Весці БДПУ. Серыя 3. 2018. № 4. С. 15–18.

УДК 517.968

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Е. И. Федорако,
старший преподаватель кафедры «Высшая математика №3» БНТУ;

А. А. Самодуров,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общей математики и информатики» БГУ

Поступила в редакцию 9.10.18.

UDC 517.968

INTEGRATING MODULE FOR ABEL'S EQUATION

Ye. Fedorako,
Senior Teacher of the Department of Higher Mathematics № 3, BNTU;

A. Samodurov,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of General Mathematics and Informatics, BSU

Received on 9.10.18.

Рассмотрено дифференциальное уравнение первого порядка – уравнение Льенара, являющееся уравнением траекторий для систем, соответствующих уравнениям второго порядка. Путем замены переменной оно приведено к уравнению Абеля. Получены необходимые и достаточные условия существования интегрирующего множителя достаточно общего вида для уравнения Абеля. Умножение обеих частей дифференциального уравнения на интегрирующий множитель позволяет привести его к уравнению в полных дифференциалах, а значит, проинтегрировать уравнение в квадратурах.
Существование интегрирующего множителя равносильно наличию группы непрерывных преобразований переменных, оставляющих инвариантным рассматриваемое уравнение. Такая группа преобразований выписывается по известному интегрирующему множителю. По найденной группе можно либо построить точное решение данного уравнения, либо по одному известному точному решению построить семейство решений дифференциального уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения Льенара и Абеля, замена переменной, интегрирующий множитель, непрерывное преобразование переменных, инвариантное дифференциальное уравнение.

The differential equation of the first order – Lienard equation is considered. By replacing the variable it is transformed to Abel equation. The necessary and sufficient conditions of existence of the integrating multiplier for Abel equation are obtained.
The presence of such a multiplier is equivalently to the existence of continuous transformation of variables that leaves invariant the equation under consideration.

Keywords: Lienard and Abel differential equations; replacing the variable, integrating multiplier, continuous transformation of variables; invariant differential equation.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Льенара первого порядка

$$yy' + f(x)y + g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, обеспечивающие существование и единственность решения локальной задачи Коши на некотором промежутке. Дифференциальное уравнение Льенара второго порядка описывает конкретные физические процессы, изучаемые в теории колебаний и динамических систем [1]. Уравнение (1) является уравнением траекторий для систем, соответствующих уравнениям второго порядка.

Выполним в уравнении (1) замену переменной по формуле

$$y(x) = \frac{1}{z(x)},$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, в результате чего получим уравнение

$$z' = f(x)z^2 + g(x)z^3. \qquad (2)$$

Если известно частное решение уравнения Абеля общего вида

$$y' = a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x),$$

то уравнение (2) получаем из него с помощью замены переменных [2].

Будем искать интегрирующий множитель для уравнения (2) в достаточно общем виде

$$\mu(x,z) = \prod_{j=1}^{n}\left(z + \varphi_j(x)\right)^{\alpha_j}, \qquad (3)$$

где $\varphi_j(x)$ – дифференцируемые функции переменной x, α_j – постоянные, $j = \overline{1,n}$.

Наличие такого множителя эквивалентно наличию непрерывного преобразования переменных, оставляющего инвариантным рассматриваемое уравнение [3; 4]. Для существования интегрирующего множителя для уравнения (2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(f(x)z^2+g(x)z^3\right)+\\&+\mu\left(2zf(x)+3z^2g(x)\right)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Рассмотрим сначала простейшие случаи.

1. Случай n = 1. Подставим

$$\mu(x,z)=\left(z+\varphi(x)\right)^{\alpha}$$

в тождество (4) с учетом уравнения (2), получим тождество

$$\begin{aligned}&2\alpha f(x)z^2+2\alpha g(x)z^3+\alpha\varphi'(x)+\\&+2z^2f(x)+3z^3g(x)+2zf(x)\varphi(x)+\\&+3z^2g(x)\varphi(x)\equiv 0.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим систему:

$$\begin{cases}g(x)(2\alpha+3)=0,\\2f(x)(\alpha+1)-3g(x)\varphi(x)=0,\\\varphi(x)=0,\\\varphi'(x)=0.\end{cases}\tag{5}$$

Система (5) имеет решение $\alpha=-\dfrac{3}{2}$, $\varphi(x)=0$ при условии, что *f(x)* = 0 (тривиальный случай).

2. Случай n = 2. Подставим

$$\mu(x,z)=\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\tag{6}$$

в тождество (4) с учетом уравнения (2), получим равенство

$$\begin{aligned}&\alpha\left(f(x)z^2+g(x)z^3+\varphi_1'(x)\right)\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha-1}\times\\&\times\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}+\beta\left(f(x)z^2+g(x)z^3+\varphi_2'(x)\right)\times\\&\times\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta-1}+\\&+\left(z^2f(x)+z^3g(x)\right)+\\&+\left(\alpha\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha-1}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}+\right.\\&\left.+\beta\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta-1}\right)+\\&+\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\times\\&\times\left(2zf(x)+3z^2g(x)\right)\equiv 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в уравнении (7), получим систему:

$$\begin{cases}g(x)(2\alpha+2\beta+3)=0,\\2f(x)(\alpha+\beta+1)+\\2g(x)\left(\alpha\varphi_2(x)+\beta\varphi_1(x)\right)+\\+3g(x)\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)=0,\\2f(x)\left(\alpha\varphi_2(x)+\beta\varphi_1(x)\right)+\\+2f(x)\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)+\\+3g(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)=0,\\\alpha\varphi_1'(x)+\beta\varphi_2'(x)+\\+2f\varphi_1(x)\varphi_2(x)=0,\\\alpha\varphi_1'(x)\varphi_2(x)+\beta\varphi_1(x)\varphi_2'(x)=0.\end{cases}\tag{8}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}&\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)=u_1(x),\\&\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=u_2(x),\\&\varphi_1(x)\varphi_2(x)=v(x).\end{aligned}$$

Тогда при условии, что $g(x)\neq 0$, из (8) получим систему:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2},\\f+2gu_1=0,\\f^2-fgu_2+3g^2v=0,\\u_1'+2fv=0,\\\varphi_1^{\alpha}\cdot\varphi_2^{\beta}=1.\end{cases}\tag{9}$$

Из системы (9) имеем:

$$\begin{cases}u_1=-\dfrac{f}{2g},\\u_2=\dfrac{f^2}{2g}-\dfrac{3g}{8f}\left(\dfrac{f}{g}\right)',\\v=\dfrac{1}{4f}\left(\dfrac{f}{g}\right)'.\end{cases}\tag{10}$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (2) имело интегрирующий множитель вида (6), необходимо и достаточно, чтобы система (10) при условиях $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$ и $\varphi_1^{\alpha}\cdot\varphi_2^{\beta}=1$ была совместна при некотором выборе постоянных α и β.

3. Случай n = 3. Подставим

$$\mu(x,z)=$$
$$=\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma} \qquad (11)$$

в тождество (4) с учетом уравнения (2), получим равенство

$$\alpha\left(f(x)z^2+g(x)z^3+\varphi_1'(x)\right)\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma}+$$
$$+\beta\left(f(x)z^2+g(x)z^3+\varphi_2'(x)\right)\times$$
$$\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta-1}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma}+$$
$$+\gamma\left(f(x)z^2+g(x)z^3+\varphi_3'(x)\right)\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma-1}+$$
$$+\left(z^2f(x)+z^3g(x)\right)[\alpha\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma}+$$
$$+\beta\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta-1}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma}+$$
$$+\gamma\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma-1}]+$$
$$+\left(z+\varphi_1(x)\right)^{\alpha}\left(z+\varphi_2(x)\right)^{\beta}\left(z+\varphi_3(x)\right)^{\gamma}\times$$
$$\times\left(2zf(x)+3z^2g(x)\right)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в последнем уравнении, получим систему:

$$\begin{cases} g\left(2\alpha+2\beta+2\gamma+3\right)=0, \\ 2f\left(\alpha+\beta+\gamma+1\right)+ \\ +2g\left(\alpha\varphi_2+\alpha\varphi_3+\beta\varphi_1+\beta\varphi_3+\gamma\varphi_1+\gamma\varphi_2\right)+ \\ +3g\left(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3\right)=0, \\ 2f\left(\alpha\left(\varphi_2+\varphi_3\right)+\beta\left(\varphi_1+\varphi_3\right)+\gamma\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)+ \\ +2f\left(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3\right)+ \\ +3g\left(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3\right)+ \\ +2g\left(\alpha\varphi_2\varphi_3+\beta\varphi_1\varphi_3+\gamma\varphi_1\varphi_2\right)=0, \\ \alpha\varphi_1'+\beta\varphi_2'+\gamma\varphi_3'+ \\ +2f\left(\alpha\varphi_2\varphi_3+\beta\varphi_1\varphi_3+\gamma\varphi_1\varphi_2\right)+ \\ +2f\left(\varphi_2\varphi_3+\varphi_1\varphi_3+\varphi_1\varphi_2\right)+ \\ +3g\varphi_1\varphi_2\varphi_3=0, \\ \alpha\varphi_1'\left(\varphi_2+\varphi_3\right)+\beta\varphi_2'\left(\varphi_1+\varphi_3\right)+ \\ +\gamma\varphi_3'\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+2f\varphi_1\varphi_2\varphi_3=0, \\ \alpha\varphi_1'\varphi_2\varphi_3+\beta\varphi_1\varphi_2'\varphi_3+\gamma\varphi_1\varphi_2\varphi_3'=0 \end{cases} \qquad (12)$$

Обозначим

$$\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)+\gamma\varphi_3(x)=u_1(x),$$
$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)=u_2(x),$$
$$\alpha\varphi_2(x)\varphi_3(x)+\beta\varphi_1(x)\varphi_3(x)+$$
$$+\gamma\varphi_1(x)\varphi_2(x)=v_1(x),$$
$$\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)+\varphi_3^2(x)=v_2(x),$$
$$\alpha\varphi_1^2(x)+\beta\varphi_2^2(x)+\gamma\varphi_3^2(x)=v_3(x),$$
$$\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)=w(x).$$

Тогда при условии, что $g(x)\neq 0,$ из (12) получим систему:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3}{2}, \\ 2g\left[\left(\alpha+\beta+\gamma\right)u_2-u_1\right]+3gu_2-f=0, \\ 2f\left[\left(\alpha+\beta+\gamma\right)u_2-u_1\right]u_1+2gu_1+ \\ +3g\left(u_2^2-v_2\right)+3fu_2=0, \\ 2fv_1+u_1'+3gw+ \\ +2f\left(u_2^2-v_2\right)-\dfrac{3}{2}u_2'-=0, \\ 2fw+u_1'u_2-\dfrac{v_3'}{2}=0 \\ \varphi_1{}^{\alpha}\cdot\varphi_2{}^{\beta}\cdot\varphi_3{}^{\gamma}=1. \end{cases} \qquad (13)$$

Из системы (13) получим:

$$\begin{cases} u_1=-\dfrac{f}{2g}, \\ v_2-u_2^2=\dfrac{f^2}{3g^2}-\dfrac{f}{3g}, \\ 2fv_1+3gw=\left(\dfrac{f}{2g}\right)'-\dfrac{2f^2}{3g}+\dfrac{2f^3}{3g^2} \\ v_3'+u_2\left(\dfrac{f}{g}\right)'-4fw=0. \end{cases} \qquad (14)$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (2) имело интегрирующий множитель вида (11), необходимо и достаточно, чтобы система (14) при условиях $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3}{2}$ и $\varphi_1{}^{\alpha}\cdot\varphi_2{}^{\beta}\cdot\varphi_3{}^{\gamma}=1$ была совместна при некотором выборе постоянных *α*, *β* и *γ*.

4. Общий случай.

Подставив

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\prod_{j=1}^{n}\left(z+\varphi_j\right)^{\alpha_j-1}\times$$

$$\times\Big(\alpha_1\left(z'+\varphi_1'\right)\left(z+\varphi_2\right)\left(z+\varphi_3\right)\ldots\left(z+\varphi_n\right)+$$

$$+\alpha_2\left(z'+\varphi_2'\right)\left(z+\varphi_1\right)\left(z+\varphi_3\right)\ldots\left(z+\varphi_n\right)+\ldots+$$

$$+\alpha_n\left(z+\varphi_1\right)\left(z+\varphi_2\right)\ldots\left(z+\varphi_{n-1}\right)\Big)$$

и

$$\frac{\partial\mu}{\partial z}=\frac{\alpha_1\prod_{j=1}^{n}\left(z+\varphi_j\right)^{\alpha_j}}{z+\varphi_1}+$$

$$+\frac{\alpha_2\prod_{j=1}^{n}\left(z+\varphi_j\right)^{\alpha_j}}{z+\varphi_2}+\ldots+\frac{\alpha_n\prod_{j=1}^{n}\left(z+\varphi_j\right)^{\alpha_j}}{z+\varphi_n}$$

в уравнение (4) с учетом уравнения (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим систему:

$$\begin{cases} 2g\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+3=0, \\ 2f\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+1\right)+ \\ +2g\left(\alpha_1\sum_{j=2}^{n}\varphi_j+\alpha_2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\varphi_j+\ldots+\alpha_n\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j\right)+ \\ +3g\sum_{j=1}^{n}\varphi_j=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n}\left[\alpha_j\varphi_j'\left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\varphi_k\right)\right]+2f\prod_{j=1}^{n}\varphi_j=0, \\ \prod_{j=1}^{n}\varphi_j^{\alpha_j}=1. \end{cases} \qquad (15)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы уравнение (2) допускало интегрирующий множитель вида (3), необходимо и достаточно, чтобы при некотором выборе постоянных α_j, $j=\overline{1,n}$, была совместна система (15).

Условия существования интегрирующего множителя иного вида для уравнения Абеля исследованы в работе [5].

Литература

1. Эрроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс; пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1971. – 704 с.
3. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – М : Знание, 1982. – 279 с.
4. Федорако, Е. И. Непрерывные преобразования дифференциальных уравнений второго порядка с заданной нелинейностью / Е. И. Федорако // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2014. – № 4.– С. 38–40.
5. Самодуров, А. А. Интегрирующий множитель уравнения Абеля / А. А. Самодуров // Дифференциальные уравнения. – 1988. – № 5. – Т. 24. – С. 907–909.

References

1. Errousmit, D. Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami / D. Errousmit, K. Pleys; per. s angl. – M. : Mir, 1986. – 243 s.
2. Kamke, E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam / E. Kamke. – M. : Gos. izd. fiz.-mat. literatury, 1971. – 704 s.
3. Ibragimov, N. Kh. Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike / N. Kh. Ibragimov. – M. : Znaniye, 1982. – 279 s.
4. Fedorako, Ye. I. Nepreryvnyye preobrazovaniya differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s zadannoy nelineynostyu / Ye. I. Fedorako // Vestsi BDPU. Ser. 3. – 2014. – № 4. – S. 38–40.
5. Samodurov, A. A. Integriruyushchiy mnozhitel uravneniya Abelya / A. A. Samodurov // Differentsialnyye uravneniya. – 1988. – № 5. – T. 24. – S. 907–909.