7^2 + 2y_{12}^2). \tag{3.13}$$

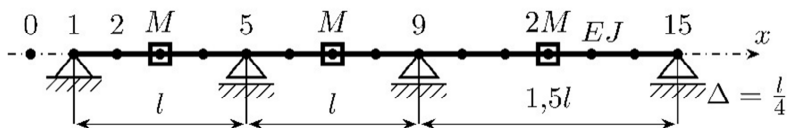


Рис. 3.6. Трехпролетная неразрезная балка с тремя массами

Граничные условия: $y_1 = y_5 = y_9 = y_{15} = 0$; $y_0 = -y_2$; $y_{16} = -y_{14}$.

Три частоты собственных колебаний неразрезной балки определяются из системы линейных алгебраических уравнений, полученных из производных дроби $\frac{U}{V}$ по каждому прогибу y_k ($k = 2-4, 6-8, 10-14$).

Определитель этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix}
 320 & -256 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -256 & 384 - \frac{M \ell^3}{EJ} \omega^2 & -256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 64 & -256 & 384 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 64 & 384 & -256 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -256 & 384 - \frac{M \ell^3}{EJ} \omega^2 & -256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 64 & -256 & 384 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 384 & -256 & 64 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -256 & 384 & -256 & 64 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & -256 & 384 - \frac{2M \ell^3}{EJ} \omega^2 & -256 & 64 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & -256 & 384 & -256 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & -256 & 320
 \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

При заданных параметрах $\ell = 4$; $M = 2000$ кг; $EJ = 1200$ кНм² получим

$$\omega_1 = 9,6002 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_2 = 21,6136 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_3 = 29,8344 \text{ сек}^{-1}.$$

На рис. 3.7–3.9 приведены формы колебаний для каждой из частот в последовательности, описанной в предыдущей задаче.

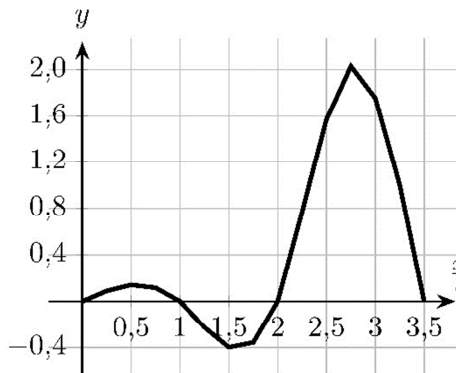


Рис. 3.7. Первая форма собственных колебаний, $\omega_1 = 9,6002 \text{ сек}^{-1}$

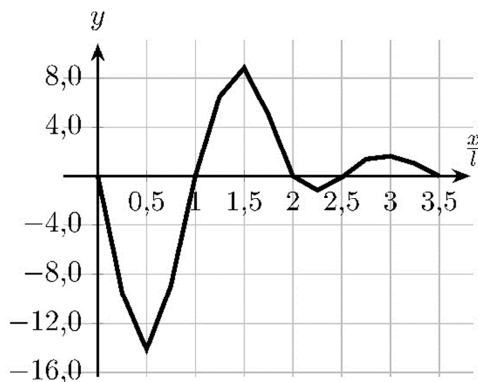


Рис. 3.8. Вторая форма собственных колебаний, $\omega_2 = 21,6136 \text{ сек}^{-1}$

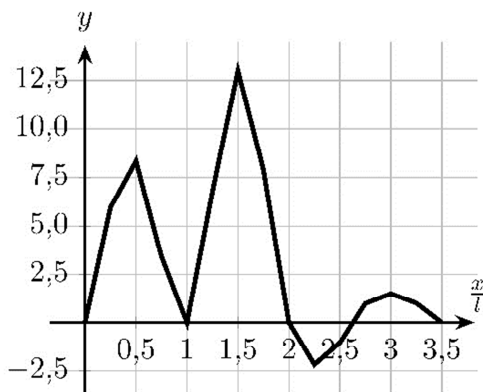


Рис. 3.9. Третья форма собственных колебаний, $\omega_3 = 29,8344 \text{ сек}^{-1}$

ЗАДАЧА 3.4. Использование форм собственных колебаний для определения критических нагрузок

При определении критических нагрузок на стержень по методу Ритца [2] необходимо задаваться формой потери устойчивости стержня, которая удовлетворяет всем геометрическим граничным условиям опирания стержня. Однако форму потери устойчивости стержня можно задавать численно в виде формы собственных колебаний этого стержня.

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 3.5. Первая форма потери устойчивости для сжатого стержня получена в виде совокупности чисел

$$\{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\} = \{-0,07518; 0; -0,07518; -0,175898; -0,177312; 0; 0,43546; 1; 1,56454\}.$$

Энергия изгиба и сближение концов стержня в момент потери устойчивости равны:

$$U = \frac{EJ}{2} \left(\left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta}{2} + \sum_{k=2}^6 \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta^2} \right)^2 \Delta \right) = 4,386 \frac{EJ}{\ell^3};$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} \right)^2 \Delta = 1,11114 \frac{1}{\ell}.$$

Критическая сжимающая сила, приложенная к точке 7 определится частным

$$P_{cr} = \frac{U}{\Pi} = 3,94732 \frac{EJ}{\ell^2}.$$

Для сравнения, значение критической силы в случае прямого решения задачи устойчивости ВРМ будет $P_{cr} = 3,93264 \frac{EJ}{\ell^2}$.

Отметим, что впервые для статических расчетов плит на упругом основании использовать собственные функции изгибных колебаний пластинки предложил А. И. Цейтлин [6].

ЗАДАЧА 3.5. Использование форм потери устойчивости для определения частот собственных колебаний стержня

В задаче 2.7 построены формы потери устойчивости для двухпролетной стойки с консолью. Если поместим массу M на конец консоли, то первую форму потери устойчивости можно принять для

нахождения первой частоты собственных колебаний. Итак, в соответствии с рис. 2.9 имеем

$$\{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\} = \{0,0219; 0; 0,0219; 0,0528; 0,0557; 0; -0,1320; -0,2365; -0,2158; 0; 0,4376; 1; 1,5624\}.$$

Эта форма колебаний изображена на рис. 3.10.

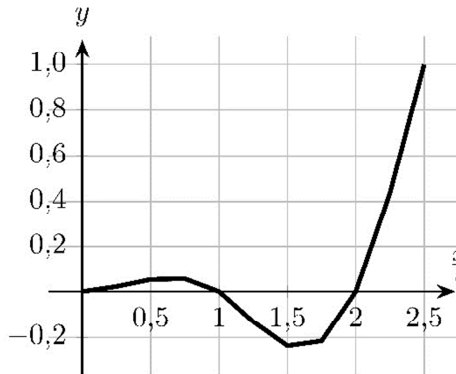


Рис. 3.10. Принятая первая форма собственных колебаний двухпролетной балки с сосредоточенной массой на консоли

Для первой частоты собственных колебаний получаем

$$\omega^2 = \frac{EJ}{M} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\Delta^2} \right)^2 + \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta^2} \right)^2}{\frac{1}{2} y_{11}^2} \Delta = 8,34228 \frac{EJ}{M \ell^3}.$$

Для сравнения, прямое решение задачи динамики ВРМ дает

$$\omega^2 = 8,13591 \frac{EJ}{M \ell^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : МБИ, 1968. – 503 с.
2. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1971. – 807с.
3. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. Босаков, С. В. Теория сооружений. Практикум / С. В. Босаков, О. В. Козунова, К. В. Юркова. – Минск : БНТУ, 2020. – 245 с.
5. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.
6. Цейтлин, А. И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики / А. И. Цейтлин. – М. : Стройиздат, 1984. – 334 с.

Учебное издание

БОСАКОВ Сергей Викторович
СКАЧЁК Павел Дмитриевич

**ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД
В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ
И ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕЙ**

Пособие
для магистрантов специальности
7-06-0732-01 «Строительство»

Редактор *А. О. Решовский*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 18.07.2024. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,03. Уч.-изд. л. ,99. Тираж 50. Заказ 56.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.