следующих канонических видов:

$$1.\left(x^3+bz^3-bx^2z+(1-c+d)xy^2+by^2z+(2-c)xz^2\right)dx+$$
$$+\left(y^3+(1+c-d)x^2y+(2-d)yz^2-2bxyz\right)dy+\left(bx^3+z^3+cx^2z+bxy^2+dy^2z-bxz^2\right)dz,$$
$$2.\left(x^3+xy^2-axz^2\right)dx+\left(y^3+x^2y-ayz^2\right)dy+\left(-z^3+ax^2z+ay^2z\right)dz,$$
$$3.\left(x^3-ay^3-ax^2y+xy^2+(1-b)xz^2-ayz^2\right)dx+$$
$$+\left(ax^3+y^3+x^2y+axy^2+axz^2+(1-b)yz^2\right)dy+\left(bx^2z+by^2z\right)dz, \qquad (3)$$
$$4.\left(x^3-az^3-ax^2z+(1-b)xy^2-ay^2z-(2b-1)xz^2\right)dx+\left(bx^2y-byz^2\right)dy+$$
$$+\left(ax^3-z^3+(2b-1)x^2z+axy^2+(b-1)y^2z+axz^2\right)dz,$$
$$5.\left(-az^3-ax^2z-ay^2z+(1-d)xz^2\right)dx+\left(-az^3-bx^2z-by^2z+(1-d)yz^2\right)dy+$$
$$+\left(ax^3+by^3+z^3+bx^2y+dx^2z+axy^2+dy^2z+axz^2+byz^2\right)dz.$$

Далее получены канонические виды всех уравнений, соответствующие формам (3). А также доказаны, например, такие теоремы:

Теорема 1. Канонические виды уравнения (1), соответствующие формам (3), всегда интегрируются в квадратурах.

Теорема 2. Все интегральные поверхности в случае 1-(3) гомеоморфны сфере.

Теорема 3. Все интегральные поверхности в случае 2-(3) будут либо простыми гиперболическими, либо простыми эллиптическими [2].

Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. 1959.

2. Кожеро М.В. Типы интегральных поверхностей однородного дифференциального уравнения Пфаффа в нормальных угловых пространствах. Учёные записи Смоленского пединститута.

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.А. Данилюк, Г.С. Карпович

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент ***В.А. Акимов***

Белорусский национальный технический университет

В учебной литературе [1] известны различные постановки граничных задач с начальными условиями при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Эти процессы описываются дифференциальными уравнениями с частными производными второго порядка и в одномерном случае имеют вид $[1, c.20]$:

$$u_t - C^2 u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (2)$$

будем разыскивать в следующей операторной форме:

$$u = \left[A_1(d_x)\exp\left(tC^2 d_x^2\right)\right] * f_1(x) + \left[A_2(d_x)\exp\left(tC^2 d_x^2\right)\right] * f_2(x) \qquad (3)$$

где $d_x = \dfrac{d}{d_x}$, t – время.

Построенное решение тождественно удовлетворяет уравнению (1) при произвольных бесконечно дифференцируемых функциях $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Звездочкой обозначена операция операторного дифференцирования.

Придавая аналитическим функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различный вид, можно получить как известные, так и новые решения. Авторы данной работы строят новое решение для случая

$f_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k$ и $f_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x^k$, не рассматриваемого в учебной литературе.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, -М.: ·М.; Наука, 1977. –736 с.

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

В.О. Буценко, Е.Н. Барановский

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент ***В.А. Акимов***

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим задачу для дифференциального уравнения в частных производных с начальными условиями [1]:

$$u_{tt} - C^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

здесь $C = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$; T_0 - натяжение струны, ρ - плотность.

Решение уравнения (1) запишем в виде:

$$U = [A_1(d_x) sh(tCd_x)] * f_1(x) + [A_2(d_x) ch(tCd_x)] * f_2(x) \tag{3}$$

где $d_x = \dfrac{d}{d_x}$, t – время.

Построенное таким образом решение тождественно удовлетворяет уравнению (1) при произвольных бесконечно дифференцируемых функциях $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Звездочкой обозначено операторное дифференцирование.

Если в (3) положить A_1 и $A_2 = const$, то с учетом $\exp(\pm tCd_x) * f(x) = f(x \pm tC)$, получим известное решение Даламбера $[1, c.52]$ для бесконечной струны: $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+Ct) + \varphi(x-Ct)}{2} + \dfrac{1}{2C}\displaystyle\int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(\alpha) d\alpha$.

Если в (3) положить $A_1(d_x) = \dfrac{A_n l}{\pi n} d_x$, $A_2(d_x) = B_n$, то получим решение Фурье $[1, c.86]$ для закрепленной $(0 \le x \le l;\ u(0,t) = u(l,t) = 0)$ струны:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} Ct + B_n \sin\frac{\pi n}{l} Ct \right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где $A_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi$, $B_n = \dfrac{2}{\pi n C}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi$.

Авторы данной работы исследуют новое решение, когда $f_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k$ и $f_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x^k$.

Вывод: операторный метод построения решений дифференциальных уравнений в частных производных с начальными условиями является универсальным и позволяет с единых позиций получать как известные, так и новые виды решений.