$$M(S_j) = \iint\limits_{\Omega} \dots \int f(P) dx_1 dx_2 \dots dx_n ,$$

$$D(S_j) = \iint\limits_{\Omega} \dots \int f^2(P) dx_1 dx_2 \dots dx_n - (M(S_j))^2 = D ,$$

т.е. математическое ожидание введенных величин совпадает с искомым значением интеграла. Рассмотрим случайную величину $S_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j$.

В силу попарной независимости случайных величин S_j получаем

$$M(S_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j = M(S_j) = \iint\limits_{\Omega} \dots \int f(P) dx_1 dx_2 \dots dx_n ,$$

$$D(S_N) = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} D(S_j) = \frac{1}{N} D .$$

Если точки P_j независимы в совокупности, то на основании центральной предельной теоремы случайная величина $\frac{(S_N - I)}{\sqrt{D/N}}$ распределена асимптотически нормально. Зададим доверительную вероятность α=0,95. Для нормально распределенной случайной величины ξ выполняется

$$P(|\xi| < 1{,}96) = 0{,}95$$

Таким образом, при больших N с вероятностью близкой к 0,95 выполняется неравенство

$$|S_N - I| \le 1{,}96\sqrt{D/N} .$$

Величина D в правой части известна, но ее можно оценить и по формуле

$$D = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j\right)^2$$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

М.В. Васько

Научный руководитель – к.т.н., доцент ***Н.П. Воронова***

Белорусский национальный технический университет

При вычислении однократных интегралов обычно приводится оценка погрешностей на некотором классе функций. Так, для формулы трапеций эта погрешность на классе функций, имеющих вторую производную, имеет вид:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a;b]}|f''(x)|,$$

где $[a;b]$ - отрезок интегрирования, n - число узлов интегрирования. Эта оценка считается гарантированной оценкой погрешности.

При переходе к многомерным интегралам возникают две проблемы: 1) трудно получить замкнутые выражения для гарантированных оценок; 2) если такая оценка получена, то для ряда классов функций она оказывается практически бесполезной, т.к. для достижения заданной гарантированной погрешности квадратурная формула должна содержать настолько большое число узлов, что выполнить вычисления практически невозможно.

Для преодоления этих трудностей можно отказаться от строгой гарантированной оценки погрешности и ограничиться получением оценки погрешности лишь с определенной степенью достоверности.

Одним из методов вычисления интеграла, при котором погрешность оценивается не гарантированно, а лишь с некоторой степенью достоверности, является метод Монте-Карло.

Приведем схему алгоритма вычисления интеграла методом Монте-Карло для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

Последовательно для $n = 1, 2, \ldots$ получаем координаты случайных точек P_n и вычисляем величины S_n, d_n, D_n, z_n, используя рекуррентные соотношения:

$$z_n = z_{n-1} + f(P_n)$$

$$S_n = \frac{z_n}{n}$$

$$d_n = d_{n-1} + \frac{n}{n-1}\left(f(P_n) - S_n\right)^2$$

$$D_n = \frac{d_{n-1}}{n-1},$$

начальные значения $z_1 = S_1 = f(P_1), d_1 = D_1 = 0$.

Параллельно вычисляем $W_n = 1{,}96\sqrt{D_n / n}$. Вычисления прекращаются, если выполняется, что $W_n \le \varepsilon$. В этом случае искомое значение интеграла $I = S_n$ (считаем, что с вероятностью 0,95 выполняется неравенство $|I - S_n| \le \varepsilon$).

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

А.И. Швакель

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***П. И. Монастырный***

Белорусский государственный университет

Рассмотрение трёхточечных разностных схем, предназначенных для отыскания периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также приближённое решение уравнений с частными производными в цилиндрических и сфери-ческих координатах обычно приводит к системам разностных уравнений [3, 4] вида

$$\begin{aligned} & a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1, \\ & a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i,\ i = 2, 3, \ldots, N-1, \\ & a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = -f_N, \end{aligned} \tag{1}$$

относительно решения, коэффициентов и правых частей которых выполняются условия периодичности $y_{i+N} = y_i$, $a_{i+N} = a_i$, $b_{i+N} = b_i$, $c_{i+N} = c_i$, $f_{i+N} = f_i$. Для нахождения периодического решения таких систем предназначен метод циклической прогонки [3, 4], эффективная численная реализация и устойчивость которого, в свою очередь, гарантирована только при $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > a_i + b_i$. Такие условия являются довольно жёсткими ограничениями на параметры и вид сеточных задач, что позволяет применять данный метод лишь для узкого класса задач с периодическими решениями. В этой связи возникает необходимость построения и обоснования модифицированного варианта метода циклической прогонки [1, 2] с целью улучшения его вычислительных свойств и существенного расширения класса решаемых задач.

Результатом исследований проведённых автором в этом направлении стала разработка вычислительной схемы циклической ортогональной прогонки, основанной на использовании ортогональных преобразований, связывающих искомую сеточную функцию с вспомогательными сеточными функциями, которые определяются как решение сеточных задач Коши, согласованных по своим свойствам с искомыми значениями решения [5, 6].

Наиболее существенными преимуществами построенного метода циклической ортогональной прогонки по сравнению с другими вариантами метода прогонки являются его