гарантированно, а лишь с некоторой степенью достоверности, является метод Монте-Карло.

Приведем схему алгоритма вычисления интеграла методом Монте-Карло для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

Последовательно для $n = 1, 2, \ldots$ получаем координаты случайных точек P_n и вычисляем величины S_n, d_n, D_n, z_n, используя рекуррентные соотношения:

$$z_n = z_{n-1} + f(P_n)$$

$$S_n = \frac{z_n}{n}$$

$$d_n = d_{n-1} + \frac{n}{n-1}\left(f(P_n) - S_n\right)^2$$

$$D_n = \frac{d_{n-1}}{n-1},$$

начальные значения $z_1 = S_1 = f(P_1), d_1 = D_1 = 0$.

Параллельно вычисляем $W_n = 1{,}96\sqrt{D_n / n}$. Вычисления прекращаются, если выполняется, что $W_n \le \varepsilon$. В этом случае искомое значение интеграла $I = S_n$ (считаем, что с вероятностью 0,95 выполняется неравенство $|I - S_n| \le \varepsilon$).

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

А.И. Швакель

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***П. И. Монастырный***

Белорусский государственный университет

Рассмотрение трёхточечных разностных схем, предназначенных для отыскания периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также приближённое решение уравнений с частными производными в цилиндрических и сфери-ческих координатах обычно приводит к системам разностных уравнений [3, 4] вида

$$\begin{aligned} &a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1, \\ &a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i,\ i = 2, 3, \ldots, N-1, \\ &a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = -f_N, \end{aligned} \tag{1}$$

относительно решения, коэффициентов и правых частей которых выполняются условия периодичности $y_{i+N} = y_i$, $a_{i+N} = a_i$, $b_{i+N} = b_i$, $c_{i+N} = c_i$, $f_{i+N} = f_i$. Для нахождения периодического решения таких систем предназначен метод циклической прогонки [3, 4], эффективная численная реализация и устойчивость которого, в свою очередь, гарантирована только при $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > a_i + b_i$. Такие условия являются довольно жёсткими ограничениями на параметры и вид сеточных задач, что позволяет применять данный метод лишь для узкого класса задач с периодическими решениями. В этой связи возникает необходимость построения и обоснования модифицированного варианта метода циклической прогонки [1, 2] с целью улучшения его вычислительных свойств и существенного расширения класса решаемых задач.

Результатом исследований проведённых автором в этом направлении стала разработка вычислительной схемы циклической ортогональной прогонки, основанной на использовании ортогональных преобразований, связывающих искомую сеточную функцию с вспомогательными сеточными функциями, которые определяются как решение сеточных задач Коши, согласованных по своим свойствам с искомыми значениями решения [5, 6].

Наиболее существенными преимуществами построенного метода циклической ортогональной прогонки по сравнению с другими вариантами метода прогонки являются его применимость для решения систем сеточных уравнений более общего, чем система (1), вида, устойчивость в малом [5] и минимальные ограничения, накладываемые на исходные данные решаемой задачи. Так, например, при решении данным методом системы трёхточечных разностных уравнений (1) требуется только выполнение условий $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i = \overline{2, N-1}$. Такая универсальность предлагаемого метода, по сути, является следствием того, что важный для схем прогонки переход от основных функций к вспомогательным и обратно является всегда невырожденным и не требует выполнения дополнительных условий.

Литература

1. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 679 – 684.
2. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 1. С. 211 – 218.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
5. Кремень Ю. А., Монастырный П. И.// Доклады АН БССР. 1991. Т. 35. № 7. – С. 589–593.
6. Кремень Ю. А., Монастырный П. И.// ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 12. С. 1782 – 1792.

О СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО РАЦИОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Е.И. Шестак

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***В.Н. Русак***

Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

Пусть $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}, \operatorname{Im} Z_k > 0$ заданная последовательность комплексных чисел. Рациональные функции

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_n}{\pi}} \cdot \frac{x+i}{x-z_n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-\overline{z_k}}{x-z_k},$$
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_n}{\pi}} \cdot \frac{x-i}{x-\overline{z_n}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-z_k}{x-\overline{z_k}}, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{1}$$

Ортогональную по весу $\left(1+x^2\right)^{-1}$ систему на действительной оси. Если *f(x)* интегрируема на отрезке $(-\infty,+\infty)$ по названному весу, то ей отвечает ряд Фурье по системе (1):

$$a_0(f)\cdot\varphi_0(x) + \sum\left(a_k(f)\cdot\varphi_k(x) + b_k(f)\cdot\psi_k(x)\right) \sim \mathrm{f(x)}, \tag{2}$$
$$a_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\cdot\overline{\varphi_k(x)}}{1+x^2}dx, \quad b_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\cdot\overline{\psi_k(x)}}{1+x^2}dx$$

Теорема 1.Частная сумма ряда (2) представима в виде

$$S_{2n}(x,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{t-x}\cdot\left\{\frac{x+i}{t+i}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(t-z_k)\cdot\left(x-\overline{z_k}\right)}{\left(t-\overline{z_k}\right)\cdot(x-z_k)} - \frac{x-i}{t-i}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(t-\overline{z_k}\right)\cdot(x-z_k)}{(t-z_k)\cdot\left(x-\overline{z_k}\right)}\right\}dx \tag{3}$$

Доказательство теоремы связано с установлением тождества:

$$\frac{2\pi i}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_k(x)\cdot\overline{\varphi_k(t)} + \psi_k(x)\cdot\overline{\Psi_k(t)}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{t-x}\cdot\left\{\frac{x+i}{t+i}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(t-z_k)\cdot\left(x-\overline{z_k}\right)}{\left(t-\overline{z_k}\right)\cdot(x-z_k)} - \frac{x-i}{t-i}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(t-\overline{z_k}\right)\cdot(x-z_k)}{(t-z_k)\cdot\left(x-\overline{z_k}\right)}\right\}$$

При определённых ограничениях на полюсы исследуется сходимость в равномерной метрике для функций, принадлежащих пространству C_∞. На конечном отрезке и на единичной окружности ортогональные системы рациональных функций изучались ранее в работах М. М. Джрбашяна, А.А. Китболяна, Е.А. Ровбы.