является классическим решением задачи (1)-(5).

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1), \varphi(0) = \varphi(1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1),\ \varphi''(0) = \varphi''(1)$.

2. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1),\ \psi(0) = \psi(1),\ \psi'(0) = \psi'(1),\ \psi''(0) = \psi''(1)$.

3. $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$,
$f(0,t) = f(1,t), f_x(0,t) = f_x(1,t), f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t)\ (0 \le t \le T)$.

4. $g(x,t), g_x(x,t), g_{xx}(x,t) \in C(D_T), g_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$,
$g(0,t) = g(1,t), g_x(0,t) = g_x(1,t), g_{xx}(0,t) = g_{xx}(1,t)\ (0 \le t \le T)$.

4. $\delta \ge 0, p(t) \in C[0,T], h(t) \in C^2[0,T], h(t) \ne 0\ (0 \le t \le T)$.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть выполнены условия1-4. Тогда при малых значениях T задача (1)-(3), (6), (7) имеет единственное решение.

В силу леммы 1, из теоремы 1 немедленно вытекает однозначная раз- решимости задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и выполнены условия согласовании (8) и (9).

Тогда при малых значениях T задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение.

Список литературы

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР.-1943.-39. №5.-с. 195-198.

2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР.-1964.-157. №3.-с. 520-521.

3. Лаврентьев М.М. , Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа.- М:Наука. 1980. 288с.

4. Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения .-М.: Наука. 1978. 206с.

5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач.- М: МГУ. 1994. 206с.

6. Мегралиев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика (2011) (23). С. 25-38

УДК 517.977

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ

FINITE STABILIZATION OF LINEAR AUTONOMOUS SYSTEM WITH DELAY BY DIFFERENTIAL-DIFFERENCE CONTROLLER

Метельский Анатолий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики №1 БНТУ, г. Минск, Белоруссия, ametelski@bntu.by

Аннотация. Для спектрально управляемой дифференциальной системы запаздывающего типа строится динамический дифференциально-разностный регулятор по типу обратной связи по состоянию, обеспечивающий финитную стабилизацию (полное успокоение за конечное время) исходной системы.

Abstract. For the spectrally controllable differential system of delayed type, a dynamic state feedback controller is constructed that provides finite stabilization (complete damping in a finite time) of the initial system.

Ключевые слова: дифференциальная система, запаздывание, спектральная управляемость, финитная стабилизация, динамический регулятор.

Keywords: differential system, delay, spectrally controllability, finite stabilization, dynamic controller.

Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_i x(t-ih)+bu(t),\ t>0,\ x(t)=\eta(t),\ t\in[-mh,0]. \qquad (1)$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения системы (1) ($n\geq 2$); $0<h$ – постоянное запаздывание; A_i – постоянные $n\times n$-матрицы ($i=\overline{0,m}$); $b=e_n=[0;\ldots;0;1]'$ – n-вектор; η – начальная кусочно-непрерывная функция, u – скалярное управление. Векторные величины записываем в столбец, штрих обозначает операцию транспонирования. Обозначим $A(\lambda)=A_0+A_1\lambda+\ldots+A_m\lambda^m$ ($\lambda\in\mathbb{C}$ – множеству комплексных чисел), $w(p,e^{-ph})=\left|pE_n-A(e^{-ph})\right|$ – характеристический квазиполином ($p\in\mathbb{C}$) системы (1). Множество корней $\sigma=\{p\in\mathbb{C}\,|\,w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Полагаем, что система (1) спектрально управляема:

$$\operatorname{rank}\left[pE_n-A(e^{-ph}),b\right]=n,\ p\in\mathbb{C}. \qquad (2)$$

Под финитной стабилизацией будем понимать полное успокоение исходной системы (1): $x(t)\equiv 0, u(t)\equiv 0\ \ t\geq t_1$, за конечное время $t_1>0$.

Задача. Для спектрально управляемой системы (1) обосновать алгоритм построения динамического дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающего финитную стабилизацию системы (1).

Нужный регулятор будем строить в классе регуляторов вида

$$u(t)=f'(p,\lambda)x(t)+a_1(\lambda)x_{n+1}(t),\ \dot{x}_{n+1}(t)=q'(\lambda)x(t)+a_2(\lambda)x_{n+1},\ t>0, \qquad (3)$$

где λ – оператор сдвига, p – дифференцирования: $\lambda^i p^j x_k(t)=x_k^{(j)}(t-ih)$; $x(t)=[x_1(t),\ldots,x_n(t)]'$, $x_{n+1}(t)$ – вспомогательная переменная; $a_1(\lambda),a_2(\lambda)$, $f'(p,\lambda)=[f_1(p,\lambda),\ldots f_n(p,\lambda)]$, $q'(\lambda)=[q_1(\lambda),\ldots q_n(\lambda)]$ – полиномы.

Пусть $M(p,\lambda)=[M_1(p,\lambda),\ldots,M_n(p,\lambda)]'$ – алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $pE_n-A(\lambda)$. Ввиду (2) базис Гребнера для системы полиномов $M(p,\lambda)$ содержит полином $d_1(p)$, зависящий только от p. Найдутся полиномы $\varphi'(p,\lambda)=[\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\varphi_n(p,\lambda)]$, такие, что $\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda)=d_1(p)$. Обозначим $P^*=\{p_i\in\mathbb{C}, i=\overline{1,L}\}$ – множество корней полинома $d_1(p)$ и $\Lambda^*=\{\lambda_k\in\mathbb{C}, k=\overline{1,L_1}\}$ – конечное множество [1] чисел таких, что при некотором $p_i\in P^*$ имеем $M(p_i,\lambda_k)=0$.

Регулятор (3) будем строить так, чтобы замкнутая система (1), (3) имела конечный спектр. Ее характеристический полином $d(p)$ возьмем в виде $d(p)=d_1(p)d_2(p)$. Полином $d_2(p)$ с действительными коэффициентами выбираем так, чтобы $N=\deg d(p)\geq n$. Если $\deg d_1(p)\geq n$, то можно взять $d_2(p)=1$. В случае, когда $d_1(p)=1$, полином $d(p)=d_2(p)$, $N=\deg d_2(p)\geq n$, выбирается произвольным, в частности, асимптотически устойчивым. При построении полинома $d(p)$ и выборе полинома $d_2(p)$ учитываем приведенное ниже замечание. Чтобы алгоритмизировать построение регулятора (3) введем вспомогательную функцию

$$K(p,\lambda)=k(p,\lambda)+pM_n(p,\lambda),\ k(p,\lambda)=(a_1(\lambda)q'(\lambda)M(p,\lambda)+d(p))/(a_2(\lambda)-p).$$

Лемма. Для того чтобы регулятор (3) обеспечивал финитную стабилизацию системы (1) достаточно его коэффициенты взять такими, чтобы:

1) $a_1\left(e^{-ph}\right)/d(p)$, $\left(p-a_2\left(e^{-ph}\right)\right)/d(p)$ – целые функции ($p\in\mathbb{C}$);

2) $k(p,\lambda)$ – полином; 3) $f'(p,\lambda)M(p,\lambda)=K(p,\lambda)$.

Доказательство. Вычисляя характеристический определитель системы (1), (3), получаем $\left|pE_N-\widetilde{A}\left(p,e^{-ph}\right)\right|=d(p)$. Пусть $P=\left\{p_i,\, i=\overline{1,s_1}\right\}$ – множество корней полинома $d(p)$ с алгебраическими кратностями k_i, $\Lambda=\left\{\lambda_i=e^{-p_i h}\mid p_i\in P,\, i=\overline{1,s_1}\right\}$.

Чтобы обеспечить условие 1) леммы, полагаем $a_1(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{s_1}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, и для всех $\lambda_i\in\Lambda$:

$$a_2(\lambda_i)=p_i,\ a_2^{(k)}(\lambda_i)=\frac{(-1)^k(k-1)!}{h\lambda_i^k},\ k=\overline{1,k_i-1},\ \text{если}\ k_i>1,\quad i=\overline{1,s_1}. \tag{4}$$

Замечание. Если набор корней полинома $d_1(p)$ содержит комплексно сопряженную пару $p_{k_{1,2}}=\alpha\pm i\beta$ такую, что $\sin(\beta h)=0$, то первое равенство в (4) выполнить нельзя, так как в этом случае $a_2\left(\lambda_{k_1}\right)=a_2\left(\lambda_{k_2}\right)$, а $p_{k_1}\neq p_{k_2}$. Для преодоления такой ситуации введем [2] в регуляторе (3) дробные запаздывания: $\omega=h/k$, k – натуральное число. Набор корней P^* при этом не изменится и натуральное k можно выбрать так, чтобы $\sin(\beta h/k)\neq 0$ для всех пар $p_{k_{1,2}}=\alpha\pm i\beta$ таких, что $\lambda_{k_1}=\lambda_{k_2}=e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Тогда различным значениям $p_i\in P^*$ будут соответствовать различные $\lambda_i=e^{-p_i h/k}$. Это замечание учитываем и при выборе полинома $d_2(p)$.

Для обеспечения условия 2) потребуем, чтобы $M(a_2(\lambda),\lambda)\neq 0,\ \lambda\in\Lambda^*\setminus\Lambda$. Если эти неравенства не выполняются в силу (4), то к условиям (4) добавим

$$a_2(\lambda_i)=p_0\ (p_0\in\mathbb{R}\mid p_0\notin P^*,\ \lambda_i\in\Lambda^*\setminus\Lambda). \tag{5}$$

В качестве полинома $a_2(\lambda)$ возьмем интерполяционный полином Эрмита согласно интерполяционным условиям (4)-(5). Выбор полиномов $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ влечет [1] точечную вырожденность системы (1), (3) в направлениях, отвечающих фазовым переменным $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ и тем самым – финитную стабилизацию системы (1).

Векторные полиномы $q'(\lambda)$ и $f'(p,\lambda)$, обеспечивающие условия 2)-3) леммы, берем следующего вида

$$q'(\lambda)=-\widetilde{q}'(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda),\ \text{где}\ \widetilde{q}'(\lambda)M(a_2(\lambda),\lambda)=1,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

$$f'(p,\lambda)=(d_2(p)(1-\widetilde{q}'(\lambda)M(p,\lambda))\varphi'(p,\lambda)+(d(p)-d(a_2(\lambda)))\widetilde{q}'(\lambda))/(a_2(\lambda)-p)+e_n'p.$$

Полиномы $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ таковы, что полином $\widetilde{q}'(\lambda)$ существует [1]. Используя (1), замкнутую систему (1), (3) можно записать в нормальной форме.

Теорема. Условие спектральной управляемости (2) необходимо и достаточно для построения дифференциально-разностного регулятора (3), обеспечивающего финитную стабилизацию системы (1).

Список литературы

1. Метельский, А. В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436-1452.

2. Карпук, В. В. Критический случай при построении регулятора полного успокоения для линейной автономной системы с запаздыванием / В. В. Карпук, А. В. Метельский // Международная математическая конференция "Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям". Минск, БГУ. 2010. Тез. докл. С. 88-89.

УДК 517.53

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ КВАЗИНОРМ ПРОИЗВОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

ON ONE RELATION TO THE QUASINORMS OF DERIVATIVES OF ALGEBRAIC POLYNOMIALS

Мисюк Виктор Романович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно, Беларусь, misiuk@grsu.by

Аннотация. В статье рассматривается вопрос об одном аналоге неравенства типа Бернштейна теории полиномиальных приближений и его приложении виде соответствующей обратной теоремы в пространстве типа Бергмана.

Abstract. In this paper we consider the question of an analogue of the Bernstein type inequality of the theory of polynomial approximations and its application as an inverse theorem in a space of Bergman type.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, неравенство типа Бернштейна, обратные теоремы, пространство типа Бергмана.

Keywords: best polynomial approximation, an inequality of Bernstein type, inverse theorems, a space of Bergman type.

Во многих задачах современного анализа (теоретического или прикладного) часто возникают задачи, связанные с необходимостью замены некоторых объектов другими мене сложными объектами. Таковой является классическая задача о приближении непрерывных функций рациональными функциями и, в частности, полиномами. К настоящему времени полиномиальные приближения достаточно хорошо изучены и имеют многочисленные приложения в приближённых вычислениях, теории функций, теории операторов, теории вероятностей и других областях математики. Основополагающими в аналитическом направлении полиномиальной теории приближений являются прямая теорема Д. Джексона и обратная теорема С.Н. Бернштейна, полученные соответственно в 1911 и 1912 годах. Эти теоремы устанавливают связь между наилучшими приближениями функции полиномами и её дифференциальными свойствами. Здесь мы приведем один аналог обратной теоремы.

Рассмотрим тригонометрический полином порядка не выше чем n

$$T_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right),$$

который определён на всей действительной оси. Как известно, свойства тригонометрических полиномов изучены достаточно тщательно в различных аспектах анализа. Замечательным свойством этих полиномов является, то, что его норма в основных классических пространствах C и L_p не зависит от сдвига аргумента, позволяет получать точные неравенства с помощью довольно простых методов, причём многие задачи анализа на классах периодических функций базируются на этих неравенствах. При этом особую роль играют неравенства дающие соотношения между нормой производной полинома через норму (вообще может и в другом пространстве) самого полинома.